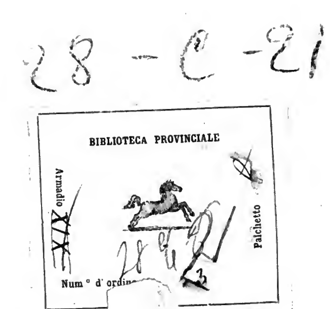



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIX
Palchetto
Num° d' ordine
28 C 21
3


NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2669
NAPOLI


Digitized by Google

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL.

On trouve chez le même Libraire les Ouvrages suivans du même Auteur.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour *les Lycées, Ecoles secondaires, Colleges*, etc., par S. F. LACROIX, Membre de l'Institut et de la Legion-d'Honneur, Professeur au Collége royal de France, etc., 9 vol. in-8. Prix pour Paris, 38 fr. 50 c.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

Traité élémentaire d'Arithmétique, 14e édition, 1818, 2 fr.

Elemens d'Algèbre, 12e édition, 1818, 4 fr.

Elemens de Geometrie, 11e édition, 1819, 4 fr.

Traité elementaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 6e édition, 1813, 4 fr.

Complement des Élémens d'Algèbre, 4e édition, 1817, 4 fr.

Complément des Élémens de Géométrie, Elémens de Géométrie descriptive, 4e édition, 1812, 3 fr.

Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 2e édition, 1806, 7 fr. 50 c.

Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 vol. in 8., 2e edition, 1816, 5 fr.

Traité elementaire du Calcul des Probabilités, in-8., 1816, 5 fr.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, 2e édition, revue et considérablement augmentée, 3 gros vol. in-4., avec planches. Prix pour Paris, 66 fr.

Le tome IIIe et dernier se vend séparément, 26 fr.

TRAITÉ

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

Tantùm series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME TROISIÈME,

CONTENANT UN TRAITÉ DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.



PARIS,

Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,
RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS.

1819.

AVERTISSEMENT.

Dans ce volume, comme dans le précédent, je ne me suis pas borné aux divisions indiquées dans la Préface du premier; j'en ai augmenté le nombre, afin de mieux séparer les matières qui sont ici très-variées. Après l'exposition du Calcul direct et inverse aux différences, renfermée dans les trois premiers chapitres, et la *Théorie des Fonctions génératrices*, qui remplit le quatrième, se présentent les applications réciproques des séries et du Calcul intégral, comprenant ces méthodes, pour ainsi dire, anomales, par lesquelles on a tâché de remplir quelques-unes des grandes lacunes que laisse l'imperfection des méthodes directes.

Cette dernière partie ne prouvera pas moins que les deux autres, combien la richesse réelle de l'Analyse est loin de répondre au grand nombre et à la diversité de ses procédés : cependant il est moins permis ici qu'ailleurs de négliger ceux qui paraissent faire un double emploi; parce qu'il s'agit des dernières limites de la Science, et qu'ignorant de quel côté viendront les progrès ultérieurs, il faut conserver tout ce qui tient à des idées nouvelles ou peut en suggérer. C'est dans cette vue que j'ai multiplié les indications sur la théorie et les usages des intégrales définies, pour sommer les suites et intégrer les équations différentielles, mais sans entrer dans les détails; car leur réunion pourrait former un volume plus gros que celui-ci. Ce seul exemple montrera suffisamment combien de sacrifices j'ai dû faire pour ne pas outrepasser des limites déjà trop reculées, et fera voir en même temps que la longueur de mon ouvrage, et les omissions qu'on y peut trouver ne sont pas tout-à-fait sans excuse. Par rapport à ces dernières, je prierai qu'on veuille bien se rappeller aussi ce que, dans l'Avertissement du deuxième volume, j'ai dit de l'inutilité qu'il y aurait à s'appesantir sur les méthodes relatives aux grandes applications. J'ai terminé celui-ci par des éclaircissemens ou des corrections pour quelques articles des volumes précédens, et par des additions concernant l'application de l'Analyse à la Géométrie dans l'espace.

Le titre de *Monsieur* ne se joignant pas au nom des savans illustres pour lesquels la postérité a commencé, j'ai dû ne plus le placer devant ceux de Lagrange et de Monge, et rappeler ainsi la perte récemment faite de deux hommes qui ont enrichi la Science d'un grand nombre de beaux résultats, et qui par l'élégance de leurs méthodes ont porté l'écriture

analytique au plus haut degré de perfection. Créateur d'une branche très remarquable et très utile de la Géométrie, Monge, en y appliquant l'Analyse, a poussé plus loin que tous ses devanciers, le sentiment et le goût de la symétrie qui a tant d'influence sur la clarté des calculs et souvent sur le succès des recherches. Ces avantages, il les dut peut-être au talent éminent avec lequel il a professé, et qu'il tirait autant de la bonté de son cœur que de la sagacité de son esprit. Sa tenue était simple et modeste, son amour de la science si vrai, si fort, si désintéressé, qu'il ne laissait pas soupçonner dans le professeur le moindre retour sur son mérite personnel; et lorsque, animé par l'intérêt que lui témoignait son auditoire, il s'abandonnait à une sorte d'admiration, je dirais presque d'enthousiasme pour les résultats qu'il semblait créer à l'instant même, jamais on n'apercevait la moindre trace du juste sentiment d'orgueil qu'auraient pu faire naître dans tout autre les difficultés qu'il avait vaincues. L'expression de la plus aimable bienveillance marquée dans tous ses traits, dans l'accent de sa voix, dans les regards pénétrans avec lesquels il cherchait sans cesse dans les yeux de ses auditeurs, s'il avait été compris; une complaisance et un zèle inépuisable pour multiplier et varier ses explications; enfin la plus heureuse facilité pour peindre par le geste ce que le crayon ne pouvait exprimer sur le tableau : de tels dons et de tels soins pouvaient-ils manquer d'inspirer aux disciples un amour que leur maître sollicitait d'une manière si touchante, et qui les entraînait irrésistiblement avec lui à travers les plus grandes difficultés ?

Long-temps avant la fondation de la première École Polytechnique, institution sans modèle comme sans rivale, à laquelle il eut la plus grande part, Monge était adoré déjà par de nombreux élèves qu'il avait formés dans le corps du Génie militaire. En étendant ses soins à la jeunesse destinée à peupler tous les services publics, et dont il ne s'est pas moins montré l'ami que le professeur, il s'est formé une immense famille d'hommes reconnaissans qui ont senti vivement sa perte et les chagrins qui l'ont avancée (*).

(*) Voyez la *Notice* publiée par M. Brisson, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et l'*Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, par M. Dupin, Capitaine au corps du Génie maritime et Membre de l'Institut.

TABLE.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

TROISIÈME PARTIE. DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.

Sommaires des Articles.	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
	Commentarii Academiæ Petropolitanæ, T. VI, VII, VIII, XII; *Novi Commentarii Acad. Petr.*, T. V, IX, XIII, XIV, XX, *Nova acta*, T. II; *Institutiones Calculi diff.*, pars post., cap. VI, VII; *Mémoires de l'Acad. de Berlin*, 1761; *Opuscula analytica*; (Euler).
	Mémoires de l'Académie des Sciences, 1717, 1727, (Nicole).
	Mémoires de l'Académie de Berlin, 1758; (Walmesley).
	Mémoires de l'Académie de Marine, T. I, (Marguerie).
	Memorie della Società Italiana, T. I, (Lorgna); T. II, part. I, (Fontana).
	Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin, T. I, (Gianella).
	Trattato delle Serie di M. A. Lorgna.
	Mathematical Lucubrations by Landen; part. IX.
	Mathematical Memoirs by Landen, T. I, Mém. 5.
	Disquisitiones analyticæ, etc. volumen I, (Pfaff).
	Philosophical Transactions, 1782, 2ᵉ partie, (Vince); 1784, 2ᵉ partie; 1786, 1ʳᵉ partie, (Waring).
	Pour la sommation des séries de *sinus* et *cosinus*, voyez *Novi Commentarii Acad. Petrop.*, T. XVII, T. XVIII, (Daniel Bernoulli, Euler et Lexell).
	Commentationes Societatis Scientiarum Gottingensis, 1808–1811, (Gauss).
	Ricerche sopra le serie e sopra la integrazione delle equazioni a differenze parziali, (Giuliano Frullani).

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

PREMIER VOLUME.

DEUXIÈME VOLUME.

TROISIÈME VOLUME.

SUPPLÉMENT à la seconde colonne de la Table initiale du premier volume.

Sommaires des Articles.		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	19	*Annales de Mathématiques*, T. IX, p. 229, (de Stainville).
		Usus logarithmorum infinitomii in theoria æquationum, (Maurice de Prasse).
	39	*Traité analytique des fluxions et fluentes*, (Muller), traduction française, p. 112.

Sommaires des Articles.		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	39	*Annales de Mathématiques*, T. I, p. 18, (Lavernède).
		Mathematical Memoirs, (Landen), T. I, p. 69.
	66	*Nova acta, Acad. Petrop.*, T. IX, p. 41, (Vega); T. XI, p. 133, (Euler).
		Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, T. II, p. 212, (Poisson).
	95	*Memorie della Società italiana*, T. V, (Canterzani).
	203	*Joh. Bernoulli Opera*, T. IV, p. 77.
		Methodus incrementorum, p. 8, (Taylor).
	237	*Mémoires de l'Acad. de Turin*, 1784-85, p. 141, 2ᵉ pagination, (Bernoulli); 1786-1787, p. 489, (Caluso).
		Memorie della Società italiana, T. XIV, p. 244, (Caluso).
		Nova acta Acad. Petrop., 1786, p. 17, (Euler).
		Annales de Mathématiques, T. V, p. 93, (Servois).
	285	*Mémoires de la classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut*, T. II, p. 14, (Burmann).
		Exercices de Calcul intégral, T. II, 5ᵉ partie, p, 224 et suiv., (Legendre).
		Annales de Mathématiques, T. V, p. 127, (Servois).
	299	*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, T. III, 1809-1810, p. 109, (Pfaff).
	374	*Annales de Mathématiques*, T. III, p. 132 et 197, (Français).
	389	*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1729, p. 194, (Nicole).
		Memorie della Società italiana, T. XVIII, p. 69, (Paolo Ruffini).
	431	*Petri Fermatii Opera varia*, p. 89.
	456	*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1749, p. 203, (Euler).

Sommaires des Articles.		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
		Journal de l'Ecole Polytechnique, XIVe cahier, p. 131, (Poisson).
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	470	*Discours sur la pesanteur*, (Huygens).
		Geometriæ pars universalis, (Jacques Grégori).
		Mémoires de l'Académie des Sciences, 1740, p. 148, (Clairaut).
		Lettres de Descartes, T. III, Lettre 57, p. 213, de l'édition latine, ou lettre 65, p. 350 de l'édition française in-4°.
	485	*Mélanges de la Société de Turin*, T. II, 172, note, (Lagrange).
	501	*Recherches sur les courbes à double courbure*, (Clairaut).
		Commentarii Acad. Petrop., T. III, (1728), p. 110, (Euler), et T. VI, 1732-33, p. 36, (Hermann).
		Nova acta Acad. Petrop., T. VIII, p. 191, (Euler).
		Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie, p. 106, (Lamé).
	542	*Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, T. I, II et III, (Binet, Bret, Brianchon, Petit, etc.).
		Annales de Mathématiques, T. III, p. 105, (Bérard).
		Philosophical Transactions, 1809, 2e partie, p. 350, (Yvory).
	572	*Développemens de Géométrie*, (Dupin).
	615	*Géométrie de Descartes*, fin du 2e livre.
		Opuscules de d'Alembert, T. VIII, p. 213.
		Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, T. III, (1809-1810), p. 91, (Fuss).

SUPPLÉMENT à la seconde colonne de la Table initiale du deuxième volume.

Sommaires des Articles.		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	4	*Annales de Mathématiques*, T. III, p. 279, (de Stainville).
	83	*Nova acta Acad. Petrop.*, T. XI, p. 37, (Pfaff).
		Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, T. III (1809-1810), p. 138, (Kausler).
	185	*Exercices de Calcul intégral*, T. I, p. 182, (Legendre).
	292	*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XVIIe cahier, p. 554, (Ampère).
	313	*Annales de Mathématiques*, T. III, p. 46, (Maurice).
	447	Pour le problème proposé par de Beaune, voyez les *Lettres de Descartes*, T. III; lettre 71, p. 295, de l'édit. latine, ou lettre 79, p. 458, de l'édition française in-4°.
	457	Pour les développées successives, voy. *Joh. Bernoulli Opera*, T. IV, p. 98; *Novi Commentarii, Acad. Petrop.*, T. X, (Euler).
		Exercices de Calcul intégral, T. II, p. 541, (Legendre).
		Annales de Mathématiques, T. IX, p. 73.
	547	*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, 1815, p. 183, ou *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, T. III, p. 291, (Poisson).
		Mémoires de l'Académie de Berlin, 1814-1815, p. 70, (Pfaff).
		Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique, 1819, p. 10, (Cauchy).
	575	*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1747, p. 216, (D'Alembert).

Sommaires des Articles.		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	604	*Sul Calcolo integrale dell' equazioni di differenze partiali con applicazioni*, (Francesco Cardinali).
	631	*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XIVe cahier, p. 367, (Poisson).
	658	*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, 1817, p. 180, (Poisson).
		Nova acta Acad. Petrop., T. IX, X et XIII, (Trembley).
		Journal de l'Ecole Polytechnique, XVIIe cahier, p. 551, (Ampère).
	690	*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1814-1815, p. 70, (Pfaff).
	755	*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, 1816, p. 82, (Poisson).

FIN DE LA TABLE.

N. B. En achevant la réimpression de cet Ouvrage, je dois faire des remercîmens publics à MM. Deflèrs, Maître de Conférences à l'Ecole Normale, et Moret, Maître de Mathématiques, qui, depuis le commencement, ont apporté un zèle soutenu dans la pénible tâche de la révision des épreuves, et m'ont fourni beaucoup de remarques utiles.

TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL.

TROISIÈME PARTIE.

DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

Du Calcul direct des Différences.

879. DANS le Calcul différentiel, nous n'avons considéré les différences entre les valeurs d'une même fonction (4), que pour déduire de leur développement, de nouvelles fonctions dérivées de la première, et qui en sont les *coefficiens différentiels*. Cette recherche ne portait que sur la forme générale des expressions des différences ou accroissemens, et non pas sur leurs valeurs numériques; mais l'examen de ces valeurs a montré que, dans un grand nombre de cas, elles suivent des lois plus simples que celles des quantités dont elles dérivent, ou au moins qu'elles

forment souvent des suites décroissantes qui se prêtent plus aisément aux approximations, et auxquelles il est par conséquent utile de ramener les quantités primitives. C'est sous ce point de vue qu'on s'est d'abord occupé du *Calcul aux différences* proprement dit.

On lui a donné le nom de *Calcul aux différences finies*, pour le distinguer du *Calcul aux différences infiniment petites;* mais la dénomination de *Calcul différentiel*, exclusivement affectée à ce dernier, et motivée comme on l'a vu (5), prévenant toute équivoque, il n'est pas nécessaire d'ajouter l'épithète *finie* aux *différences*, qui ne sauraient être confondues avec les *différentielles*.

Formation des différences. *Le but du Calcul direct aux différences est donc de déterminer les accroissemens en eux-mêmes, en les déduisant non-seulement de l'expression analytique des fonctions, mais aussi de leurs valeurs numériques ou particulières, lorsque l'expression analytique manque ou serait trop compliquée.* C'est même au second cas que se rapportent les recherches qui présentent les premières traces de ce calcul.

880. En examinant la marche des séries formées par les quarrés et les cubes des termes de la suite naturelle des nombres, on tombe déjà sur des propriétés remarquables et utiles des différences, ainsi que le montre l'explication des tableaux ci-dessous.

Quarrés.	Différenc. 1res.	Différenc. 2es.
1		
4	3	
9	5	2
16	7	2
25	9	2
36	11	2
49	13	2
etc.	etc.	etc.

Cubes.	Différenc. 1res.	Différenc. 2es.	Différenc 3es.
1			
8	7		
27	19	12	
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6
343	127	36	6
etc.	etc.	etc.	etc.

Je n'ai point fait entrer dans ces tableaux la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, etc., parce que la différence de l'un à l'autre est toujours égale à l'unité; mais à côté des quarrés j'ai placé, dans une seconde colonne, la différence entre chacun de ces nombres et celui qui le précède; puis dans une troisième colonne, la différence entre chacun des nombres de la

seconde et celui qui le précède; ces dernières sont nommées *différences secondes*, comme étant les différences des *différences premières*.

Celles-ci, formant une progression par différences, présentent déjà une loi plus simple que les nombres de la première colonne, et les autres étant constantes, offrent encore une nouvelle simplification. Une conséquence assez importante, qui s'offre d'abord, c'est qu'on peut, au moyen des seuls nombres 1, 3, 2, placés respectivement à la tête des trois colonnes du premier tableau, former, par de simples additions, la colonne des quarrés; car en ajoutant 2 à 3 on aura 5, puis 2 à 5 on aura 7, et l'on formera ainsi la seconde colonne : ajoutant ensuite 3 avec 1, on aura 4; 5 avec 4, on aura 9; et ainsi des autres quarrés.

La première colonne du second tableau contient les cubes; la deuxième, leurs différences premières; la troisième, leurs différences secondes, qui ne forment plus qu'une progression par différences; et enfin dans la quatrième colonne sont les différences des différences secondes, ou les *différences troisièmes*, qui sont constamment égales à 6. Ici, au moyen des quatre nombres 1, 7, 12 et 6, placés respectivement en tête des diverses colonnes du tableau, *on pourra former toutes ces colonnes, en commençant par celle de la droite, et en ajoutant chacun des nombres d'une même colonne avec celui qui se trouve une ligne plus haut, dans la colonne à gauche.*

Cette règle, qui n'est encore établie que sur une simple induction, et pour deux séries de nombres seulement, sera bientôt démontrée et étendue à un nombre infini de fonctions, pour lesquelles on obtient ainsi des déterminations rigoureuses.

D'un autre côté, que dans une table de logarithmes on prenne les différences entre les termes consécutifs, on trouvera des nombres qui marcheront fort inégalement, si l'on opère dans le commencement de la table, où la fonction varie beaucoup; mais en passant aux différences secondes, troisièmes, etc., on arrivera à des nombres qui deviendront fort petits et finiront par rester les mêmes, dans un intervalle plus ou moins grand. Les logarithmes suivront donc sensiblement, pendant cet intervalle, une loi analogue à celle que nous avons fait remarquer ci-dessus, par rapport aux quarrés et aux cubes, et dont on peut faire usage pour simplifier la construction de cette table.

881. Quand on a vu le parti qu'on peut tirer de la considération des différences successives, poussées jusqu'à l'ordre où elles sont constantes, soit rigoureusement, soit à très-peu près, il paraît tout simple de

chercher l'expression générale de leurs relations. Pour cela, soit

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ldots u_n,$$

une série de valeurs consécutives que reçoit une quantité, en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, ou par l'effet de celles qui arrivent à une autre quantité dont elle dépend; les chiffres inférieurs sont ici des *indices* qui font connaître le rang qu'occupe chaque valeur dans la série, en marquant le nombre de celles qui la précèdent, en sorte que la première, u, est censée répondre à l'indice o. On fait ensuite

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u \quad = \Delta u, \\ u_2 - u_1 \quad = \Delta u_1, \\ u_3 - u_2 \quad = \Delta u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1} \end{array}\right\}\ldots\ldots (1),$$

en se servant de la caractéristique Δ pour désigner l'opération de prendre la différence entre deux valeurs consécutives d'une même quantité.

Lorsque cette quantité varie par des degrés égaux, les différences Δu, Δu_1, Δu_2, etc. sont toutes égales; mais si le contraire a lieu, on fait, par analogie,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1 \quad - \Delta u \quad = \Delta.\Delta u \quad = \Delta^2 u, \\ \Delta u_2 \quad - \Delta u_1 \quad = \Delta.\Delta u_1 \quad = \Delta^2 u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} = \Delta.\Delta u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-2}, \end{array}\right\}\ldots\ldots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 \quad - \Delta^2 u \quad = \Delta.\Delta^2 u \quad = \Delta^3 u, \\ \Delta^2 u_2 \quad - \Delta^2 u_1 \quad = \Delta.\Delta^2 u_1 \quad = \Delta^3 u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_{n-2} - \Delta^2 u_{n-3} = \Delta.\Delta^2 u_{n-3} = \Delta^3 u_{n-3}, \end{array}\right\}\ldots\ldots (3),$$

etc.

Il est visible que, suivant la notation ci-dessus, la différence d'une expression quelconque s'indiquera en plaçant devant chacun de ses termes la caractéristique Δ, en sorte que

$$\Delta(u+v-w) = u_1 + v_1 - w_1 - (u+v-w) = \Delta u + \Delta v - \Delta w,$$

de même que

$$d(u+v-w) = du + dv - dw \ (7).$$

On a aussi

$$\Delta(au) \quad \text{ou} \quad \Delta . au = a(u_1 - u) = a\Delta u,$$

de même que $d.au = adu$; et les constantes isolées des variables disparaissent quand on prend la différence d'une fonction (8).

882. Au moyen de ces règles et des équations (1), on obtient pour les valeurs u_1, u_2, u_3, ... u_n, des expressions qui ne dépendent que de la valeur primordiale u et de ses différences successives Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc.; car puisque

$$\Delta u_1 = \Delta(u + \Delta u) = \Delta u + \Delta^2 u,$$

il en résulte

$$\begin{aligned} u_2 = u_1 + \Delta u_1 &= u + \Delta u + \Delta(u + \Delta u) \\ &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u; \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} u_3 = u_2 + \Delta u_2 &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u) \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u. \end{aligned}$$

La forme de ces expressions, dont les coefficiens numériques sont les mêmes que ceux du qnarré et du cube d'nn binome, fait pressentir que

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.};$$

on s'en assure aisément, en développant l'expression

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

qui donne

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u + \quad & \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.} \\ + \quad & \Delta u + \frac{n}{1}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 u + \text{etc.} \\ = u + \quad & \frac{(n+1)}{1}\Delta u + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 u + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}, \end{aligned}$$

qui prouve par conséquent que, si la loi supposée a lieu ponr l'indice n, elle aura également lieu pour l'indice $n+1$: ainsi cette loi ayant été observée sur les indices 1, 2, 3, s'étendra nécessairement à tous ceux qui suivent.

883. Il est facile de voir, par l'enchaînement des équations (1), (2)

et (5), que la différence première dépend de 2 valeurs consécutives; la différence seconde, de 3; la différence troisième, de 4, et ainsi de suite, et que l'on peut exprimer immédiatement chacune de ces différences par les valeurs dont elle dépend, sans passer par les différences des ordres inférieurs : les formules nécessaires pour cela se construiront facilement comme il suit.

Ayant d'abord

$$\Delta u = u_1 - u \quad \text{et} \quad \Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

on observera que Δu_1 doit être composé avec u_1 et u_2 comme Δu l'est avec u et u_1, c'est-à-dire qu'il suffit d'augmenter de l'unité les indices, pour passer à $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, et l'on obtiendra

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= u_2 - u_1 - (u_1 - u)\\ &= u_2 - 2u_1 + u;\end{aligned}$$

puis, comme en augmentant de l'unité les indices, dans ce dernier résultat, on forme $\Delta^2 u_1$, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= u_3 - 2u_2 + u_1 - (u_2 - 2u_1 + u)\\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u.\end{aligned}$$

Ces expressions ont encore les mêmes coefficiens que les puissances du binome, mais supposent que les deux termes soient séparés par le signe $-$: on aura donc, par analogie,

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \text{etc.},$$

et l'on s'assurera que la même loi a lieu pour l'ordre $n+1$, en considérant que

$$\Delta^{n+1} u = \Delta^n u_1 - \Delta^n u =$$

$$\left.\begin{aligned} &u_{n+1} - \frac{n}{1} u_n + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-2} + \text{etc.}\\ &\qquad - u_n + \frac{n}{1} u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} =$$

$$u_{n+1} - \frac{n+1}{1} u_n + \frac{(n+1)n}{1.2} u_{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} u_{n-2} + \text{etc.}$$

884. Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que les expressions de u_n et de $\Delta^n u$ peuvent s'écrire ainsi :

$$u_n = (1 + \Delta u)^n \quad \text{et} \quad \Delta^n u = (u - 1)^n,$$

pourvu que l'on se rappelle de changer, dans le développement de la

première de ces équations, les exposans des puissances de Δu en exposans de la caractéristique Δ, et dans la seconde, les exposans des puissances de u en indices de cette lettre. Le premier terme 1 est compris dans la loi de la première formule, parce qu'il peut être considéré comme représentant $(\Delta u)^0$, qui se change en $\Delta^0 u$, symbole équivalent à u. De même, en considérant, dans la seconde formule, que 1 représente u^0, qui doit se changer en u_0, on comprend tous les termes dans la loi énoncée.

Tels sont les premiers signes d'une analogie très-étendue et très-importante, que les différences ont avec les puissances, sur laquelle nous reviendrons dans la suite, et dont nous avons déjà fait la remarque dans les n°s 32 et 91, par rapport aux différentielles.

Quelques géomètres présentent sous la forme

$$u_n = (1 + \Delta)^n u,$$

la première des deux équations précédentes; et après le développement il n'y a plus à changer que l'acception de la lettre Δ, qui, traitée d'abord comme une quantité, devient ensuite une caractéristique d'opération.

L'expression de $\Delta^n u$ offre encore une conséquence qu'il ne faut pas omettre, c'est qu'*une suite qui a des différences constantes dans un ordre quelconque, est récurrente*, puisque la condition $\Delta^n u = 0$, répondant à l'équation

$$u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} \ldots \ldots \pm u = 0,$$

fait voir qu'un terme quelconque u_n s'exprime par les n termes qui le précèdent, affectés de coefficiens constans; mais il faut prendre garde que l'inverse de cette proposition n'est pas vraie : les suites récurrentes n'ont pas toujours des *différences constantes*.

885. Ce sont les puissances entières et positives et les fonctions rationnelles et entières d'une variable indépendante, qui jouissent de cette propriété.

En effet, soit $u = x^m$, et supposons que x augmente toujours de la même quantité h; nous aurons

$$\Delta u = (x + h)^m - x^m = \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \text{etc.},$$

résultat de la forme

$$\Delta u = mhx^{m-1} + Ah^2 x^{m-2} + Bh^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Suivant les règles du n° 881, la différence seconde sera

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= \Delta(mhx^{m-1} + Ah^2x^{m-2} + Bh^3x^{m-3} + \text{etc.}) = \\ &\Delta.mhx^{m-1} + \Delta.Ah^2x^{m-2} + \Delta.Bh^3x^{m-3} + \text{etc.} = \\ &mh\Delta.x^{m-1} + Ah^2\Delta.x^{m-2} + Bh^3\Delta.x^{m-3} + \text{etc.}\ (*);\end{aligned}$$

et en composant $\Delta.x^{m-1}$, $\Delta.x^{m-2}$, $\Delta.x^{m-3}$, etc., sur le modèle de $\Delta.x^m$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\Delta^2 u = m(m-1)h^2x^{m-2} + A'h^3x^{m-3} + B'h^4x^{m-4} + \text{etc.}$$

Sans qu'il soit besoin d'aller au-delà de ces développemens, la loi du premier terme est évidente, et l'on voit que l'expression de $\Delta^n u$ doit commencer par

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n;$$

ce qui se reconnaît également, si l'on fait attention que les différentielles ne sont autre chose que les premiers termes des différences développées suivant les puissances de l'accroissement de la variable indépendante, et que par conséquent l'expression ci-dessus est et doit être en effet celle de $d^n.x^m$, lorsqu'on change h en dx (22).

Cela posé, l'exposant de x diminuant d'une unité chaque fois que l'on effectue une différenciation suivant la caractéristique Δ, un nombre m de ces opérations successives conduira donc à une expression réduite au seul terme

$$\Delta^m u = \Delta^m.x^m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1.h^m;$$

mais cette différence étant constante, il s'ensuit que celles des ordres supérieurs sont nulles.

886. Il est aisé de conclure de là que *toute fonction rationnelle et entière de* x, *a toujours des différences constantes, savoir, celles dont l'ordre est marqué par la plus haute puissance de* x. En effet, cette fonction étant de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.},$$

on aura

$$\Delta^n(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}) = A\Delta^n.x^\alpha + B\Delta^n.x^\beta + C\Delta^n.x^\gamma + \text{etc.};$$

(*) Il ne faut pas confondre $\Delta.x^{m-1}$ avec Δx^{m-1}, parce que, de même que dans la notation différentielle, $\Delta^n.x^p = \Delta^n(x^p)$ et $\Delta^n x^p = (\Delta^n x)^p$.

et si α désigne le plus haut exposant de x, il viendra, pour le cas où $n=\alpha$,

$$\Delta^\alpha.x^\alpha=\alpha(\alpha-1)\ldots.1h^\alpha,\quad \Delta^\alpha.x^\beta=0,\quad \Delta^\alpha.x^\gamma=0,\quad \text{etc.};$$

d'où il suit que la différence de l'ordre α de la fonction proposée est constante.

887. Les calculs indiqués dans le n° 885 font déjà voir que le développement de $\Delta^n.x^m$, qui commence par la puissance n de l'accroissement h, doit contenir toutes les autres, jusqu'à celle dont l'exposant est m inclusivement; mais l'expression de $\Delta^n u$, trouvée dans le n° 883, donne tout de suite le terme général de ce développement.

En effet, la série de valeurs

$$u=x^m,\quad u_1=(x+h)^m,\quad u_2=(x+2h)^m,\ \ldots.\ u_n=(x+nh)^m,$$

conduit à

$$\Delta^n.x^m=[x+nh]^m-\frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m+\frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m+\text{etc.};$$

et si l'on désigne par i l'exposant de h dans le terme général du développement de la formule ci-dessus, l'expression de ce terme sera évidemment

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-i+1)}{1.2.3\ldots.i}x^{m-i}h^i\times$$
$$\left\{n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i+\text{etc.}\right\}.$$

Ce que nous savons déjà sur la forme de la différence cherchée, nous conduit à cette conséquence remarquable, que la fonction

$$n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i+\text{etc.}$$

est nulle tant que $i<n$, puisqu'il ne saurait y avoir, dans $\Delta^n.x^m$, aucune puissance de h inférieure au degré n.

On voit ensuite que le coefficient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-i+1)}{1.2.3\ldots.i}$$

s'évanouissant lorsque $i=m+1$, la plus haute puissance de h ne peut surpasser le degré m.

Nous remarquerons encore que $\Delta^m.x^m$ étant indépendant de x, demeure toujours égal à

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1.h^m,$$

quel que soit x; mais si on fait $n=m$ et $x=0$, dans la série des valeurs u, u_1, u_2, etc., on trouvera

$$\Delta^m.x^m=\left[m^m-\frac{m}{1}(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\text{etc.}\right]h^m;$$

d'où il suit que

$$m^m-\frac{m}{1}(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\text{etc.}=1.2.3\ldots.m,$$

résultat sur lequel nous reviendrons par la suite.

Formation des tables par les différences.

888. Il suit de la proposition démontrée dans le n° 886, que le procédé indiqué dans le n° 880, pour former les tables des quarrés et des cubes, s'étend à toutes les fonctions algébriques rationnelles et entières, et peut abréger les calculs de la résolution des équations numériques, dans laquelle on a souvent à former les valeurs successives que prend le premier membre de l'équation, quand on substitue à l'inconnue des nombres en progression par différences. On voit d'abord, par ce qui précède, que la fonction qui compose le premier membre de l'équation a des différences constantes, lorsque l'on est parvenu à l'ordre marqué par l'exposant de son degré, et qu'au moyen des premières valeurs de cette fonction et de ses différences, jusqu'à l'ordre dont il s'agit, on forme aisément la suite de ses valeurs.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0;$$

si l'on en représente le premier membre par u, et qu'on change x en $x+1$, on trouvera sans peine

$$\begin{aligned}\Delta u &= 3x^2+(3+2p)x+1+p+q,\\ \Delta^2 u &= 6x+6+2p,\\ \Delta^3 u &= 6.\end{aligned}$$

En partant de $x=0$, on aura

$$u=r,\quad \Delta u=1+p+q,\quad \Delta^2u=6+2p,\quad \Delta^3u=6\ (*);$$

et le tableau des valeurs de u correspondantes aux valeurs positives $x=1$, $=2$, $=3$, etc., se formera de même que celui des cubes (880). En prenant pour exemple $x^3-5x^2+6x-1=0$, on formera d'abord la partie comprise au-dessous des *filets gras*, dans le tableau ci-dessous

x	u	Δu	Δ^2u	Δ^3u
-5	-281			
-4	-169	112		
-3	-91	78	-34	
-2	-41	50	-28	6
-1	-13	28	-22	6
0	-1	12	-16	6
1	$+1$	2	-10	6
2	-1	-2	-4	6
3	-1	0	$+2$	6
4	$+7$	$+8$	8	6
5	29	22	14	6

Pour obtenir les valeurs de u correspondantes aux valeurs négatives $x=-1$, $=-2$, $=-3$, etc., il faut continuer le tableau en remontant, ce qui change les additions en soustractions, c'est-à-dire que la différence troisième doit être retranchée de chaque différence seconde, celle-ci de la différence première qui est sur la même ligne, et cette différence de la valeur de u qui est à côté; bien entendu qu'en effectuant ces opérations, il faut avoir égard au signe propre des quantités qu'on emploie.

On peut former, dans un tableau à part, la série des valeurs de u correspondantes aux valeurs négatives de x. Il suffit, pour cela, de calculer, dans le premier tableau, les divers nombres qui appartiennent à la ligne $x=0$, pour en former la première d'un nouveau tableau, et

(*) Il n'est pas besoin d'observer que les différences Δu, Δ^2u, Δ^3u, se déduiraient immédiatement des quatre premières valeurs de la fonction proposée (880).

opérer ensuite les soustractions comme il a été dit plus haut. C'est ainsi qu'a été construit le second tableau ci-dessous.

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
+0	−1	12	−16	6
1	+1	2	−10	6
2	−1	−2	−4	6
3	−1	0	+2	6
4	+7	+8	8	6
5	29	22	14	6

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
−0	−1	12	−16	6
−1	−13	28	−22	6
−2	−41	50	−28	6
−3	−91	78	−34	
−4	−169	112		
−5	−281			

On pourrait imaginer d'autres dispositions, plus commodes peut-être; mais ces détails de pratique ne sont pas de nature à trouver place ici : ce qui précède suffit pour montrer comment, avec les différences, on peut continuer, tant en arrière qu'en avant, une suite de nombres dont la loi est donnée.

889. C'est surtout par rapport aux fonctions transcendantes, dont le calcul approximatif est laborieux, que l'on gagne beaucoup à se servir des différences, ainsi que le fera concevoir l'exemple suivant, tiré des logarithmes.

Soit $u = \mathrm{l}x$, d'où $u_1 = \mathrm{l}(x+h)$, $u_2 = \mathrm{l}(x+2h)$, $u_3 = \mathrm{l}(x+3h)$; les formules du n° 883 donneront

$$\Delta \mathrm{l}x = \mathrm{l}(x+h) - \mathrm{l}x = \mathrm{l}\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.}\right)(Int.\ 29),$$
$$\Delta^2 \mathrm{l}x = \mathrm{l}(x+2h) - 2\mathrm{l}(x+h) + \mathrm{l}x$$
$$= \mathrm{l}\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2\mathrm{l}\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= -M\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \text{etc.}\right),$$
$$\Delta^3 \mathrm{l}x = \mathrm{l}(x+3h) - 3\mathrm{l}(x+2h) + 3\mathrm{l}(x+h) - \mathrm{l}x$$
$$= \mathrm{l}\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\mathrm{l}\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\mathrm{l}\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= M\left(\frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.}\right).$$

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible.

Si l'on avait, par exemple, $x = 10000$ et $h = 1$, il viendrait

$$u = 110000, \quad \Delta u = 0{,}00004\ 34272\ 76863,$$
$$\Delta^2 u = -\ 0{,}00000\ 00043\ 42076,$$
$$\Delta^3 u = 0{,}00000\ 00000\ 00868;$$

et si l'on ne voulait avoir les derniers résultats qu'avec 10 chiffres seulement, on pourrait négliger long-temps les différences du quatrième ordre; car il faudrait qu'elles fussent répétées un grand nombre de fois, pour influer sur la différence troisième. On formera donc successivement, comme dans le nº 880, les colonnes des différences troisièmes, secondes, premières, d'où l'on déduira les logarithmes des nombres

10001, 10002, 10003, etc.,

en partant de celui 10000, qui est égal à

4,00000 00000 00000.

Il faudrait faire les calculs avec 15 décimales, afin de reconnaître quand l'accumulation des quantités négligées pourrait commencer à influer sur le dernier chiffre qu'on se propose de conserver, ce dont on s'assurera au moyen de quelques logarithmes calculés rigoureusement à des intervalles éloignés; car lorsque, par la suite des additions successives, on sera parvenu à ces logarithmes, il faudra que la méthode des différences les donne tels qu'ils ont été déduits *à priori*, au moins dans les dix premiers chiffres, si c'est à ce nombre que l'on veut s'arrêter. Lorsque le dernier de ces chiffres cessera d'être exact, on calculera *à priori* les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, et on se servira des nouvelles valeurs comme des précédentes.

La formule

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \text{etc.} \quad (882)$$

fournit aussi le moyen d'apprécier directement l'erreur qu'occasionne, sur une valeur placée dans tel rang qu'on voudra, la suppression des différences d'un ordre donné. Dans l'exemple ci-dessus, en faisant $n = 50$, et calculant pour cette valeur celle du terme

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u,$$

en observant que $\Delta^4 1x = -M\left(\frac{6h^4}{x^4} - \text{etc.}\right)$, on trouvera qu'il n'influe

pas encore sur la dixième décimale du logarithme de 10050; il en serait à plus forte raison de même des différences des ordres supérieurs.

890. Voici d'autres expressions plus convergentes des différences premières et secondes de la fonction logarithmique. La série

$$1(n+z)=1n+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

obtenue dans le n° 31 de l'Introduction, donne, en changeant n en x et z en h,

$$\Delta 1x=2M\left\{\frac{h}{2x+h}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5+\text{etc.}\right\};$$

puis ajoutant ensemble les deux équations

$$1(x+h)=1x+M\left\{\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\text{etc.}\right\},$$
$$1(x-h)=1x-M\left\{\frac{h}{x}+\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+\frac{h^4}{4x^4}+\text{etc.}\right\},$$

il en résulte

$$1(x+h)+1(x-h)=21x-2M\left\{\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^4}{4x^4}+\frac{h^6}{6x^6}+\text{etc.}\right\}.$$

Changeant $x-h$ en x, et écrivant par conséquent $x+h$ pour x, et $x+2h$ pour $x+h$, il viendra

$$1(x+2h)-21(x+h)+1x=$$
$$-2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2}+\frac{h^4}{4(x+h)^4}+\frac{h^6}{6(x+h)^6}+\text{etc.}\right\};$$

or le premier membre étant équivalent à u_2-2u_1+u, donne $\Delta^2 u$: on a donc

$$\Delta^2 1x=-2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2}+\frac{h^4}{4(x+h)^4}+\frac{h^6}{6(x+h)^6}+\text{etc.}\right\}.$$

Lorsque x est un peu grand par rapport à h, il suffit de tenir compte des deux premiers termes de l'expression de $\Delta 1x$. En effet, quand $x=10000$ et $h=1$, le second terme, savoir, $\frac{2M}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3$ donne seulement.... 0,00000 00000 00036, et le suivant aurait 22 zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif. A l'égard de $\Delta^2 1x$, on peut se borner au premier terme; car le second, $\frac{M}{2}\frac{h^4}{(x+h)^4}$, se réduit à 0,00000 00000 00000 0217.

Il suit de là qu'en désignant par N un nombre au-dessus de 10000, on a, avec une fort grande exactitude,

$$\Delta\,\mathrm{l}N = 2M\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}\right),$$
$$\Delta^2\mathrm{l}N = -\frac{M}{(N+1)^2};$$

quant à la différence troisième, on aurait le premier terme de sa valeur, en différenciant $\Delta^2\mathrm{l}N$ et faisant $\mathrm{d}N = 1$, ce qui donnerait $\frac{2M}{(N+1)^3}$. On voit par là que la valeur de $\Delta^3\mathrm{l}N$ deviendra bientôt assez petite pour qu'on puisse la négliger; et rien ne sera alors plus facile que de construire une table de logarithmes d'après ce qui vient d'être dit. Au reste, si l'on voulait plus de détails sur ce sujet, il faudrait consulter un Mémoire de M. Delambre, imprimé parmi ceux de l'Académie de Turin, pour les années 1790-91, d'où nous avons tiré ce qui précède, et duquel nous extrairons encore ce qui regarde les différences des fonctions circulaires.

891. Les différences de la fonction a^x ont toutes une même forme, remarquable par sa simplicité. On trouve successivement

$$\Delta\,.a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$
$$\Delta^2.a^x = (a^h - 1)\Delta.a^x = a^x(a^h - 1)^2,$$

d'où, en général,

$$\Delta^n.a^x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a^x(a^h - 1)^n.$$

On obtiendra tout aussi simplement le développement de $\Delta^n.a^x y$, y étant une fonction quelconque de x; on aura d'abord l'équation

$$\Delta.a^x y = (y + \Delta y)a^{x+h} - ya^x = a^x[(a^h - 1)y + a^h\Delta y],$$

et faisant $(a^h - 1)y + a^h\Delta y = y'$, il viendra

$$\Delta^2.a^x y = \Delta.a^x y' = a^x[(a^h - 1)y' + a^h\Delta y'];$$

puis posant $(a^h - 1)y' + a^h\Delta y' = y''$, on en tirera

$$\Delta^3.a^x y = \Delta.a^x y'' = a^x[(a^h - 1)y'' + a^h\Delta y''],$$
etc.;

chassant ensuite y', y'', etc., après avoir fait, pour simplifier, $a^h = \alpha$,

on trouvera

$$\Delta^2.a^x y = a^x[(a-1)^2 y + 2(a-1)\,a\Delta y + a^2\Delta^2 y];$$
$$\Delta^3.a^x y = a^x[(a-1)^3 y + 3(a-1)^2 a\Delta y + 3(a-1)a^2\Delta^2 y + a^3\Delta^3 y],$$

et en général,

$$\Delta^n.a^x y = a^x[(a-1)^n y + \tfrac{n}{1}(a-1)^{n-1}a\Delta y + \tfrac{n(n-1)}{1.2}(a-1)^{n-2}a^2\Delta^2 y \ldots + a^n\Delta^n y].$$

892. Les formules connues

$$\sin A - \sin B = \quad 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$\cos A - \cos B = -\,2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$

donnent

$$\Delta\sin x = \sin(x+h) - \sin x = \quad 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos\tfrac{1}{2}(2x+h),$$
$$\Delta\cos x = \cos(x+h) - \cos x = -\,2\sin\tfrac{1}{2}h\sin\tfrac{1}{2}(2x+h);$$

d'où il suit

$$\Delta^2\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\,[\cos\tfrac{1}{2}(2x+3h) - \cos\tfrac{1}{2}(2x+h)]$$
$$= -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin\tfrac{1}{2}(2x+2h) = -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+h).$$

En poursuivant ainsi, on arrivera aux formules générales

$$\Delta^{4i}\sin x = \quad 2^{4i}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i}\sin\tfrac{1}{2}(2x+4ih),$$
$$\Delta^{4i+1}\sin x = \quad 2^{4i+1}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+1}\cos\tfrac{1}{2}[2x+(4i+1)h],$$
$$\Delta^{4i+2}\sin x = -\,2^{4i+2}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+2}\sin\tfrac{1}{2}[2x+(4i+2)h],$$
$$\Delta^{4i+3}\sin x = -\,2^{4i+3}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+3}\cos\tfrac{1}{2}[2x+(4i+3)h],$$

renfermées dans les deux suivantes :

$$\Delta^{2n}\sin x = \pm\,2^{2n}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{2n}\sin\tfrac{1}{2}(2x+2nh),$$
$$\Delta^{2n+1}\sin x = \pm\,2^{2n+1}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{2n+1}\cos\tfrac{1}{2}[2x+(2n+1)h],$$

dans lesquelles il faut prendre le signe $+$ lorsque n est un nombre pair, et le signe $-$ dans le cas contraire.

893. Les formules ci-dessus sont déjà très-commodes ; mais M. Legendre est parvenu à quelque chose de plus simple encore, en exprimant les différences de l'ordre n par celles de l'ordre $n-1$ et de l'ordre $n-2$, au moyen de cette équation :

$$\Delta^n\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\{\Delta^{n-1}\sin x + \Delta^{n-2}\sin x\}.$$

Pour en prouver la vérité, nous ferons d'abord $n = 2i - 1$ dans l'expression de $\Delta^{2n} \sin x$ du numéro précédent; et il viendra

$$\Delta^{4i-2}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2} \quad \sin[x+(2i-1)h] \qquad (1);$$

puis prenant les différences première, seconde, troisième et quatrième de cette équation, en observant que le facteur $(2\sin\frac{1}{2}h)^{4i-2}$ est constant (881), nous aurons

$$\Delta^{4i-1}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta\sin[x+(2i-1)h] \qquad (2),$$
$$\Delta^{4i}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^2\sin[x+(2i-1)h] \qquad (3),$$
$$\Delta^{4i+1}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^3\sin[x+(2i-1)h] \qquad (4),$$
$$\Delta^{4i+2}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^4\sin[x+(2i-1)h] \qquad (5).$$

Multiplions maintenant par $-(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, la somme des équations (1) et (2), en faisant, pour abréger, $x+(2i-1)h=x'$; nous aurons

$$-(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\{\Delta^{4i-1}\sin x+\Delta^{4i-2}\sin x\} = (2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i}(\sin x' + \Delta\sin x');$$

or, $\quad \sin x' + \Delta\sin x' = \sin(x'+h) = \sin(x+2ih),$

et $\quad (2\sin\frac{1}{2}h)^{4i}\sin(x+2ih) = \Delta^{4i}\sin x:$

donc $\quad \Delta^{4i}\sin x = -(2\sin\frac{1}{2}h)^2(\Delta^{4i-1}\sin x + \Delta^{4i-2}\sin x).$

Si l'on traite de la même manière les expressions de $\Delta^{4i-1}\sin x$ et de $\Delta^{4i}\sin x$, on trouvera que leur somme multipliée par $-(2\sin\frac{1}{2}h)^2$ est égale à $\Delta^{4i+1}\sin x$ (892); il en sera de même des expressions de $\Delta^{4i}\sin x$ et de $\Delta^{4i+1}\sin x$, par rapport à $\Delta^{4i+2}\sin x$, enfin de celles de $\Delta^{4i+1}\sin x$ et de $\Delta^{4i+2}\sin x$, à l'égard de $\Delta^{4i+3}\sin x$. Dans tous ces calculs, il faut prendre chaque différence avec le signe dont elle est affectée; et comme les quatre résultats indiqués comprennent les diverses variations qu'il peut y avoir dans ces signes, l'équation posée au commencement de cet article se trouve démontrée pour tous les cas.

894. L'expression générale $u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_1 + \Delta u + \Delta^2 u$ donne

$$\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

lorsqu'on y met pour $\Delta^2\sin x$ sa valeur du n° 892. Cette formule est très-

expéditive pour calculer des tables de sinus; car en faisant successivement $x=0°$, $x=1°$, $x=2°$, etc., et prenant $h=1°$, on aura

$$\sin 2° = \sin 1° + (\sin 1° - \sin 0°) - \sin 1°(2\sin 30')^2,$$
$$\sin 3° = \sin 2° + (\sin 2° - \sin 1°) - \sin 2°(2\sin 30')^2,$$
$$\sin 4° = \sin 3° + (\sin 3° - \sin 2°) - \sin 3°(2\sin 30')^2,$$
etc.,

et il ne sera besoin de calculer par la série

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc. } (\textit{Int. } 39),$$

que le sinus de 30′ et celui de 1°, pour lesquels cette série est très-convergente. Si l'on forme ensuite les produits des neuf premiers nombres par le terme constant $(2\sin 30')^2$, il ne restera plus à effectuer que de simples additions et soustractions. En calculant avec treize décimales, l'erreur, suivant M. Delambre, n'irait qu'à 0,00000 00000 06 sur le sinus de 60°. Passé ce terme, les sinus s'obtiendront par la formule

$$\sin(60° + A) = \sin(60° - A) + \sin A;$$

et l'on aura, pour se vérifier dans l'intervalle, les sinus suivans :

$$\sin 15° = \sqrt{\tfrac{3}{8}} - \sqrt{\tfrac{1}{8}}, \quad \sin 18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}, \quad \sin 30° = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \sin 54° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}, \quad \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

En écrivant $x - 1'$, $x - 10''$, au lieu de x, dans la formule

$$\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

et faisant $h = 1'$, $h = 10''$, on aura ces deux équations

$$\sin(x + 1') = \sin x + [\sin x - \sin(x - 1')] - \sin x(2\sin 30'')^2,$$
$$\sin(x + 10'') = \sin x + [\sin x - \sin(x - 10'')] - \sin x(2\sin 5'')^2,$$

qui serviront à calculer les sinus, de minute en minute et de dix secondes en dix secondes, lorsqu'on aura obtenu, par la série rapportée ci-dessus, les valeurs de $\sin 1'$ et de $\sin 30''$, celles de $\sin 10''$ et de $\sin 5''$.

L'équation dont nous venons de faire usage peut être retournée ainsi :

$$\sin x = \sin(x+h) - [\sin(x+2h) - \sin(x+h)] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

et devient

$$\sin(x-2h)=\sin(x-h)-[\sin x-\sin(x-h)]-\sin(x-h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

par la substitution de $x-2h$, au lieu de x; dans cet état, elle donnerait successivement les sinus, en partant de l'arc de 90° et en allant vers 0°.

895. La manière d'employer la formule

$$\Delta^n\sin x=-\left(2\sin\tfrac{1}{2}h\right)^2\{\Delta^{n-1}\sin x+\Delta^{n-2}\sin x\}$$

n'est pas difficile à trouver. En partant d'abord de 0°, pour passer à un arc très-petit, que je supposerai représenté par h, les expressions de $\Delta\sin x$ et de $\Delta^2\sin x$ donneront d'abord

$$\Delta\sin 0^\circ = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos\tfrac{1}{2}h,$$
$$\Delta^2\sin 0^\circ = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin h.$$

Ces deux différences étant calculées, on aura $\sin h$ et $\sin 2h$; puis formant les produits des neuf premiers nombres par le facteur constant $(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, on tirera des équations

$$\Delta^3\sin 0^\circ=-\left(2\sin\tfrac{1}{2}h\right)^2\{\Delta\sin 0^\circ+\Delta^2\sin 0^\circ\},$$
$$\Delta^4\sin 0^\circ=-\left(2\sin\tfrac{1}{2}h\right)^2\{\Delta^2\sin 0^\circ+\Delta^3\sin 0^\circ\},$$
etc.,

par de simples additions et soustractions, les valeurs des différences successives de $\sin 0^\circ$, au moyen desquelles on formera celles de $\sin 3h$, $\sin 4h$, etc. (880).

C'est par des procédés semblables qu'ont été calculées, dans les bureaux du Cadastre, les grandes tables des sinus naturels, avec 25 décimales, pour les 10000èmes parties du quart de cercle (*).

(*) Ce beau travail, effectué sous la direction de M. Prony, à l'occasion de l'établissement du *système métrique décimal*, et auquel M. Legendre a concouru, comme on vient de le voir, n'a pas été imprimé, mais deux copies bien collationnées ont été déposées à l'Observatoire de Paris, dans les Archives du Bureau des Longitudes. Le rapport qui en fut fait à l'Institut, en l'an IX (1801), est surtout curieux, parce qu'il montre l'utilité de la division du travail appliquée à l'exécution des calculs les plus longs et les plus difficiles.

Les tangentes se déduisent si facilement des sinus et des cosinus, qu'il est inutile de recourir à d'autres formules; d'ailleurs leurs différences ne se présentent pas sous une forme commode, et puis dès qu'on les a jusqu'à 45°, on obtient celles des arcs suivans par l'équation

$$\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}A) = 2\,\text{tang}\,A + \text{tang}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}A).$$

Les sécantes se déduisent sans peine de la formule

$$\text{séc}\,A = \text{tang}\,(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}A) \mp \text{tang}\,A.$$

896. Nous passerons donc au calcul des logarithmes des sinus; nous observerons d'abord que la formule $\sin\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin A}{2\cos\frac{1}{2}A}$ donne tous ceux des sinus des arcs moindres que 45°, par le moyen de ceux des sinus des arcs compris entre 45° et 90°. Pour obtenir ces derniers de degré en degré, M. Delambre propose la série

$$\text{l}\sin(x+h) = \text{l}\sin x + 2M\left\{\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x}\right]^3 + \text{etc.}\right\},$$

qui se déduit de la série

$$\text{l}(n+z) = \text{l}\,n + 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

(*Int.* 51), en faisant $n = \sin x$, et $n+z = \sin(x+h)$, d'où il résulte $z = \sin(x+h) - \sin x$. En mettant $\Delta\sin x$ au lieu de z, on aura

$$\text{l}\sin(x+h) = \text{l}\sin x + 2M\left\{\frac{\Delta\sin x}{2\sin x + \Delta\sin x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta\sin x}{2\sin x + \Delta\sin x}\right)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

Si l'on prend $x = 45^\circ$ et $h = 1^\circ$, on aura pour le sinus de 46° une série très-convergente, et qui le deviendra de plus en plus à mesure qu'on avancera vers 90°, parce que la différence $\Delta\sin x$ va toujours en diminuant : quant au sinus de 45°, son logarithme est $\frac{1}{2}\text{l}\frac{1}{2}$ (*).

(*) Nous ne pouvons passer sous silence une série très-simple, propre à donner le logarithme du cosinus lorsque l'arc est très-petit, et que M. Delambre a fait remarquer le premier. On sait que

$$\text{l}(1-x^2) = -M\left\{x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^6 + \text{etc.}\right\} \quad (\textit{Int. } 29).$$

Si l'on change x en $\sin x$, on aura $1 - x^2 = \cos x^2$, $\text{l}(1-x^2)$ deviendra $\text{l}\cos x^2$ ou $2\text{l}\cos x$, et on obtiendra par conséquent

$$\text{l}\cos x = -M\left\{\tfrac{1}{2}\sin x^2 + \tfrac{1}{4}\sin x^4 + \tfrac{1}{6}\sin x^6 + \text{etc.}\right\}.$$

Les différences successives de $\mathrm{l}\sin x$, déduites de la formule ci-dessus, ne se présentent pas sous une forme assez commode pour être employées dans la pratique; mais lorsqu'il ne faudra que calculer des valeurs comprises dans un petit intervalle, on pourra se borner au premier ou, tout au plus, aux deux premiers termes de cette différence, conclue du développement de $\mathrm{l}\sin(x+h)$ par le théorème de Taylor, termes qui seront

$$M\left[\cot x\,\frac{h}{1}-(1+\cot x^2)\frac{h^2}{1.2}\right],$$

puisque

$$\frac{d.\mathrm{l}\sin x}{dx}=M\,\frac{\cos x}{\sin x}=M\cot x,$$

$$\frac{d^2.\mathrm{l}\sin x}{dx^2}=-M\,\frac{1}{\sin x^2}=-M\,\frac{\sin x^2+\cos x^2}{\sin x^2}=-M(1+\cot x^2).$$

Quand on ne se propose que de vérifier des tables déjà calculées, ou de les corriger, on peut donner à l'expression de $\mathrm{l}\sin(x+h)$ une forme qui permette d'employer, au lieu des sinus naturels, les logarithmes contenus dans les tables. En effet,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x}=\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}(x+h-x)}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}(x+h+x)}=\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}h}{\mathrm{tang}(x+\frac{1}{2}h)}=\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}h\cot(x+\tfrac{1}{2}h);$$

on aura donc

$$\mathrm{l}\sin(x+h)=\mathrm{l}\sin x+\frac{2M}{1}\,\mathrm{tang}\,\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{2M}{3}\left[\mathrm{tang}\,\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]^3$$
$$+\frac{2M}{5}\left[\mathrm{tang}\,\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]^5+\text{etc.}$$

Les termes de cette formule étant des fractions assez petites, pour les mettre en nombres, on se servira des logarithmes des tangentes et des cotangentes, donnés par les tables proposées, parce que l'erreur qui pourrait se trouver dans les dernières décimales de ces logarithmes ne sera d'aucune conséquence par rapport aux résultats. C'est ainsi que M. Delambre a relevé plusieurs inexactitudes dans les grandes tables de Wlacq.

897. La formule — De l'interpolation.

$$u_n=u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u+\text{etc. }832$$

a la propriété de lier algébriquement, avec l'indice du rang qu'ils occupent,

les différens termes d'une série de nombres donnés,

$$u,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots u_n,$$

sans connaître la fonction dont ils sont les valeurs.

En effet, si dans cette expression, où les différences Δu, $\Delta^2 u$, etc. sont des nombres connus, on regarde n comme une variable indéterminée, et qu'on la remplace en conséquence par x, on aura une fonction jouissant de la propriété de prendre successivement les $n+1$ valeurs $u, u_1, \ldots u_n$, lorsqu'on y fera $x=0$, $=1$, $\ldots =n$, et qui fournira de plus tant de valeurs qu'on voudra, soumises à la même loi, en donnant à x des valeurs différentes de celles que l'on vient d'indiquer.

Soient, par exemple, les nombres

$$3,\quad 7,\quad 19;$$

en prenant leurs différences successives, on trouve

$$u=3,\quad \Delta u=4,\quad \Delta^2 u=8,$$

et il vient

$$u_x = 3+4x+4x(x-1) = 3+4x^2,$$

expression qui, lorsqu'on fait $x=0$, $=1$, $=2$, rend les trois nombres donnés, et de laquelle on en tirerait une infinité d'autres liés aux premiers par une même loi algébrique. On voit aussi que, par cette opération, les nombres donnés sont incorporés dans une série dont les différences secondes sont constantes, et dont le terme général est $3+4x^2$.

898. Ceci conduit naturellement à l'*interpolation*, qui consiste *à insérer entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujétis à la même loi que les premiers*. Insérer des moyens entre deux termes d'une progression par différences ou d'une progression par quotiens, c'est calculer des termes qui répondraient à des valeurs fractionnaires de l'indice, c'est *interpoler*.

Dans la progression par différences

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta, \ldots\ldots a+(n-1)\delta,$$

le terme moyen entre $a+\delta$ et $a+2\delta$, répondrait à $n=\frac{3}{2}$ et serait par conséquent

$$a+\tfrac{3}{2}\delta.$$

Dans la progression par quotiens

$$1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4, \ldots\ldots a^n,$$

où les exposans tiennent lieu d'indices, on insérerait deux moyens entre a^3 et a^4, en faisant successivement $n=3+\frac{1}{3}$, $=3+\frac{2}{3}$, ce qui donnerait dans cet intervalle les termes

$$a^3,\quad a^{3+\frac{1}{3}},\quad a\quad ,\quad a^4,$$

formant une nouvelle progression dont la raison serait $a^{\frac{1}{3}}$.

La même opération s'effectuerait par l'expression de u_x, formée ainsi qu'il vient d'être dit, si cette expression pouvait être regardée comme le terme général de la série à laquelle appartiennent les nombres donnés; mais c'est ce qui n'a lieu qu'avec des restrictions que nous allons faire connaître. Le problème général de *trouver une fonction de* x *qui devienne successivement chacun des* $n+1$ *nombres donnés, lorsqu'on y met pour* x, *les valeurs* 0, 1, 2, 3....n, est indéterminé par sa nature; car on peut satisfaire à ces conditions avec des fonctions très-diverses, pourvu qu'elles renferment un nombre de constantes arbitraires suffisant pour vérifier les équations qui en résultent.

Cela revient à déterminer l'équation d'une courbe, par la seule condition de passer par un nombre $n+1$ de points donnés, ce qui ne saurait s'effectuer complètement, à moins que l'équation ne soit donnée d'espèce, puisqu'on peut trouver des courbes très-différentes qui se coupent en tel nombre de points que l'on voudra; telles seraient les courbes FGH et CDE, *fig.* 1, qui n'auraient de commun que les points donnés M, M_1, M_2, M_3, etc., et qui différeraient d'ailleurs beaucoup dans l'intervalle de l'un de ces points au suivant. FIG. 1.

Si l'on développe suivant les puissances de x l'expression

$$u_x = u + \frac{x}{1}\,\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\,\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,\Delta^3 u + \text{etc.},$$

elle prendra la forme

$$u_x = u + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots\ldots + \nu x^n,$$

et les coefficiens α, β, γ,..... ν, ne dépendront que des différences données Δu, $\Delta^2 u$, ... $\Delta^n u$. On voit alors que u_x est l'ordonnée d'une courbe du genre parabolique, assujétie à passer par $n+1$ points donnés; mais sans sortir même de ce genre de courbes, on aurait pu varier la forme de l'expression de u_x.

En posant, par exemple, $u_x = u + Ax + Bx^3$, et déterminant les coefficiens u, A et B, pour que u_x devienne 3, 7, 19, lorsque $x=0$, $=1$, $=2$, on trouverait

$$u_x = 3 + \tfrac{8}{3}x + \tfrac{4}{3}x^3,$$

formule très-différente de celle que nous avons obtenue dans le n° précédent, par les mêmes conditions.

Si la courbe parabolique correspondante à l'expression générale de u_x rapportée ci-dessus n'est pas la seule qui puisse passer par les $n+1$ points donnés, elle est au moins la plus simple, et la théorie des osculations (218, 229) fait voir que de pareilles courbes peuvent, dans un petit espace, approcher sensiblement d'une courbe quelconque, principalement lorsqu'il ne se trouve pas de points singuliers dans cet espace (230); et cela, parce que, excepté pour des cas particuliers, une fonction qui ne devient pas infinie lorsque sa variable est nulle (86), peut se développer suivant les puissances entières et positives de cette variable, dans une série qui sera convergente si la variable ne prend qu'une valeur très-petite, et qu'ainsi, dans cet intervalle, une telle fonction suit sensiblement la loi des fonctions rationnelles et entières qui ont des différences constantes (886).

899. La formule précédente suppose que la différence des valeurs données de x soit l'unité, et qu'elles commencent par zéro; on change aisément ces circonstances, en observant que si

$$u=f(a), \quad u_1=f(a+h), \ldots\ldots u_n=f(a+nh),$$

et qu'on fasse

$$a+nh=x, \quad \text{d'où} \quad n=\frac{x-a}{h},$$

il en résultera

$$u_n=u_x=u+\frac{x-a}{h}\frac{\Delta u}{1}+\frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u}{1.2}+\text{etc.},$$

expression dans laquelle la première valeur u répond à $x=a$, et les autres suivent, à des intervalles marqués par h.

En posant, pour abréger,

$$x-a=h' \quad \text{et} \quad u_x-u=\Delta' u,$$

on aura cette formule très-générale et très-simple,

$$\Delta' u=\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{1.2h^2}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{1.2.3h^3}\Delta^3 u+\text{etc.},$$

qui fera connaître la différence $\Delta' u$ entre u_x et u, pour un intervalle h'.

900. Avant d'aller plus loin, nous en montrerons l'usage par un exemple tiré des tables de logarithmes. Supposons qu'on veuille obtenir

le logarithme ordinaire de 3,1415926536, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales; on regardera les logarithmes contenus dans cette table comme les valeurs données de la fonction u_x, les nombres comme celles de x, et on formera le tableau suivant :

Nombres.	Logarithmes.	Différ. 1res.	Différ. 2e.	Différ. 3e.	Différ. 4e.
3,14	0,4969296481				
3,15	0,4983105538	13809057			
3,16	0,4996870826	13765288	—43769		
3,17	0,5010592622	13721796	—43492	+277	
3,18	0,5024271200	13678578	—43218	+274	—3

d'après lequel les différences vont en décroissant, ce qui rend convergente l'expression de $\Delta' u$; et comme, en prenant quelques logarithmes consécutifs de plus, on trouverait encore —3 pour la différence quatrième, il s'ensuit que pendant cet intervalle l'expression de $\Delta' u$ doit rigoureusement se terminer au quatrième terme, lorsqu'on s'arrête à 10 chiffres décimaux.

Par le tableau ci-dessus on a

$$u = 0{,}4969296481,$$
$$\Delta u = +0{,}0013809057, \quad \Delta^2 u = -0{,}0000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0{,}0000000277, \quad \Delta^4 u = -0{,}0000000003;$$

et comme $h = 0{,}01$, $h' = 0{,}0015926536$,

on obtiendra

$$\frac{h'}{h} = 0{,}15926536, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \tfrac{1}{2} = -0{,}42036732,$$
$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \tfrac{2}{3} = -0{,}61357821, \quad \frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \tfrac{3}{4} = -0{,}71018366.$$

Avec ces valeurs il sera très-facile de mettre en nombres la formule

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h}\Delta^4 u,$$

qui donnera $\Delta' u = 0{,}0002202245$, et par conséquent

$$l\,3{,}1415926536 = 0{,}4971498726.$$

901. L'origine des indices, c'est-à-dire l'indice 0, peut se placer où

l'on veut : ainsi lorsqu'aux indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots n;$$

répond la série de valeurs

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ldots u_n,$$

si l'on diminue tous les indices de m unités, ils deviendront

$$-m,\ -(m-1),\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots n-m$$

et les valeurs correspondantes s'écriront ainsi :

$$u_{-m},\quad u_{-(m-1)},\ldots\ldots u_{-2},\quad u_{-1},\ u,\ u_1,\ u_2,\ldots\ldots u_{n-m}.$$

Les indices moindres que m deviendront négatifs, mais l'ordre de succession des u n'étant pas troublé, la formule du n° 882 aura encore lieu, en y changeant

$$\Delta u,\ \Delta^2 u,\ \Delta^3 u,\ \text{etc.},\quad \text{en}\quad \Delta u_{-m},\ \Delta^2 u_{-m},\ \Delta^3 u_{-m},\ \text{etc.};$$

et n en $n+m$, pour que l'indice n soit compté à partir du zéro actuel.

L'origine des indices serait placée symétriquement, si elle était au milieu de l'intervalle embrassé par l'ensemble des valeurs données; mais il faut alors distinguer le cas où le nombre de ces valeurs est impair, de celui où il est pair. Dans le premier, l'origine des indices tombe sur la quantité moyenne, de chaque côté de laquelle se groupent symétriquement les autres valeurs et leurs différences, lorsqu'on les écrit comme on le voit plus bas, où chaque différence est placée au-dessous et entre les quantités dont elle dérive.

Les indices étant

$$\text{etc.},\ -4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ \text{etc.},$$

les valeurs de u_x et leurs différences seront désignées par

$$\text{etc.}\ u_{-4}\quad u_{-3}\quad u_{-2}\quad u_{-1}\quad u\quad u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4\ \text{etc.}$$
$$\Delta u_{-4}\quad \Delta u_{-3}\quad \Delta u_{-2}\quad \Delta u_{-1}\quad \Delta u\quad \Delta u_1\quad \Delta u_2\quad \Delta u_3$$
$$\Delta^2 u_{-4}\quad \Delta^2 u_{-3}\quad \Delta^2 u_{-2}\quad \Delta^2 u_{-1}\quad \Delta^2 u\quad \Delta^2 u_1\quad \Delta^2 u_2$$
$$\Delta^3 u_{-4}\quad \Delta^3 u_{-3}\quad \Delta^3 u_{-2}\quad \Delta^3 u_{-1}\quad \Delta^3 u\quad \Delta^3 u_1$$
$$\Delta^4 u_{-4}\quad \Delta^4 u_{-3}\quad \Delta^4 u_{-2}\quad \Delta^4 u_{-1}\quad \Delta^4 u$$
$$\Delta^5 u_{-4}\quad \Delta^5 u_{-3}\quad \Delta^5 u_{-2}\quad \Delta^5 u_{-1}$$
$$\Delta^6 u_{-4}\quad \Delta^6 u_{-3}\quad \Delta^6 u_{-2}$$
$$\Delta^7 u_{-4}\quad \Delta^7 u_{-3}$$
$$\Delta^8 u_{-4}.$$

Ne considérons d'abord que les trois valeurs u_{-1}, u, u_1, et arrêtons-nous en conséquence aux différences secondes que nous supposerons constantes. En prenant les quantités h et h' à partir de u, la formule du n° 899 donnera, à cause que $h=1$, et $\Delta^2 u = \Delta^2 u_{-1}$,

$$\begin{aligned} u_x &= u + \frac{h'}{1}\Delta u + \frac{h'(h'-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-1} \\ &= u + \frac{h'}{1}\left\{\Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u_{-1}\right\} + \frac{h'^2}{2}\Delta^2 u_{-1}; \end{aligned}$$

mais

$$\Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u_{-1} = \frac{2\Delta u - \Delta^2 u_{-1}}{2} = \frac{\Delta u + \Delta u - \Delta^2 u_{-1}}{2} = \frac{\Delta u + \Delta u_{-1}}{2};$$

donc

$$\begin{aligned} u_x = u &+ \frac{h'}{1}\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} \\ &+ \frac{h'^2}{1.2}\Delta^2 u_{-1}. \end{aligned}$$

Supposons ensuite cinq valeurs, u_{-2}, u_{-1}, u, u_1, u_2, ce qui nous mènera aux différences quatrièmes, qu'il faudra traiter comme constantes; en posant $\Delta^4 u = \Delta^4 u_{-1} = \Delta^4 u_{-2}$; nous aurons

$$\begin{aligned} u_x = u + \frac{h'}{1}\Delta u &+ \frac{h'(h'-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}\Delta^3 u \\ &+ \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_{-2}. \end{aligned}$$

En mettant dans cette expression $\Delta^2 u_{-1} + \Delta^3 u_{-1}$, au lieu de $\Delta^2 u$; $\Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-2}$, au lieu de $\Delta^3 u$, nous trouverons d'abord

$$\begin{aligned} u_x = u &+ \frac{h'}{2}(\Delta u + \Delta u_{-1}) + \frac{h'^2}{2}\Delta^2 u_{-1} \\ &+ \frac{h'(h'-1)}{1.2}\left\{\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\left(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-2} + \frac{h'-3}{4}\Delta^4 u_{-2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ce qui est entre les accolades, dans la dernière ligne, peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{h'-2}{3}\right)\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\left(1+\frac{h'-3}{4}\right)\Delta^4 u_{-2} = \frac{h'+1}{3}\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\,\frac{h'+1}{4}\Delta^4 u_{-2} \\ &= \frac{h'+1}{3}\left\{\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{4}\Delta^4 u_{-2}\right\} = \frac{h'+1}{3}\,\frac{2\Delta^3 u_{-1} + 2\Delta^3 u_{-1} - 2\Delta^4 u_{-2} + h'\Delta^4 u_{-2}}{4} \\ &= \frac{h'+1}{3}\left\{\frac{\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2}}{2}\right\} + \frac{h'(h'+1)}{3.4}\Delta^4 u_{-2}; \end{aligned}$$

et de là on conclut

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} + \frac{h'(h'-1)(h'+1)}{1.2.3}\,\frac{(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})}{2}$$
$$+ \frac{h'^2}{1.2}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{h'^2(h'-1)(h'+1)}{1.2.3.4}\,\Delta^4 u_{-2}.$$

C'est sans doute par une induction à peu près semblable, que Stirling a trouvé la formule suivante :

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} + \frac{h'(h'^2-1)}{1.2.3}\,\frac{(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})}{2}$$
$$+ \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5}\,\frac{(\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3})}{2} + \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}\,\frac{(\Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4})}{2}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \frac{h'^2}{1.2}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{h'^2(h'^2-1)}{1.2.3.4}\,\Delta^4 u_{-2} + \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\,\Delta^6 u_{-3}$$
$$+ \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7.8}\,\Delta^8 u_{-4} + \text{etc.},$$

qu'il n'a pas démontrée, mais qui le sera d'une manière très-générale et très-simple, dans le chapitre IV.

Stirling a fait, pour abréger,

$$\begin{array}{ll}
\Delta u + \Delta u_{-1} = B, & \Delta^2 u_{-1} = b, \\
\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2} = C, & \Delta^4 u_{-2} = c, \\
\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3} = D, & \Delta^6 u_{-3} = d, \\
\Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4} = E, & \Delta^8 u_{-4} = e, \\
\text{etc.,} &
\end{array}$$

ce qui donne

$$u_x = u + \frac{Bh' + bh'^2}{1.2}$$
$$+ \frac{2Ch' + ch'^2}{1.2}\,\frac{h'^2-1}{3.4}$$
$$+ \frac{3Dh' + dh'^2}{1.2}\,\frac{h'^2-1}{3.4}\,\frac{h'^2-4}{5.6}$$
$$+ \frac{4Eh' + eh'^2}{1.2}\,\frac{h'^2-1}{3.4}\,\frac{h'^2-4}{5.6}\,\frac{h'^2-9}{7.8}$$
$$+ \text{etc.}$$

902. Lorsque le nombre des quantités données est pair, on place l'origine des indices au milieu de l'intervalle qui sépare les deux quantités moyennes; et pour éviter les indices fractionnaires, on met entre

ces nombres une différence de deux unités, comme on le voit à la tête du tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\text{etc.}\ -7, & & -5, & & -3, & & -1, & 0, & +1; & & +3, & & +5, & & +7,\ \text{etc.,} \\
\text{etc.}\ u_{-7} & & u_{-5} & & u_{-3} & & u_{-1} & & u_1 & & u_3 & & u_5 & & u_7\ \text{etc.;} \\
& \Delta u_{-7} & & \Delta u_{-5} & & \Delta u_{-3} & & \Delta u_{-1} & & \Delta u_1 & & \Delta u_3 & & \Delta u_5 & \\
& & \Delta^2u_{-7} & & \Delta^2u_{-5} & & \Delta^2u_{-3} & & \Delta^2u_{-1} & & \Delta^2u_1 & & \Delta^2u_3 & & \\
& & & \Delta^3u_{-7} & & \Delta^3u_{-5} & & \Delta^3u_{-3} & & \Delta^3u_{-1} & & \Delta^3u_1 & & & \\
& & & & \Delta^4u_{-7} & & \Delta^4u_{-5} & & \Delta^4u_{-3} & & \Delta^4u_{-1} & & & & \\
& & & & & \Delta^5u_{-7} & & \Delta^5u_{-5} & & \Delta^5u_{-3} & & & & & \\
& & & & & & \Delta^6u_{-7} & & \Delta^6u_{-5} & & & & & & \\
& & & & & & & \Delta^7u_{-7}. & & & & & & &
\end{array}$$

Stirling donne, pour ce cas, la formule

$$\begin{aligned}
u_x = {} & \frac{(u_1+u_{-1})}{2} + \frac{h'^2-1}{2.4}\,\frac{(\Delta^2u_{-1}+\Delta^2u_{-3})}{2} + \frac{(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8}\,\frac{(\Delta^4u_{-3}+\Delta^4u_{-5})}{2} \\
& + \frac{(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12}\,\frac{(\Delta^6u_{-5}+\Delta^6u_{-7})}{2} + \text{etc.} \\
& + \frac{h'}{2}\,\Delta u_{-1} + \frac{h'(h'^2-1)}{2.4.6}\,\Delta^3u_{-3} + \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8.10}\,\Delta^5u_{-5} \\
& + \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12.14}\,\Delta^7u_{-7} + \text{etc.,}
\end{aligned}$$

qu'il abrège en posant

$$\begin{array}{ll}
u_1 + u_{-1} = A; & \Delta u_{-1} = a, \\
\Delta^2u_{-1} + \Delta^2u_{-3} = B, & \Delta^3u_{-3} = b, \\
\Delta^4u_{-3} + \Delta^4u_{-5} = C, & \Delta^5u_{-5} = c, \\
\Delta^6u_{-5} + \Delta^6u_{-7} = D, & \Delta^7u_{-7} = d, \\
\text{etc.,} &
\end{array}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned}
u_x = {} & \frac{A+ah'}{2} \\
& + \frac{3B+bh'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6} \\
& + \frac{5C+ch'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6}\,\frac{h'^2-9}{8.10} \\
& + \frac{7D+dh'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6}\,\frac{h'^2-9}{8.10}\,\frac{h'^2-25}{12.14} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Cette formule se déduit de celle du n° précédent, en observant que les différences premières sont en nombre pair, dans le tableau de la page 26, et que leur terme général est représenté par Δu_x; on changera donc h' en $h'+1$ dans l'expression de u_x du n° cité, puis on en retranchera la première valeur; les u et leurs différences ne dépendant pas de h' ne varient point; on n'aura que leurs coefficiens à différencier, comme nous allons le faire pour un terme de chacune des deux suites qui composent la valeur de u_x. Dans la première,

$$\frac{h'}{2}\,\frac{(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5}, \text{ qui équivaut à } \frac{1}{2}\,\frac{(h'-2)(h'-1)\,h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5},$$

devient
$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5};$$

retranchant de cette valeur la précédente, on trouvera

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5}\{(h'+3)-(h'-2)\} = \frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4}.$$

Dans la seconde suite, le coefficient

$$\frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6} = \frac{(h'-2)(h'-1)h'.h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}.$$

se change en
$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5.6},$$

et la différence de cette valeur à la précédente est

$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}\{(h'+1)(h'+3)-(h'-2)h'\}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(2h'+1)}{1.2.3.4.5}.$$

En opérant de même sur les autres coefficiens, on trouvera

$$\begin{aligned}\Delta u_x = \frac{(\Delta u+\Delta u_{-1})}{2} &+ \frac{h'(h'+1)}{1.2}\,\frac{(\Delta^3 u_{-1}+\Delta^3 u_{-2})}{2} \\ &+ \frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4}\,\frac{(\Delta^5 u_{-2}+\Delta^5 u_{-3})}{2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{(2h'+1)}{1}\,\frac{\Delta^2 u_{-1}}{2} + \frac{(2h'+1)(h'+1)h'}{1.2.3}\,\frac{\Delta^4 u_{-2}}{2} \\ &+ \frac{(2h'+1)(h'+2)(h'+1)h'(h'-1)}{1.2.3.4.5}\,\frac{\Delta^6 u_{-3}}{2} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette expression n'est que celle d'une différence première; mais on passera à l'expression de u_x, en diminuant de l'unité les exposans des caractéristiques Δ, puisque cela revient à prendre les différences premières pour des quantités primitives, les différences secondes pour des différences premières, et ainsi de suite; et comme la formule d'où nous sommes partis suppose que les valeurs données soient en nombre impair, leurs différences, prises maintenant pour les valeurs données, sont nécessairement en nombre pair, ainsi qu'on peut le voir dans la seconde ligne du tableau du n° 901; mais afin de placer l'origine des indices entre les deux quantités moyennes qui sont désignées ici par u_{-1} et u_1, et faire que la différence de ces indices soit de deux unités, il faut écrire $\frac{h'-1}{2}$, au lieu de h', et remplacer ensuite

$$\ldots u_{-4},\quad u_{-3},\quad u_{-2},\quad u_{-1},\quad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ldots$$

par

$$\ldots u_{-7},\quad u_{-5},\quad u_{-3},\quad u_{-1},\quad u_1,\quad u_3,\quad u_5,\quad u_7,\ldots$$

En effectuant ces transformations avec soin, on retombera sur l'expression de u_x relative au cas où le nombre des quantités données est pair.

903. J'ai supposé jusqu'ici que les différences des valeurs de la variable indépendante x étaient égales entre elles; cette circonstance ne se rencontrant pas toujours, il est à propos de construire une formule qui n'y soit pas assujétie. C'est à quoi l'on parvient en prenant encore pour le terme général de la série des quantités données, une fonction rationnelle et entière de la variable x.

Cette fonction, écrite sous la forme

$$u_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + Px^n,$$

et devenant successivement

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\ldots\ldots u_n,$$

lorsqu'on donne à x les valeurs

$$a,\quad a_1,\quad a_2,\ldots\ldots a_n,$$

fournit, pour déterminer les coefficiens A, B, C, D, etc., les

équations

$$u = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.},$$
$$u_1 = A + Ba_1 + Ca_1^2 + Da_1^3 + \text{etc.},$$
$$u_2 = A + Ba_2 + Ca_2^2 + Da_2^3 + \text{etc.},$$
$$u_3 = A + Ba_3 + Ca_3^2 + Da_3^3 + \text{etc.},$$
etc.,

dont le nombre, $n+1$, est égal à celui des coefficiens $A, B, \ldots . P$. Si l'on retranche successivement la première de la seconde, celle-ci de la troisième, et ainsi de suite, on parvient à des résultats respectivement divisibles par $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, etc., d'où l'on tire

$$\frac{u_1 - u}{a_1 - a} = B + C(a_1 + a) + D(a_1^2 + a_1 a + a^2) + \text{etc.},$$
$$\frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \text{etc.},$$
$$\frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = B + C(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \text{etc.},$$
etc.

Pour rappeler l'analogie que les premiers membres de ces équations ont avec les différences, nous ferons, comme M. Laplace,

$$\frac{u_1 - u}{a_1 - a} = \delta u, \quad \frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = \delta u_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = \delta u_2, \quad \text{etc.},$$

et nous aurons

$$\delta u = B + C(a_1 + a) + D(a_1^2 + a_1 a + a^2) + \text{etc.},$$
$$\delta u_1 = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \text{etc.},$$
$$\delta u_2 = B + C(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \text{etc.},$$
etc.

Retranchant encore chacune de ces équations de celle qui la suit, les résultats deviendront divisibles respectivement par $a_2 - a$, $a_3 - a_1$, etc.; et faisant, suivant l'esprit de la notation établie ci-dessus,

$$\frac{\delta u_1 - \delta u}{a_2 - a} = \delta^2 u, \quad \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{a_3 - a_1} = \delta^2 u_1, \quad \text{etc.},$$

on trouvera

$$\delta^2 u = C + D(a_2 + a_1 + a) + \text{etc.},$$
$$\delta^2 u_1 = C + D(a_3 + a_2 + a_1) + \text{etc.},$$
etc.

soustrayant encore chacune de ces équations de celle qui la suit, les résultats seront divisibles par $a_3 - a$, etc.; on fera donc

$$\frac{\delta^2 u_1 - \delta^2 u}{a_3 - a} = \delta^3 u, \quad \text{etc.},$$

et l'on obtiendra

$$\delta^3 u = D + \text{etc.}$$

La marche du calcul est déjà suffisamment établie pour être continuée autant qu'on le voudra.

S'il n'y avait que quatre valeurs données, u, u_1, u_2 et u_3, l'expression de u_x pourrait s'arrêter au terme Dx^3; alors les équations ci-dessus conduiraient à

$$\begin{aligned}
D &= \delta^3 u, \\
C &= \delta^2 u - (a_2 + a_1 + a)\delta^3 u; \\
B &= \delta u - (a_1 + a)\delta^2 u + (a_2 a_1 + a_2 a + a_1 a)\delta^3 u, \\
A &= u - a\delta u + a_1 a\delta^2 u - a_2 a_1 a\delta^3 u;
\end{aligned}$$

et substituant ces valeurs dans l'expression de u_x, on aurait

$$\begin{aligned}
u_x = u &+ (x - a)\delta u + [x^2 - (a_1 + a)x + a_1 a]\delta^2 u \\
&+ [x^3 - (a_2 + a_1 + a)x^2 + (a_2 a_1 + a_2 a + a_1 a)x - a_2 a_1 a]\delta^3 u.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les coefficiens de δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, peuvent être décomposés en facteurs simples; et en le faisant, il vient

$$u_x = u + (x - a)\delta u + (x - a)(x - a_1)\delta^2 u + (x - a)(x - a_1)(x - a_2)\delta^3 u.$$

Cette expression peut s'étendre à tel nombre de valeurs données qu'on le voudra, au moyen des quantités δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc., dont la dérivation successive est indiquée par la suite d'équations

$$\begin{aligned}
&\frac{u_1 - u}{a_1 - a} = \delta u, \quad \frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = \delta u_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = \delta u_2, \quad \frac{u_4 - u_3}{a_4 - a_3} = \delta u_3, \quad \text{etc.}, \\
&\frac{\delta u_1 - \delta u}{a_2 - a} = \delta^2 u, \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{a_3 - a_1} = \delta^2 u_1, \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{a_4 - a_2} = \delta^2 u_2, \text{etc.}, \\
&\frac{\delta^2 u_1 - \delta^2 u}{a_3 - a} = \delta^3 u, \frac{\delta^2 u_2 - \delta^2 u_1}{a_4 - a_1} = \delta^3 u_1, \text{etc.}, \\
&\frac{\delta^3 u_1 - \delta^3 u}{a_4 - a} = \delta^4 u, \text{etc.}, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

comprises dans l'équation générale

$$\frac{\delta^{r-1} u_{t+1} - \delta^{r-1} u_t}{a_{r+t} - a_t} = \delta^r u_t.$$

Sous ces conditions, on aura

$$u_x = u + (x-a)\delta u + (x-a)(x-a_1)\delta^2 u + (x-a)(x-a_1)(x-a_2)\delta^3 u$$
$$+ (x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\delta^4 u + \text{etc.}\ldots.$$

904. Quand les valeurs a, a_1, a_2, ... sont équidifférentes, on a

$$a_1 = a + h,\quad a_2 = a + 2h,\ \ldots.\ a_n = a + nh;$$

d'où il suit

$$\delta u = \frac{\Delta u}{h},\quad \delta u_1 = \frac{\Delta u_1}{h},\quad \delta u_2 = \frac{\Delta u_2}{h},\quad \delta u_3 = \frac{\Delta u_3}{h},\ \text{etc.},$$
$$\delta^2 u = \frac{\Delta^2 u}{2h^2},\quad \delta^2 u_1 = \frac{\Delta^2 u_1}{2h^2},\quad \delta^2 u_2 = \frac{\Delta^2 u_2}{2h^2},\ \text{etc.},$$
$$\delta^3 u = \frac{\Delta^3 u}{2.3h^3},\quad \delta^3 u_1 = \frac{\Delta^3 u_1}{2.3h^3},\ \text{etc.},$$
$$\delta^4 u = \frac{\Delta^4 u}{2.3.4h^4},\ \text{etc.},$$

etc.

Avec ces valeurs et faisant $x - a = h'$, on retombera sur l'expression de u_x obtenue dans le n° 899.

905. Les coefficiens représentés par δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc., sont susceptibles d'une forme assez remarquable, que nous allons indiquer.

$$\delta u = \frac{u_1 - u}{a_1 - a} = \frac{u_1}{a_1 - a} + \frac{u}{a - a_1},$$
$$\delta^2 u = \frac{\delta u_1 - \delta u}{a_2 - a} = \frac{1}{a_2 - a}\left\{\frac{u_2}{a_2 - a_1} + \frac{u_1}{a_1 - a_2} - \frac{u_1}{a_1 - a} - \frac{u}{a - a_1}\right\};$$

et si l'on réduit ensemble les deux termes affectés de u_1, il viendra

$$\delta^2 u = \frac{u_2}{(a_2 - a)(a_2 - a_1)} + \frac{u_1}{(a_1 - a)(a_1 - a_2)} + \frac{u}{(a - a_2)(a - a_1)};$$

on obtiendrait semblablement

$$\delta^3 u = \left.\begin{array}{l} \dfrac{u_3}{(a_3 - a)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} + \dfrac{u_2}{(a_2 - a)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \\ + \dfrac{u_1}{(a_1 - a)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \dfrac{u}{(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)} \end{array}\right\},$$

ce qui suffit pour mettre en évidence la loi de ces expressions.

En les substituant dans celle de u_x, et rassemblant les termes dans

lesquels u porte le même indice, on aurait un résultat de la forme

$$u_x = \alpha u + \beta u_1 + \gamma u_2 + \text{etc.},$$

qui s'obtient immédiatement d'une manière beaucoup plus simple, ainsi qu'on le verra bientôt.

Il n'est peut-être pas inutile, pour l'application de la formule du n° 903, de remarquer que si l'on y met successivement pour x les valeurs a, a_1, a_2, etc., on formera les équations

$$\begin{aligned}
u &= u, \\
u_1 &= u + (a_1 - a)\delta u, \\
u_2 &= u + (a_2 - a)\delta u + (a_2 - a)(a_2 - a_1)\delta^2 u, \\
u_3 &= u + (a_3 - a)\delta u + (a_3 - a)(a_3 - a_1)\delta^2 u + (a_3 - a)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\delta^3 u, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

au moyen desquelles chacun des coefficiens δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc., est déterminé par ceux qui le précèdent.

906. Euler s'est occupé spécialement des expressions de la forme

$$u_x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{etc.}, \quad u_x = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \text{etc.};$$

mais il n'est pas nécessaire de s'y arrêter beaucoup, car leurs coefficiens se déduisent de ceux de la formule du n° précédent. Il suffit pour cela d'observer qu'en divisant par x les deux membres de la première, et par x^2 ceux de la seconde, on en tire les suivantes :

$$\frac{u_x}{x} = A + Bx^2 + Cx^4 + \text{etc.}, \quad \frac{u_x}{x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + \text{etc.};$$

qui deviennent

$$u'_{x'} = A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3 + \text{etc.};$$

lorsqu'on fait $x^2 = x'$ et qu'on remplace par $u'_{x'}$, les fonctions $\frac{u_x}{x}$ et $\frac{u_x}{x^2}$. Ces changemens étant effectués dans les valeurs de A, B, C, etc., obtenues précédemment (903), donneront celles qui conviennent aux formules proposées.

L'expression de $u'_{x'}$, étant mise sous la forme donnée en dernier lieu à celle de u_x (903), deviendra

$$u'_{x'} = u' + (x^2 - a^2)\delta u' + (x^2 - a^2)(x^2 - a_1^2)\delta^2 u' + \text{etc.},$$

où il ne restera plus qu'à mettre, pour la fonction u'_x, et les quantités qui en dérivent, chacune des valeurs $\frac{u_x}{x}$, $\frac{u_x}{x^2}$, d'après lesquelles u' se change successivement en $\frac{u}{a}$ et $\frac{u}{a^2}$: les valeurs de $\delta u'$, $\delta^2 u'$, $\delta^3 u'$, etc., développées comme le sont celles de δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc., dans le n° 905, seront semblables à celles qu'Euler a trouvées pour les coefficiens de ses formules.

907. Les lois de l'élimination des inconnues, dans les équations du premier degré, font voir que les valeurs de A, B, C, D, etc., conclues des équations

$$\begin{aligned} u &= A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.}; \\ u_1 &= A + Ba_1 + Ca_1^2 + Da_1^3 + \text{etc.}, \\ u_2 &= A + Ba_2 + Ca_2^2 + Da_2^3 + \text{etc.}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= A + Ba_n + Ca_n^2 + Da_n^3 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ne sauraient contenir les quantités $u, u_1, u_2, \ldots u_n$, qu'au premier degré, et dans le numérateur seulement. Il suit de là qu'on peut poser l'équation

$$u_x = Xu + X_1u_1 + X_2u_2 \ldots\ldots + X_nu_n;$$

qu'alors les fonctions X, X_1, X_2, ... X_n, ne dépendront que de la variable x et de ses valeurs a, a_1, a_2, ... a_n, et qu'on aura $u_x = u$, quand $x = a$, si

$$X = 1,\quad X_1 = 0,\quad X_2 = 0, \ldots\ldots X_n = 0;$$

$u_x = u_1$, quand $x = a_1$, si

$$X = 0,\quad X_1 = 1,\quad X_2 = 0, \ldots\ldots X_n = 0;$$

$u_x = u_2$, quand $x = a_2$, si

$$X = 0,\quad X_1 = 0,\quad X_2 = 1, \ldots\ldots X_n = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$u_x = u_n$, quand $x = a_n$, si

$$X = 0,\quad X_1 = 0,\quad X_2 = 0, \ldots\ldots X_n = 1.$$

En considérant par colonnes le tableau des conditions indiquées ci-dessus, on voit d'abord que la fonction X doit s'évanouir lorsqu'on

donne à x toutes les valeurs comprises dans la série a, a_1, a_2, ... a_n, excepté la première. On satisfait à cette condition, de la manière la plus simple, en prenant le produit

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n),$$

que la supposition de $x=a$ change en

$$(a-a_1)(a-a_2)\ldots\ldots(a-a_n);$$

divisant donc le premier produit par le second, le quotient, qui devient l'unité quand $x=a$, remplira toutes les conditions imposées pour la fonction X, et l'on pourra faire par conséquent

$$X=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)(a_1-a)\ldots(a-a_n)}.$$

On trouvera de même

$$X_1=\frac{(x-a)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)},$$

$$X_2=\frac{(x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1)\ldots(a_2-a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n=\frac{(x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})};$$

on aura donc l'expression

$$\left.\begin{array}{l} u_x=\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)\ldots(a-a_n)}u+\dfrac{(x-a)(x-a_2)\ldots(x-d_n)}{(a_1-a)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{(x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}u_n \end{array}\right\},$$

très-commode pour les applications, puisqu'on en peut calculer immédiatement tous les termes par les logarithmes.

908. Cette formule, due à Lagrange, est remarquable non-seulement par son élégance, mais parce qu'elle montre bien comment l'interpolation est un problème indéterminé, lorsqu'on ignore la forme de la fonction d'où dérive la série des nombres donnés (898).

En effet, le produit

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n),$$

qui forme le numérateur de X, n'est pas la seule fonction susceptible de s'évanouir, pour les valeurs $x=a_1$, $=a_2,\ldots=a_n$. Si l'on sort des

fonctions algébriques, on trouve d'abord l'expression très-simple

$$\sin p(x-a_1)\sin q(x-a_2)\ldots\ldots\sin t(x-a_n),$$

qui jouit de cette propriété, quels que soient les nombres p, q, $\ldots t$; on pourra donc poser encore

$$X=\frac{\sin p(x-a_1)\sin q(x-a_2)\ldots\sin t(x-a_n)}{\sin p(a-a_1)\sin q(a-a_2)\ldots\sin t(a-a_n)},$$
$$X_1=\frac{\sin p'(x-a)\sin q'(x-a_2)\ldots\sin t'(x-a_n)}{\sin p'(a_1-a)\sin q'(a_1-a_n)\ldots\sin t'(a_1-a_n)},$$
etc.,

en observant que les nombres p', $q'\ldots.t'$, peuvent être différens des nombres p, $q\ldots.t$, et ainsi de suite pour toutes les autres fonctions X.

Si de pareilles expressions s'accordent avec celles du n° précédent, pour les valeurs de x comprises dans la série a, a_1, $a_2,\ldots.a_n$, elles en diffèrent beaucoup dans l'intervalle, dès que les arcs ne sont plus assez petits pour être sensiblement proportionnels à leurs sinus.

On peut varier ces formules d'un grand nombre de manières; Charles en a proposé plusieurs autres, dont voici les plus simples. En représentant la demi-circonférence par π, et supposant que les valeurs a, a_1, a_2, etc. soient la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, etc., on peut faire

$$u_x=p\,\frac{u\sin\pi x}{\sin p\pi x}+q\,\frac{u_1\sin\pi(x-1)}{\sin q\pi(x-1)}+r\,\frac{u_2\sin\pi(x-2)}{\sin r\pi(x-2)}+\text{etc.},$$
$$\pi u_x=p\,\frac{u\sin\pi x}{e^{px}-1}+q\,\frac{u_1\sin\pi(x-1)}{e^{q(x-1)}-1}+r\,\frac{u_2\sin\pi(x-2)}{e^{r(x-2)}-1}+\text{etc.},$$
$$\pi^2u_x=(\sin\pi x)^2\left\{\frac{u}{x^2}-\frac{u_1}{(x-1)^2}+\frac{u_2}{(x-2)^2}-\frac{u_3}{(x-3)^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Dans les deux premières formules, les quantités p, q, r, etc., sont indéterminées, mais cependant assujéties, dans la première, à la condition de n'être pas des nombres entiers ou des fractions dont le dénominateur soit moindre que le plus fort indice de u. Ces quantités peuvent servir à remplir des conditions auxquelles seraient soumises en particulier les valeurs intermédiaires que l'on cherche.

La composition de ces formules est fondée, comme celle des précédentes, sur ce que les deux membres deviennent identiques lorsqu'on fait successivement

$x=0$ et $u_x=u$, $x=1$ et $u_x=u_1$, $x=2$ et $u_x=u_2$, etc.

Le second membre se réduit d'abord à un seul terme, qui se présente, à la vérité, sous la forme de $\frac{0}{0}$, mais dont il est facile de trouver la vraie valeur. En effet, si l'on suppose, par exemple, $x=1$, les numérateurs des termes des deux premières formules s'évanouissent tous, mais il n'y a que le dénominateur du second terme auquel il en arrive autant; maintenant, si l'on observe que

$$\sin\pi(x-1)=\frac{\pi(x-1)}{1}-\frac{\pi^3(x-1)^3}{1.2.3}+\text{etc. } (Int.\ 39),$$
$$e^{q(x-1)}-1=\frac{q(x-1)}{1}+\frac{q^2(x-1)^2}{1.2}+\text{etc. } (Int.\ 22),$$

on verra que les expressions $q\frac{u_1\sin\pi(x-1)}{\sin q\pi(x-1)}$, $q\frac{u_1\sin\pi(x-1)}{e^{q(x-1)}-1}$, se réduisent, l'une à u_1, l'autre à πu_1, lorsque $x=1$. Les numérateurs de tous les termes du second membre de la troisième formule étant multipliés par $(\sin\pi x)^2$, s'évanouiront toutes les fois que x sera égal à un nombre entier; mais il n'y a qu'un seul des dénominateurs qui disparaisse : quand on a, par exemple, $x=1$, le terme $-\frac{u_1(\sin\pi x)^2}{(x-1)^2}$ se réduit à $\pi^2 u_1$.

Lagrange, en dernier lieu, a indiqué la formule

$$u_x=A'\sin\frac{\pi x}{a}+A''\sin\frac{2\pi x}{a}+A'''\sin\frac{3\pi x}{a}+\text{etc.},$$

comme pouvant servir à l'interpolation d'une série de termes périodiques qui redeviendraient o, pour toutes les valeurs de x comprises dans la série a, $2a$, $3a$, etc.

De ce qui précède, on doit conclure que des fonctions peuvent avoir, pour des accroissemens donnés de la variable indépendante, des différences constantes, sans changer pour cela uniformément dans toute la suite de leurs valeurs. Cette considération, que je ne fais qu'indiquer ici, se représentera dans la discussion sur l'espèce de quantités que la formation des différences suppose constantes.

909. La fonction a^x, ayant des différences croissantes d'ordre en ordre (891), lorsque $a^h-1>1$, peut servir à représenter une série qui suivrait cette marche; et M. Prony donne une méthode très-simple pour déterminer, par un nombre suffisant de valeurs connues, les coefficiens A, B, C, etc., et les quantités α, β, γ, etc., de l'expression

$$u_x=A\alpha^x+B\beta^x+C\gamma^x+\text{etc.};$$

mais comme cette méthode revient au fond à trouver le terme général des suites récurrentes, question que je dois traiter plus loin avec étendue, je différerai jusque là d'en parler.

Je ferai seulement observer, dès à présent, qu'un nombre étant connu, lorsqu'on a déterminé son logarithme, on peut appliquer l'interpolation à la série des logarithmes des nombres donnés. Stirling a pris ce moyen pour la série

$$1, \quad 1.1, \quad 1.2, \quad 1.2.3, \ldots\ldots 1.2.3\ldots n,$$

dont les différences croissent dans tous les ordres, et qui répond à la série

$$l1, \quad l1, \quad l1+l2, \quad l1+l2+l3, \quad \text{etc.},$$

dont les différences premières sont les logarithmes de la suite naturelle des nombres. Je n'entreprendrai pas ce calcul, parce que la série proposée sera, dans la suite, l'objet de considérations plus générales.

910. La première idée d'étendre une table, en insérant de nouveaux termes entre ceux qu'elle contient, paraît appartenir à Briggs; mais c'est à Mouton qu'on doit les notions les plus simples sur ce sujet. La méthode qu'il publia, dès 1670, est non-seulement curieuse, mais pourrait avoir l'avantage de la brièveté, sur les formules rapportées précédemment, s'il s'agissait d'insérer un grand nombre de termes consécutifs dans une table donnée.

Au lieu de calculer chacun des nouveaux termes isolément, il cherche les différences successives qui doivent régner entre ces termes, et complète la table par la seule addition, comme on l'a indiqué dans le n° 880. Le principe fondamental de cette méthode consiste à supposer que *lorsqu'une série conduit à des différences constantes, pour des indices équidifférens, les nombres intermédiaires auront aussi des différences constantes dans le même ordre, s'ils répondent à des intervalles égaux.* Cela n'est vrai que pour les fonctions rationnelles et entières, et résulte alors de l'expression de $\Delta^m . x^m$ (885), qui demeure la même lorsque l'accroissement h ne change pas. Venons maintenant à l'application.

Soit la série des nombres

$$0, \quad 15, \quad 41, \quad 87, \quad 162, \quad 275, \quad \text{etc.};$$

dont les différences troisièmes sont constantes, et entre les termes consécutifs de laquelle on se propose d'en insérer deux nouveaux assujétis à la même loi; il faudra par conséquent que dans la nouvelle série les

différences troisièmes soient également constantes. Désignant, pour abréger, par les lettres a, b, c, d, le premier terme de cette série, sa différence première, sa différence seconde et sa différence troisième, on formera, par les principes du n° 880, ce tableau :

Indices.	Nombres.	Différences 1res.	Differ. 2es.	Differ. 3es.
1	a			
2	$a+b$	b		
3	$a+2b+c$	$b+c$	c	
4	$a+3b+3c+d$	$b+2c+d$	$c+d$	d
5	$a+4b+6c+4d$	$b+3c+3d$	$c+2d$	d
6	$a+5b+10c+10d$	$b+4c+6d$	$c+3d$	d
7	$a+6b+15c+20d$	$b+5c+10d$	$c+4d$	d
8	$a+7b+21c+35d$	$b+6c+15d$	$c+5d$	d
9	$a+8b+28c+56d$	$b+7c+21d$	$c+6d$	d
10	$a+9b+36c+84d$	$b+8c+28d$	$c+7d$	d

et en le prolongeant aussi loin qu'il sera nécessaire, on trouvera, dans la première colonne, tous les termes d'une série quelconque, dont les différences troisièmes sont constantes; mais lorsqu'on aura intercalé deux nouveaux termes entre chacun de ceux de la série proposée, le second de cette série sera le quatrième de la nouvelle, le troisième deviendra le septième, etc., et en général il faudra laisser dans la première colonne du tableau, entre chacun des termes qu'on prendra, autant de termes intermédiaires qu'on veut en intercaler.

Dans l'exemple actuel, les termes donnés répondront aux suivans :

Indices.	Nombres.	Différences 1res.	Differ. 2es.	Differ. 3es.
1	a			
4	$a+3b+3c+d$	$3b+3c+d$		
7	$a+6b+15c+20d$	$3b+12c+19d$	$9c+18d$	
10	$a+9b+36c+84d$	$3b+21c+64d$	$9c+45d$	$27d$

dont les différences, placées à côté, doivent être identiques avec celles qui résultent des nombres 0, 15, 41, 87, etc. En calculant ces dernières, on obtient 15 pour la première différence, 11 pour la deuxième,

et 9 pour la troisième; et les comparant avec la formule qui occupe la première place dans chaque colonne du tableau ci-dessus, en commençant par la droite, on trouve

$$27d=9,\quad 9c+18d=11,\quad 3b+3c+d=15,$$

d'où l'on tire

$$d=\tfrac{1}{3},\quad c=\tfrac{5}{9},\quad b=\tfrac{13}{3}:$$

on a de plus $a=0$, et par le moyen de ces valeurs, on formera successivement tous les termes de la série interpolée.

911. Mouton ne put résoudre lui-même la question qu'il s'était proposée; ce fut un de ses amis, nommé Regnaud, qui construisit par induction le tableau qu'il rapporte dans son ouvrage, et dans lequel les différences cinquièmes sont supposées constantes; mais la découverte des formules générales d'interpolation, fit oublier le procédé proposé par Mouton. Lagrange et M. Prony l'ayant repris, l'ont réduit en formules, ce qui s'opère aisément comme il suit.

Soit $n+1$ le nombre des termes donnés; on aura en général,

$$u_x = u + \frac{x}{1}\,\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\,\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,\Delta^3 u$$
$$\dots\dots\dots\dots + \frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots\dots n}\,\Delta^n u \ (898).$$

Pour intercaler $m-1$ termes entre u_x et u_{x+1}, dont les indices diffèrent de l'unité, il faudra partager cet intervalle en m parties égales, c'est-à-dire faire croître x par des différences égales à $\frac{1}{m}$, ou, posant $x=\frac{t}{m}$, faire croître t de l'unité; et l'on aura

$$u_x = u + \frac{t}{m}\,\Delta u + \frac{t(t-m)}{1.2m^2}\,\Delta^2 u + \frac{t(t-m)(t-2m)}{1.2.3m^3}\,\Delta^3 u$$
$$\dots\dots\dots\dots + \frac{t(t-m)(t-2m)\dots\dots[t-(n-1)m]}{1.2.3\dots\dots nm^n}\,\Delta^n u.$$

Prenant alors les différences successives de cette expression, en se rappelant que toute fonction rationnelle et entière d'une variable n'a pas de différences d'un ordre supérieur à son degré (886), on obtiendra en général,

$$\Delta'^r u_x = \frac{\Delta^r . t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots[t-(r-1)m]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots rm^r}\,\Delta^r u$$
$$+\frac{\Delta^r . t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots(t-mr)}{1.2.3\ldots\ldots(r+1)m^{r+1}}\,\Delta^{r+1} u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\Delta^r . t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots[t-(n-1)m]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots nm^n}\,\Delta^n u,$$

où il faut observer que Δu, $\Delta^2 u$, etc., se concluant des termes donnés, sont constans; que la caractéristique Δ se rapportant aux variables qui croissent de l'unité, Δ' indique les différences relatives à x qui croît de $\frac{1}{m}$; qu'on doit faire $t=0$, après les différentiations, et qu'enfin on doit donner à r les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots n$, pour obtenir les différences b, c, d, etc. (910).

Si l'on développe, suivant les puissances de t, les produits qu'affecte la caractéristique Δ, on aura

$$\Delta^r(t^r + Amt^{r-1} + Bm^2t^{r-2}\ldots + Rm^{r-1}) = \Delta^r.t^r,$$
$$\Delta^r(t^{r+1} + A'mt^r + B'm^2t^{r-1}\ldots\ldots + S'm^r) = \Delta^r.t^{r+1} + A'm\Delta^r.t^r,$$
$$\Delta^r(t^{r+2} + A''mt^{r+1} + B''m^2t^r\ldots\ldots\ldots + T''m^{r+1}) = \Delta^r.t^{r+2} + A''m\Delta^r.t^{r+1} + B''m^2\Delta^r.t^r,$$

etc.;

et désignant par α, β, γ, etc., les valeurs de $\Delta^r.t^r$, $\Delta^r.t^{r+1}$, $\Delta^r.t^{r+2}$, etc., il viendra enfin

$$\Delta'^r u_x = \frac{1}{1.2\ldots rm^r}\left\{\alpha\Delta^r u + \frac{\beta+\alpha A'm}{(r+1)m}\,\Delta^{r+1}u + \frac{\gamma+\beta A''m+\alpha B''m^2}{(r+1)(r+2)m^2}\,\Delta^{r+2}u + \text{etc.}\right\}.$$

Lorsque $r=n$, $\alpha = 1.2.3\ldots n$ (885), et il vient $\Delta'^n u = \frac{\Delta^n u}{m^n}$, résultat auquel Mouton était aussi parvenu.

912. La question de *trouver l'indice auquel doit répondre, dans une série de nombres donnés, un nombre compris entre deux termes de cette série,* revient, au fond, à prendre pour indices les nombres donnés et à interpoler la série des indices : la recherche du nombre qui répond à un logarithme donné, non compris dans les tables, est de ce genre.

Si les indices sont équidifférens, et que les valeurs de $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u$, etc., forment une suite très-convergente, le problème se résout facilement, au moyen de l'équation

$$u_x = u + \frac{x}{1}\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.},$$

dans laquelle u_x est donné et x est l'inconnue. En désignant par $\Delta' u$

la différence donnée entre u_x et u, on en tire

$$x = \frac{\Delta' u}{\Delta u + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}};$$

et ne tenant compte d'abord que du premier terme du dénominateur, on aura pour première valeur approchée, $x = \frac{\Delta' u}{\Delta u}$. Soit α cette valeur; on la substituera dans le second terme, on négligera le troisième et les suivans, et il viendra pour deuxième valeur approchée, $x = \frac{\Delta' u}{\Delta u + \frac{\alpha - 1}{2}\Delta^2 u}$. Il est maintenant aisé de continuer ce procédé autant qu'il sera nécessaire, et d'en faire l'application numérique.

Si les différences ne décroissaient pas assez rapidement pour n'en considérer qu'une à-la-fois, la détermination de x ne pourrait s'effectuer qu'en résolvant une équation du degré marqué par l'exposant de l'ordre des différences qu'on regarde comme constantes. Cette équation serait du troisième degré, par exemple, si l'expression de u_x s'arrêtait à $\Delta^3 u$; car on aurait alors

$$\Delta' u = (\Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u)x + (\tfrac{1}{2}\Delta^2 u - \tfrac{1}{2}\Delta^3 u)x^2 + \tfrac{1}{6}x^3\Delta^3 u.$$

Différences et interpolation des fonctions de plusieurs variables.

913. Les diverses valeurs que prend une fonction de deux variables produisent un assemblage de séries formant une table disposée comme celle que l'on attribue à Pythagore, et qui renferme ordinairement les valeurs de la fonction xy, correspondantes à celles des variables x et y, depuis 1 jusqu'à 9. Voici encore, pour exemple, une table qui résulte de la fonction $5 + x^2 + 2xy + 3y^2$.

Valeurs de x.

Valeurs de y.	0	1	2	3	4	etc.
0	5	6	9	14	21	etc.
1	8	11	16	23	32	etc.
2	17	22	29	38	49	etc.
3	52	39	48	59	72	etc.
4	53	62	73	86	101	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

C'est là une *table à double entrée*, parce que pour en désigner un terme particulier, il faut donner le numéro de la colonne et celui de la ligne ou bande qui le contiennent. Ces numéros sont suppléés par des accens, dans le tableau du n° 298, où j'ai déjà indiqué la manière de varier de la fonction z, dépendante de deux quantités x et y; mais il est plus simple et plus général de mettre des indices au bas de la lettre représentant la fonction. Ainsi $u_{x,y}$ dénotera l'état général d'une fonction de x et de y; $u_{0,0}$, la valeur particulière qui répond à $x=0$, $y=0$; $u_{3,4}$, celle qui répond à $x=3$, $y=4$, et ainsi des autres. Dans le tableau ci-dessus, on a

$$u_{x,y}=5+x^2+2xy+3y^2,\quad u_{0,0}=5,\quad u_{3,4}=86,$$

et les symboles qu'on vient d'établir produisent le tableau suivant :

Valeurs de x.

Valeurs de y.	0	1	2	3	......	x
0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	$u_{3,0}$	......	$u_{x,0}$
1	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	......	$u_{x,1}$
2	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$	......	$u_{x,2}$
3	$u_{0,3}$	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$	......	$u_{x,3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
y	$u_{0,y}$	$u_{1,y}$	$u_{2,y}$	$u_{3,y}$	......	$u_{x,y}$

Considérées séparément, chaque bande et chaque colonne de ce tableau forment des séries dans lesquelles le rang des termes ne dépend que d'un seul indice, savoir, x pour tous ceux d'une même bande, et y pour tous ceux d'une même colonne. Les différences de ces termes se prennent donc comme à l'ordinaire; mais il faut distinguer celles que produit le changement d'un indice, de celles que produit le changement de l'autre, et pour cela, on écrit au bas de la caractéristique Δ celui des

indices qui varie ; ainsi

$$u_{x+1,y} - u_{x,y} = \Delta_x u_{x,y}, \qquad \Delta_x u_{x+1,y} - \Delta_x u_{x,y} = \overset{2}{\Delta}_x u_{x,y}, \qquad \text{etc.},$$
$$u_{x,y+1} - u_{x,y} = \Delta_y u_{x,y}, \qquad \Delta_y u_{x,y+1} - \Delta_y u_{x,y} = \overset{2}{\Delta}_y u_{x,y}, \qquad \text{etc.};$$

ce sont là les différences partielles de $u_{x,y}$ (31), au moyen desquelles on peut, par les formules des n[os] 882 et 883, exprimer le terme général d'une bande ou d'une colonne, par le premier terme et ses différences, ou bien la différence d'un ordre quelconque de ce terme par tous les autres.

914. Si, dans les formules citées, on change n en x, et qu'on écrive $u_{0,0}$ à la place de u, on obtiendra

$$u_{x,0} = u_{0,0} + \frac{x}{1}\Delta_x u_{0,0} + \frac{x(x-1)}{1.2}\overset{2}{\Delta}_x u_{0,0} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\overset{3}{\Delta}_x u_{0,0} + \text{etc. (I)},$$
$$\overset{x}{\Delta}_x u_{0,0} = u_{x,0} - \frac{x}{1}u_{x-1,0} + \frac{x(x-1)}{1.2}u_{x-2,0} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}u_{x-3,0} + \text{etc.}$$

Pour étendre ces formules à telle bande qu'on voudra, il suffira de substituer au second o, qui tient la place de y, le numéro de la bande. On exprimerait, par exemple, $u_{x,3}$, au moyen des quantités $u_{0,3}$, $\Delta_x u_{0,3}$, etc., relatives à la quatrième bande ; et dans une bande quelconque,

$$u_{x,y} = u_{0,y} + \frac{x}{1}\Delta_x u_{0,y} + \frac{x(x-1)}{1.2}\overset{2}{\Delta}_x u_{0,y} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\overset{3}{\Delta}_x u_{0,y} + \text{etc.};$$

mais en considérant à part la série des valeurs contenues dans la première colonne, on aura aussi

$$u_{0,y} = u_{0,0} + \frac{y}{1}\Delta_y u_{0,0} + \frac{y(y-1)}{1.2}\overset{2}{\Delta}_y u_{0,0} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\overset{3}{\Delta}_y u_{0,0} + \text{etc.} \quad \text{(II)}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la précédente, pour la rapporter à la valeur primordiale $u_{0,0}$, on tombera sur les expressions

$$\Delta_x(\Delta_y u_{0,0}), \quad \overset{2}{\Delta}_x(\Delta_y u_{0,0}) \ldots\ldots \overset{m}{\Delta}_x(\overset{n}{\Delta}_y u_{0,0}),$$

dont la dernière dénote n différentiations par rapport à l'indice y, suivies de m différentiations par rapport à l'indice x, et peut être abrégée en l'écrivant ainsi : $\overset{m+n}{\Delta}_{x,y} u_{0,0}$, au moyen de quoi il vient

$$\left.\begin{array}{l} u_{x,y}=u_{0,0}+\frac{x}{1}\Delta_x u_{0,0}+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_x^2 u_{0,0}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_x^3 u_{0,0}+\text{etc.}\\ \quad+\frac{y}{1}\Delta_y u_{0,0}+\frac{xy}{1.1}\Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,0}+\frac{x(x-1)y}{1.2.1}\Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,0}+\text{etc.}\\ \quad+\frac{y(y-1)}{1.2}\Delta_y^2 u_{0,0}+\frac{xy(y-1)}{1.1.2}\Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,0}+\text{etc.}\\ \quad+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta_y^3 u_{0,0}+\text{etc.}\\ \quad+\text{etc.}\end{array}\right\}\text{(III)};$$

formule qui exprime le terme général de la table, par le premier terme $u_{0,0}$ et ses différences partielles, qui se forment de la manière suivante.

915. Les termes du tableau, considérés dans chaque bande en particulier, donneront, par le procédé du n° 881, les nouvelles séries

$u_{0,0}$, $\Delta_x u_{0,0}$, $\Delta_x^2 u_{0,0}$, $\Delta_x^3 u_{0,0}$, etc., répondant à $y=0$,
$u_{0,1}$, $\Delta_x u_{0,1}$, $\Delta_x^2 u_{0,1}$, $\Delta_x^3 u_{0,1}$, etc., ... $y=1$,
$u_{0,2}$, $\Delta_x u_{0,2}$, $\Delta_x^2 u_{0,2}$, $\Delta_x^3 u_{0,2}$, etc., ... $y=2$,
$u_{0,3}$, $\Delta_x u_{0,3}$, $\Delta_x^2 u_{0,3}$, $\Delta_x^3 u_{0,3}$, etc., ... $y=3$,
etc.

Si l'on retranche maintenant la première de la deuxième, celle-ci de la troisième, etc., il est clair que les restes exprimeront des différences par rapport à y; et suivant la notation établie, on aura

$\Delta_y u_{0,0}$, $\Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,0}$, $\Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,0}$, etc., répondant à $y=0$;
$\Delta_y u_{0,1}$, $\Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,1}$, $\Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,1}$, etc., ... $y=1$,
$\Delta_y u_{0,2}$, $\Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,2}$, $\Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,2}$, etc., ... $y=2$,
etc.

Retranchant encore ici la première ligne de la deuxième, la deuxième de la troisième, et ainsi de suite, les restes seront des différences secondes par rapport à y, savoir,

$\Delta_y^2 u_{0,0}$, $\Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,0}$, etc., répondant à $y=0$,
$\Delta_y^2 u_{0,1}$, $\Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,1}$, etc., ... $y=1$;
etc.

Retranchant encore ici la première ligne de la deuxième, etc., on formera des différences troisièmes par rapport à y, savoir,

$$\overset{3}{\Delta}_y u_{0,0}, \text{ etc., répondant à } y=0,$$
etc.

On poussera cette manière d'opérer jusqu'où il sera nécessaire ; rassemblant les termes relatifs à $u_{0,0}$, qui composent la première ligne de chaque groupe, on aura toutes les différences indiquées dans la formule (III).

Ce procédé, appliqué au tableau de la page 44, donne

1er groupe.	2e groupe.	3e groupe.	4e groupe.
5, 1, 2, 0			
8, 3, 2, 0	3, 2, 0		
17, 5, 2, 0	9, 2, 0	6, 0	
32, 7, 2, 0	15, 2, 0	6, 0	0
etc.	etc.	etc.	etc.

d'où il résulte

$$u_{0,0}=5,\quad \Delta_x u_{0,0}=1,\quad \overset{2}{\Delta}_x u_{0,0}=2,\quad \overset{3}{\Delta}_x u_{0,0}=0,$$
$$\Delta_y u_{0,0}=3,\quad \overset{1+1}{\Delta}_{x,y} u_{0,0}=2,\quad \overset{2+1}{\Delta}_{x,y} u_{0,0}=0,$$
$$\overset{2}{\Delta}_y u_{0,0}=6,\quad \overset{1+2}{\Delta}_{x,y} u_{0,0}=0,$$
$$\overset{3}{\Delta}_y u_{0,0}=0,$$

et

$$u_{x,y}=5+x+3y+2.\frac{x(x-1)}{2}+2.\frac{xy}{1.1}+6.\frac{y(y-1)}{1.2}$$
$$=5+x^2+2xy+3y^2,$$

fonction identique avec celle qui a servi à former le tableau.

916. En considérant d'abord les séries contenues dans les colonnes, les différences relatives à y se seraient présentées les premières, et l'on serait arrivé à une formule semblable à (II), mais dans laquelle y aurait pris la place de x, et réciproquement. Il est évident que ces deux formules doivent être identiques, et que par conséquent l'on peut intervertir l'ordre des opérations en prenant les différences, comme lorsqu'il s'agit des différentielles (27).

Cela se voit aussi par la formation même de l'expression $\Delta_{x,y}^{1+1} u_{x,y}$, en observant que si h et k désignent les accroissement de x et de y, $u_{x,y}$ étant $f(x,y)$, il vient

$$\Delta_x u_{x,y} = f(x+h,y) - f(x,y),$$
$$\Delta_{x,y}^{1+1} u_{x,y} = f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y),$$

expression où l'on ne ferait qu'échanger entre eux le deuxième terme et le troisième, si l'on intervertissait l'ordre des différentiations. Il suit de là, comme pour les différentielles, que la valeur de $\Delta_{x,y}^{m+n} u_{x,y}$ ne change point, dans quelqu'ordre qu'on effectue les opérations indiquées par ce symbole (28).

917. Si l'on fait $u_{x,y} = x^p y^q$, on trouvera sans peine que le premier terme de $\Delta_{x,y}^{m+n} . x^p y^q$ est

$$p(p-1)\ldots\ldots(p-m+1).q(q-1)\ldots\ldots(q-n+1)x^{p-m}y^{q-n}h^m k^n,$$

et que cette différence devient constante lorsque $m=p$, $n=q$.

Il suit de là que l'on parvient à des différences constantes lorsque $u_{x,y}$ est une fonction rationnelle et entière par rapport aux variables x et y, et que par conséquent la formule (III) du n° 914 se termine dans ce cas. Il est à propos d'observer que si on effectuait les produits indiqués, elle prendrait la forme

$$\begin{aligned} u_{x,y} = u_{0,0} &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.} \\ &+ A'y + B'xy + C'x^2y + \text{etc.} \\ &\quad + B''y^2 + C''xy^2 + \text{etc.} \\ &\quad\quad + C'''y^3 + \text{etc.} \\ &\quad\quad\quad + \text{etc.}; \end{aligned}$$

qui est celle d'une fonction rationnelle et entière ordonnée suivant les puissances des variables x et y.

918. Par des transformations semblables à celles du n° 899, les formules (I), (II) et (III) (914) deviennent propres à l'interpolation, pour obtenir des termes compris, soit entre ceux d'une même bande, soit entre ceux d'une même colonne, ou enfin tombant entre deux bandes et deux colonnes, c'est-à-dire portant à-la-fois deux indices fractionnaires.

Ceci n'a besoin d'explication que par rapport à la formule (III). Pour lui donner toute l'extension dont elle est susceptible, supposons que h et k désignent les accroissemens de x et de y; que la valeur représentée par $u_{0,0}$ réponde à $x=a$, $y=b$; et pour distinguer les nouvelles variables x et y, des indices qui, dans la formule comme dans le tableau, commencent par 0 et croissent de l'unité, dénotons maintenant ceux-ci par m et n : il viendra

$$x=a+mh,\quad y=b+nk,\quad \text{d'où}\quad m=\frac{x-a}{h},\quad n=\frac{y-b}{k}.$$

Enfin, pour abréger, posons $x-a=h'$, $y-b=k'$, et mettons simplement u au lieu de $u_{0,0}$, la formule (III) sera transformée en

$$\begin{aligned}
u_{x,y}=u&+\frac{h'}{h}\Delta_x u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta_x^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta_x^3 u+\text{etc.}\\
&+\frac{k'}{k}\Delta_y u+\frac{k'}{k}\frac{h'}{h}\Delta_{x,y}^{1+1}u+\frac{k'}{k}\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta_{x,y}^{2+1}u+\text{etc.}\\
&+\frac{k'(k'-k)}{k.2k}\Delta_y^2 u+\frac{k'(k'-k)}{k.2k}\frac{h'}{h}\Delta_{x,y}^{1+2}u+\text{etc.}\\
&+\frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k.2k.3k}\Delta_y^3 u+\text{etc.}\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Toutes les fois que les nombres $\frac{h'}{h}$, $\frac{k'}{k}$, tomberont dans la suite naturelle 0, 1, 2, 3,.... cette formule reproduira les valeurs de $u_{x,y}$ données pour des indices entiers; elle conviendra par conséquent aux indices fractionnaires, sous les mêmes restrictions que celle du n° 899.

On étendrait les considérations précédentes aux fonctions qui dépendent de trois ou d'un plus grand nombre de variables, mais avec une complication dans les signes, à laquelle on échapperait en partie, par le moyen de l'analogie des puissances avec les différences; c'est pourquoi nous ne pousserons pas maintenant plus loin ce sujet.

919. Nous nous bornerons à former les expressions des différences totales d'une fonction d'un nombre quelconque de variables, au moyen de ses différences partielles. Par les premières, on entend celles qui résultent du changement simultané de toutes les variables. Une fonction u de x, y, si l'on n'y fait d'abord varier que x, se changera en

$$u+\Delta_x u;$$

faisant ensuite varier y, dans cette seconde valeur, on en tirera

$$u+\Delta_x u+\Delta_y(u+\Delta_x u)=u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u.$$

Lorsque la fonction u contiendra trois variables x, y et z, en n'y faisant d'abord varier que les deux premières, elle deviendra

$$u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u;$$

expression que la variation de z changera en

$$\begin{aligned}&u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u+\Delta_z(u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u)\\ =&u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_z u+\Delta_y\Delta_x u+\Delta_z\Delta_x u+\Delta_z\Delta_y u\\ &+\Delta_z\Delta_y\Delta_x u.\end{aligned}$$

Ce procédé peut se continuer aussi loin qu'on voudra; mais on saisit bientôt la loi de ces résultats, en y supprimant la lettre u; car le premier devient alors

$$1+\Delta_x+\Delta_y+\Delta_y\Delta_x=(1+\Delta_x)(1+\Delta_y);$$

le second,

$$1+\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z+\Delta_x\Delta_y+\Delta_z\Delta_x+\Delta_z\Delta_y+\Delta_z\Delta_y\Delta_x=(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z);$$

et l'on en conclut qu'ils sont respectivement équivalens à

$$(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)u,\quad (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)u;$$

d'où, en retranchant l'état primitif u, on déduit pour les différences totales,

$$\begin{aligned}\Delta u&=\{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1\}u\\ &=\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_x\Delta_y u,\\ \Delta u&=\{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\}u\\ &=\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_z u+\Delta_x\Delta_y u+\Delta_x\Delta_z u+\Delta_z\Delta_y u+\Delta_x\Delta_y\Delta_z u.\end{aligned}$$

Pour obtenir la différence seconde, il suffit de changer u en Δu, dans la différence première. Lorsque la fonction ne renferme que deux variables, il vient

$$\Delta^2 u=\Delta_x\Delta u+\Delta_y\Delta u+\Delta_x\Delta_y\Delta u;$$

mettant pour Δu sa valeur, et développant, on trouve

$$\Delta_x^2 u+\Delta_y^2 u+\Delta_x^2\Delta_y^2 u+2\Delta_x\Delta_y u+2\Delta_x^2\Delta_y u+2\Delta_x\Delta_y^2 u,$$

résultat équivalent à

$$(\Delta_x + \Delta_y + \Delta_x\Delta_y)^n u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y) - 1\}^n u.$$

Ces formules se retrouvent et se généralisent avec la plus grande facilité, par l'analogie des puissances avec les différences; et l'on en conclut pour une fonction de trois variables,

$$\Delta^n u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z) - 1\}^n u.$$

920. Il est visible que les mêmes formules, lorsque $n=1$, doivent donner la différence première du produit d'un nombre quelconque de fonctions d'une seule variable. Si l'on fait, par exemple, $u = xyz$ dans

$$\Delta u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z) - 1\} u,$$

il suffira d'observer qu'alors les différences

$$\Delta_x u = yz\Delta x, \quad \Delta_x\Delta_y u = z\Delta x\Delta y, \quad \Delta_x\Delta_y\Delta_z u = \Delta x\Delta y\Delta z, \text{ etc.}$$

s'obtiennent en plaçant comme facteurs, avant la caractéristique Δ, les variables qui n'y sont pas appliquées comme indice.

M. Laplace a remarqué que cette propriété s'étendait à un ordre quelconque, et nous le démontrerons d'après lui, dans le chapitre IV.

921. Nous avons supposé que les variables indépendantes x et y ne recevaient que des accroissemens égaux; mais pour donner au calcul toute l'extension dont il est susceptible, on conçoit que ces variables éprouvent des changemens successifs quelconques et indépendans les uns des autres; et afin de mettre de la symétrie dans les expressions analytiques, on représente les accroissemens des variables indépendantes comme ceux de la fonction proposée.

Lorsqu'elle ne dépend que d'une seule variable, on établit que les valeurs

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n,$$

répondent aux quantités

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots x_n,$$

qui désignent les divers états par lesquels passe x; et l'on fait, en conséquence du n° 881,

$x_1 - x = \Delta x$		
$x_2 - x_1 = \Delta x_1$	$\Delta x_1 - \Delta x = \Delta^2 x$	
$x_3 - x_2 = \Delta x_2$	$\Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta^2 x_1$	$\Delta^2 x_1 - \Delta^2 x = \Delta^3 x$
etc.	etc.	etc.,

ce qui donne

$$x_n = x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \text{etc.};$$

d'où

$$u_n = \text{f}(x_n) = \text{f}\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.}\right].$$

En déduisant de cette formule les valeurs successives de u, on obtiendra Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., par la formule du n° 883; mais Lagrange a remarqué qu'on pouvait y parvenir aussi en remplaçant u_n par l'expression du n° 882, et laissant n indéterminée, par ce que l'équation

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$
$$= \text{f}\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.}\right],$$

doit se vérifier indépendamment de toute valeur particulière de cet indice. Si donc les deux membres étaient développés suivant les puissances de n, on égalerait entre eux les coefficiens d'une même puissance, et les équations qu'on obtiendrait par ce moyen serviraient à déterminer les différences de la fonction u par celles de la variable x.

Ce procédé est analogue à celui du n° 35, et s'étend de même aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Pour $u = \text{f}(x, y, z)$, par exemple, il faudrait poser

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$
$$= \text{f}\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.},\right.$$
$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{etc.},$$
$$\left.z + \frac{n}{1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 z + \text{etc.}\right].$$

En comparant les termes affectés d'une même puissance de n dans cette équation, on s'en procurera un nombre suffisant de nouvelles, pour déterminer Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc.

922. Les calculs qu'exige cette méthode la rendront le plus souvent fort laborieuse; il sera peut-être plus commode encore de déduire les unes des autres les différences successives, ce qui, pour les fonctions d'une seule variable, s'effectuera ainsi. Ayant obtenu $\Delta u = u_1 - u$, par le changement de x en $x + \Delta x$, dans u, on formera $\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u$, en substituant

dans Δu, au lieu de x et de Δx, les valeurs $x+\Delta x$ et $\Delta x+\Delta^2 x$; on formera ensuite $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, en substituant dans $\Delta^2 u$, au lieu de x, Δx, $\Delta^2 x$, les valeurs $x+\Delta x$, $\Delta x+\Delta^2 x$, $\Delta^2 x+\Delta^3 x$. Sans pousser plus loin, on voit que pour passer d'une différence quelconque à celle de l'ordre supérieur, il faut regarder en même temps comme variables x et ses différences, et que par conséquent, à chaque différentiation, le nombre des variables s'accroît de l'unité.

Remarques sur diverses expressions de u_n.

923. L'expression de u_n, obtenue dans le n° 882, et dont on a déjà vu des applications importantes, n'est pas la seule qu'on puisse conclure des équations (1), (2) et (3) du numéro 881. En les combinant de diverses manières, elles conduisent à des résultats variés que je vais faire connaître, parce qu'ils seront utiles dans la suite.

En ajoutant d'abord toutes les équations (1), et effaçant les termes communs aux deux membres du résultat, il vient

$$u_n = u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1};$$

ce qui présente la valeur u_n comme la somme de la première valeur et des accroissemens des valeurs successives.

924. La somme des équations

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \Delta u_{n-1}, \\ \Delta u_{n-1} &= \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-2}, \\ \Delta^2 u_{n-2} &= \Delta^2 u_{n-3} + \Delta^3 u_{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{n-1} u_1 &= \Delta^{n-1} u + \Delta^n u \end{aligned}$$

donne, après les réductions,

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-3} \ldots\ldots + \Delta^{n-2} u_1 + \Delta^{n-1} u + \Delta^n u.$$

Lorsqu'on veut se borner aux différences de l'ordre m, on fait.... $\Delta^{m+1} u = 0$, etc., d'où il suit $\Delta^m u = \Delta^m u_1 = \Delta^m u_2$, etc., et il vient alors

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-3} \ldots\ldots + \Delta^{m-1} u_{n-m} + \Delta^m u.$$

925. Si l'on prend la différence première de cette équation, il viendra

$$\Delta u_n = \Delta u_{n-1} + \Delta^2 u_{n-2} + \Delta^3 u_{n-3} + \Delta^4 u_{n-4} + \text{etc.} \qquad (1);$$

soumettant ce résultat à de nouvelles différentiations, en diminuant

chaque fois les indices d'une unité, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{n-1} &= \Delta^2 u_{n-2} + \Delta^3 u_{n-3} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-5} + \text{etc.};\\
\Delta^3 u_{n-2} &= \Delta^3 u_{n-3} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-5} + \text{etc.},\\
\Delta^4 u_{n-3} &= \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-5} + \text{etc.},\\
\Delta^5 u_{n-4} &= \Delta^5 u_{n-5} + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

et prenant la somme de ces équations, en observant que celle de leurs premiers membres est précisément la valeur de $\Delta^2 u_n$, qu'on tirerait de l'équation (1), on obtiendra

$$\Delta^2 u_n = \Delta^2 u_{n-2} + 2\Delta^3 u_{n-3} + 3\Delta^4 u_{n-4} + 4\Delta^5 u_{n-5} + \text{etc.} \qquad (2).$$

Différentiant cette dernière, en diminuant chaque fois les indices d'une unité, il viendra

$$\begin{aligned}
\Delta^3 u_{n-1} &= \Delta^3 u_{n-3} + 2\Delta^4 u_{n-4} + 3\Delta^5 u_{n-5} + 4\Delta^6 u_{n-6} + \text{etc.},\\
\Delta^4 u_{n-2} &= \Delta^4 u_{n-4} + 2\Delta^5 u_{n-5} + 3\Delta^6 u_{n-6} + \text{etc.},\\
\Delta^5 u_{n-3} &= \Delta^5 u_{n-5} + 2\Delta^6 u_{n-6} + \text{etc.},\\
\Delta^6 u_{n-4} &= \Delta^6 u_{n-6} + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

ajoutant encore ces résultats, en observant que la somme de leurs premiers membres est la valeur de $\Delta^3 u_n$, qu'on tirerait de l'équation (1), on trouvera

$$\Delta^3 u_n = \Delta^3 u_{n-3} + 3\Delta^4 u_{n-4} + 6\Delta^5 u_{n-5} + 10\Delta^6 u_{n-6} + \text{etc.} \qquad (3).$$

Les coefficiens numériques des équations (1), (2) et (3), sont les mêmes que ceux des développemens de $(1-a)^{-1}$, $(1-a)^{-2}$, $(1-a)^{-3}$, et la cause de cette identité est aisée à trouver dans l'analogie de leur formation. En effet, on passe d'abord du développement de

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \text{etc.},$$

à celui de

$$(1-a)^{-2} = (1-a)^{-1}(1-a)^{-1} =$$

$$(1+a+a^2+a^3+a^4+\text{etc.})(1+a+a^2+a^3+a^4+\text{etc.}) =$$

$$\left.\begin{array}{r}
1+a+a^2+a^3+\text{etc.}\\
+a+a^2+a^3+\text{etc.}\\
+a^2+a^3+\text{etc.}\\
+a^3+\text{etc.}\\
+\text{etc.}
\end{array}\right\},$$

résultat d'une forme semblable à la somme des équations qui ont donné (2); il en sera de même des autres cas.

Les coefficiens numériques de l'expression de $\Delta^r u_n$ seront donc les mêmes que ceux du développement de $(1-a)^{-r}$; et l'on posera, en conséquence,

$$\Delta^r u_n = \Delta^r u_{n-r} + \frac{r}{1}\Delta^{r+1}u_{n-r-1} + \frac{r(r+1)}{1.2}\Delta^{r+2}u_{n-r-2} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}\Delta^{r+3}u_{n-r-3} + \text{etc.}$$

Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$\Delta^r u_n = \Delta^r u_{n-r}(1-\Delta u^{-1})^{-r},$$

pourvu que dans le développement du second membre les exposans de la lettre u soient changés en indices.

926. La parfaite correspondance des expressions

$$u_x = u + \frac{x}{1}\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.},$$
$$u_x = u + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc. (898)},$$

lorsqu'on les arrête au même nombre de termes, solidement établie par les considérations du n° 903, fait voir que l'une de ces expressions peut être regardée comme une transformation de l'autre.

Il y a dans chaque terme le même nombre de facteurs variables; mais dans la seconde ces facteurs sont égaux ou leur différence est nulle, tandis que dans la première leur différence est constamment égale à l'unité. Ce changement des puissances en produits de facteurs inégaux, est un trait caractéristique du calcul qui nous occupe; et pour le bien saisir, il suffit de substituer à la seconde expression de u_x, rapportée ci-dessus, la série de Maclaurin, qui donne

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{du_x}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3u_x}{dx^3} + \text{etc. (84)},$$

en observant de faire $x=0$ après les différentiations. On voit que dans la première, les différences, qui se rapportent aussi à la valeur $x=0$, ont pris la place des coefficiens différentiels.

La manière de parvenir à cette première expression est aussi parfaitement analogue à la marche qu'on a suivie pour obtenir la série de

Maclaurin; car donner successivement à la fonction u_x les valeurs

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ldots\ldots u_n,$$

comme on l'a fait dans le n° 903, c'est établir que u_x et ses différences successives deviennent respectivement

$$u,\quad \Delta u,\quad \Delta^2 u,\quad \text{etc.},\quad \text{lorsqu'on y pose } x=0.$$

C'est donc comme si on calculait d'abord ces valeurs en général, et qu'ensuite on y fit l'hypothèse indiquée.

Cette marche, qui ne serait pas la plus simple si l'on prenait l'expression de u_x ordonnée suivant les puissances de x, le devient quand on fait

$$u_x = A + Bx + Cx(x-h) + Dx(x-h)(x-2h) + \text{etc.},$$

à cause de la facilité avec laquelle s'obtiennent les différences successives d'un produit composé de facteurs équidifférens.

En effet, on a

$$\Delta.x(x-h)(x-2h)\ldots\ldots[x-(m-1)]h =$$

$$\left.\begin{array}{l}(x+h)x(x-h)\ldots\ldots\ldots\ldots[x-(m-2)]h\\ \quad -x(x-h)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[x-(m-1)h]\end{array}\right\} =$$

$$x(x-h)\ldots\ldots\ldots[x-(m-2)h]\{x+h-[x-(m-1)h]\} =$$
$$x(x-h)\ldots\ldots\ldots[x-(m-2)h]mh,$$

résultat ne comprenant que $m-1$ facteurs variables multipliés par leur nombre primitif m, et par leur différence commune h, ce qui est tout-à-fait analogue à la différentielle de x^m (6).

Au moyen de ce résultat, on tirera de

$$\begin{array}{llllll} u_x = & A + & Bx + & Cx(x-h) + & Dx(x-h)(x-2h) & + \text{etc.},\\ \Delta u_x = & & Bh + & 2Chx & + 3Dhx(x-h) & + \text{etc.},\\ \Delta^2 u_x = & & & 2Ch^2 & + 2.3Dh^2x & + \text{etc.},\\ \Delta^3 u_x = & & & & 2.3Dh^3 & + \text{etc.},\\ \text{etc.}; & & & & & \end{array}$$

posant $x=0$, on obtiendra

$$A=u,\quad B=\frac{\Delta u}{h},\quad C=\frac{\Delta^2 u}{1.2h^2},\quad D=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3},\quad \text{etc.},$$

et par conséquent

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{\Delta u}{h} + \frac{x(x-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \text{etc.},$$

résultat qui se déduirait de l'expression du n° 899, en y faisant $a=0$,

ou en changeant $x-a$ en x. Le procédé que je viens d'exposer pour y parvenir, a été indiqué dans le *Dictionnaire de Mathématiques* de l'*Encyclopédie Méthodique*, t. II, p. 234, 2e colonne.

927. Dans la formule ci-dessus, les facteurs vont en décroissant; mais si l'on veut établir le contraire, il faut d'abord observer que

$$\Delta . x(x+h)(x+2h) \ldots\ldots\ldots\ldots [x+(m-1)h] = \left.\begin{matrix}(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x+mh)\\ -x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots [x+(m-1)h]\end{matrix}\right\} = (x+h)(x+2h)\ldots\ldots [x+(m-1)h]mh.$$

Posant ensuite

$$u_x = A + Bx + Cx(x+h) + Dx(x+h)(x+2h) + \text{etc.},$$

on en déduira

$$\begin{aligned}\Delta u_x &= Bh + 2Ch(x+h) + 3Dh(x+h)(x+2h) + \text{etc.},\\ \Delta^2 u_x &= 2Ch^2 + 2.3Dh^2(x+2h) + \text{etc.},\\ \Delta^3 u_x &= 2.3Dh^3 + \text{etc.},\end{aligned}$$

etc.;

mais alors, pour faire disparaître la variable x de tous les termes où elle est restée, il faut

dans u_x, poser $x=0$, d'où .... $A=u$,

$\Delta u_x, \ldots\ldots x+h=0, \ldots\ldots u_x=u_{-1}$ et . $B=\frac{\Delta u_{-1}}{h}$,

$\Delta^2 u_x, \ldots\ldots x+2h=0, \ldots\ldots u_x=u_{-2}, \ldots\ldots C=\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2h^2}$,

$\Delta^3 u_x, \ldots\ldots x+3h=0, \ldots\ldots u_x=u_{-3}, \ldots\ldots D=\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3h^3}$,

etc.,

et l'on a enfin

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{\Delta u_{-1}}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_{-2}}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u_{-3}}{h^3} + \text{etc.}$$

Ici les différences ne sont pas rapportées à la même valeur de u, comme dans la première formule; mais si l'on prend les différences en rétrogradant, et qu'on marque ces nouvelles différences par ${}^{\backprime}\Delta$, on aura

$$\begin{aligned}\Delta u_{-1} &= u - u_{-1} &&= {}^{\backprime}\Delta u,\\ \Delta^2 u_{-2} &= u - 2u_{-1} + u_{-2} = \Delta u - \Delta u_{-1} &&= {}^{\backprime}\Delta^2 u,\\ \Delta^3 u_{-3} &= u - 3u_{-1} + 3u_{-2} - u_{-3} = {}^{\backprime}\Delta^2 u - {}^{\backprime}\Delta^2 u_{-1} &&= {}^{\backprime}\Delta^3 u,\end{aligned}$$

etc.;

et de cette manière on pourra écrire l'expression

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{{}^{\backprime}\Delta u}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{{}^{\backprime}\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{{}^{\backprime}\Delta^3 u}{h^3} + \text{etc.},$$

à laquelle on parviendrait directement en supposant qu'à chaque différentiation, x se changeât en $x-h$, et en retranchant le second état du premier.

L'expression de ${}^{\backprime}\Delta^n u$, relative à cette hypothèse, se tirerait de celle du n° 883, en y changeant le signe des indices de u, et quand n est impair, celui de chaque terme. Quant aux expressions de u_x, obtenues dans le numéro précédent et dans celui-ci, elles peuvent évidemment s'abréger ainsi :

$$u_x = (1+\Delta)^{\frac{x}{h}}u, \quad u_x = (1-{}^{\backprime}\Delta)^{-\frac{x}{h}}u.$$

928. En substituant aux produits de facteurs équidifférens, des fonctions analogues, on construirait d'autres formules d'interpolation. Si l'on posait, par exemple,

$$u_x = A + B\sin x + C\sin x\sin(x-h) + D\sin x\sin(x-h)\sin(x-2h) + \text{etc.},$$

et qu'on en prît les différences successives, comme dans le n° 926, au moyen des formules du n° 892, on verrait bientôt que la supposition de $x=0$, qui fait évanouir $\sin x$, et réduit la valeur de u_x à son premier terme, ne laisserait subsister que les deux premiers dans Δu_x, les trois premiers dans $\Delta^2 u_x$, et ainsi de suite, ce qui fournirait encore le moyen de déterminer les coefficiens A, B, C, D, etc.

Mais il n'est pas toujours permis, ce me semble, de regarder comme une véritable transformation le procédé ci-dessus, par lequel on ne fait qu'assujétir un nombre limité des premiers termes d'une série choisie arbitrairement, à reproduire un pareil nombre de valeurs de la fonction u_x, correspondantes à celles de x prises dans la suite 0, h, $2h$, etc., quand même les coefficiens présenteraient une loi qui pourrait se continuer à l'infini. Dirait-on, par exemple, que l'équation

$$u_x = A'\sin\frac{\pi x}{a} + A''\sin\frac{2\pi x}{a} + A'''\sin\frac{3\pi x}{a} + \text{etc.} \quad (908)$$

est le développement de $u=0$, ou que la courbe ondulée qu'elle représente est une ligne droite, à cause que la fonction a un nombre infini de valeurs égales à zéro, et la courbe un pareil nombre de points communs avec l'axe des abscisses?

Il n'en est pas ainsi de la série de Maclaurin, parce que les valeurs qu'on est censé donner à la fonction u_x, se succèdent à des intervalles infiniment petits, ou, ce qui est la même chose, elle est la limite commune aux deux séries

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{\Delta u}{h} + \frac{x(x-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \text{etc.},$$
$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{{}'\Delta u}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{{}'\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{{}'\Delta^3 u}{h^3} + \text{etc.},$$

parce que la supposition de $h=0$, qui change les produits variables en puissances, change aussi les quantités

$$\frac{\Delta u_x}{h},\ \frac{\Delta^2 u_x}{h^2},\ \frac{\Delta^3 u_x}{h^3},\ \text{etc., et}\ \frac{{}'\Delta u_x}{h},\ \frac{{}'\Delta^2 u_x}{h^2},\ \frac{{}'\Delta^3 u_x}{h^3},\ \text{etc., en}\ \frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.},$$

et qu'un nombre limité des premiers termes de la série, représentant l'ordonnée d'une courbe osculatrice de la courbe donnée, au point où $x=0$, ne s'éloigne que peu des vraies valeurs de u_x, tant que celles de x demeurent assez petites pour que cette série soit convergente. Le passage des différences aux différentielles, établit, par le rapprochement des points communs aux deux courbes que l'on considère, la loi de continuité dans la succession de ces points.

Développement des différences par les différentielles.

929. Le théorème de Taylor, comprenant celui de Maclaurin (84), n'est autre chose que la limite de l'expression

$$u_x = u + \frac{x-a}{h}\frac{\Delta u}{1} + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u}{1.2} + \text{etc. (899)},$$

servant à tirer la valeur générale u_x de celles que cette fonction et ses différences prennent par la supposition de $x=a$. Si l'on écrit l'expression précédente comme on le voit ci-dessous,

$$u_x = u + \frac{(x-a)}{1}\frac{\Delta u}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2}$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \text{etc.},$$

et qu'on y fasse $h=0$, en observant que les rapports

$$\frac{\Delta u}{h},\ \frac{\Delta^2 u}{h^2},\ \frac{\Delta^3 u}{h^3},\ \text{etc., ont pour limites}\ \frac{du}{da},\ \frac{d^2u}{da^2},\ \frac{d^3u}{da^3},\ \text{etc.},$$

on obtiendra

$$u_x = u + \frac{du}{da}\frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Posant ensuite $x-a=h$, et changeant a en x, on aura évidemment

$$u_{x+h}=u_x+\frac{du_x}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u_x}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u_x}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc. (*)}.$$

De là on conclut, en supprimant l'indice x, qui n'est plus nécessaire,

$$\Delta u=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

930. Si l'on remplace par $\frac{du}{dx}h$, la variable x dans le développement de e^x (*Int.* 22), on trouvera que

$$e^{\frac{du}{dx}h}-1=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

développement qui ne diffère de celui de Δu du numéro précédent, qu'en ce que les puissances de du y tiennent la place des différentielles successives de u; on peut donc poser

$$\Delta u=e^{\frac{du}{dx}h}-1,$$

pourvu qu'on ait soin d'appliquer à la caractéristique d les exposans des puissances de du. C'est Lagrange qui a fait le premier cette remarque, et c'est de là qu'il est parti pour donner une suite de formules élégantes, fondées sur l'analogie des puissances avec les différences.

On peut encore simplifier cette manière d'écrire, en posant

$$u+\Delta u=u_1=e^{h\frac{d}{dx}}u,\quad \Delta u=\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)u,$$

car il n'y aura rien à changer dans le développement; mais il faut bien se rappeler que la lettre d exprimant une caractéristique et non pas

(*) C'est à peu près ainsi que Taylor a découvert le théorème qui porte son nom; et quand on y est parvenu, la théorie du Calcul différentiel n'offre plus aucune difficulté; ce qu'on vient de voir suffit donc pour montrer comment le Calcul différentiel se déduit de celui des différences; et si l'on saisit bien les remarques faites dans les n[os] 898, 928, on trouvera peut-être qu'elles éclaircissent et confirment entièrement les idées exposées dans la préface (page XXIV—XXV), sur les principes qui tiennent de plus près à la nature du premier de ces calculs.

une quantité, les équations ci-dessus ne deviennent effectives que lorsque leur second membre est développé.

On a pareillement

$$u_n = e^{nh\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}u, \quad \Delta^n u = \left(e^{h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^n u.$$

La première de ces formules est presqu'évidente par elle-même, puisque u répondant à x, u_n répond à $x+nh$, et s'obtient par conséquent par le seul changement de h en nh, dans l'expression de u_1.

Celle de $\Delta^n u$, posée seulement d'après l'analogie par Lagrange, est une conséquence bien simple de la formule du n° 883. En effet, si l'on met dans celle-ci, à la place de u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, etc., leurs expressions formées d'après celle de u_n indiquée ci-dessus, il viendra

$$\left.\begin{aligned}\Delta^n u = e^{nh\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}u - \frac{n}{1}e^{(n-1)h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}u + \frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}u \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}e^{(n-3)h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}u + \text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

équation rigoureusement exacte, lorsque son second membre est développé, et qui ne cessera pas de l'être si on l'écrit ainsi

$$\Delta^n u = \left\{e^{nh\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - \frac{n}{1}e^{(n-1)h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} + \frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - \text{etc.}\right\}u;$$

car le développement ne changera pas pour cela. Mais si l'on observe que le développement de e^{mt} est le même que celui de $(e^t)^m$, et qu'on fasse en conséquence $h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = t$, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^n u &= \left\{(e^t)^n - \frac{n}{1}(e^t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(e^t)^{n-2} - \text{etc.}\right\}u \\ &= (e^t - 1)^n u = \left(e^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h} - 1\right)^n u.\end{aligned}$$

Cette démonstration, très-simple et très-élégante, a été donnée par M. Brinkley, dans les *Transactions Philosophiques* de 1807 (*).

931. M. Laplace, qui démontra le premier cette importante formule,

(*) J'en dois la connaissance à M. J. Herschel, qui en a fait usage dans l'Appendice mis à la suite de la traduction anglaise qu'il a bien voulu faire, conjointement avec MM. Babbage et Peacock, de mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral.*

prit d'abord un autre tour, aussi fort simple et fort élégant. Ayant remarqué qu'en général

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

A', A'', etc. désignant des coefficiens qui ne dépendent que de n, et par conséquent qui doivent rester les mêmes, quelle que soit la fonction u, il considéra en particulier le cas où $u = e^x$, qui donne

$$\frac{d^m u}{dx^m} = e^x \text{ (22)}, \quad \text{et} \quad \Delta^m u = e^x (e^h - 1)^m \text{ (891)},$$

quelle que soit m, et par conséquent

$$(e^h - 1)^n = h^n + A' h^{n+1} + A'' h^{n+2} + \text{etc.};$$

d'où il suit que les coefficiens A', A'', etc., doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h - 1)^n$, puisque l'accroissement h doit rester indéterminé. D'ailleurs il n'est pas difficile de voir qu'on passerait du second membre de l'équation ci-dessus, au développement posé pour $\Delta^n u$, si on changeait les puissances de h en facteurs de la forme...... $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$, $\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1}$, etc., ce qui serait la même chose que d'écrire...... $\left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^n u$, au lieu de $(e^h - 1)^n$.

La forme du développement de $\Delta^n u$ serait constatée en prenant les différences successives de l'expression de Δu; mais on la trouve tout de suite par la formule du n° 883, en y substituant pour u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, etc. les développemens que nous n'avons fait qu'indiquer dans le numéro précédent, et qui sont tous semblables à l'expression

$$u_n = u + \frac{du}{dx} \frac{nh}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{n^2 h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{n^3 h^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

on voit bien alors que le résultat ne doit contenir les différentielles de u qu'au premier degré; et l'on sait d'ailleurs que le premier terme du développement cherché doit être de la même forme que $d^n u$, ce qu'on reconnaîtrait aussi par le développement de $(e^h - 1)^n$, qui est celui de

$$\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right)^n = h^n \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2.3} + \text{etc.}\right)^n.$$

932. M. Brinkley, dans le Mémoire déjà cité, a remarqué que les

coefficiens des diverses puissances de h, tirés du développement ci-dessus, dérivaient aussi des différences de la fonction x^m. Cela se voit en faisant, dans la formule du n° 883, les substitutions indiquées à la fin du numéro précédent, ou en développant l'expression

$$\Delta^n u = \left\{ e^{nh\frac{d}{dx}} - \frac{n}{1} e^{(n-1)h\frac{d}{dx}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h\frac{d}{dx}} - \text{etc.} \right\} u,$$

et ordonnant le résultat par rapport aux puissances de h; il vient alors

$$\begin{aligned}\Delta^n u = &\left\{ 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \text{etc.} \right\} u \\ &+ \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \text{etc.} \right\} \frac{du}{dx}\frac{h}{1} \\ &+ \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \text{etc.} \right\} \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left\{ n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.} \right\} \frac{d^iu}{dx^i}\frac{h^i}{1.2.3\ldots i} \\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

où les expressions comprises dans les accolades sont les valeurs que prend la première expression de $\Delta^n.x^m$ du n° 887, lorsqu'on y fait $x=0$, $h=1$, $m=1$, $=2,\ldots\ldots =i$, et sont nulles pour les valeurs entières de i moindres que n.

Pour marquer cette origine, M. Brinkley les représente en général par $\Delta^n.0^i$; et comme $\Delta^n.0^n = 1.2.3\ldots\ldots n$ (887), il écrit

$$\Delta^n u = \frac{d^nu}{dx^n}h^n + \frac{\Delta^n.0^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + \frac{\Delta^n.0^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

On peut aussi, par le procédé du n° 94, déduire les uns des autres, les coefficiens A', A'', etc., du développement de $(e^h-1)^n$. En observant que

$$\frac{d.l\,(e^h-1)^n}{dh} = \frac{ne^h}{e^h-1} = \frac{n}{1-e^{-h}} = \frac{n}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2.3} - \frac{h^4}{2.3.4} + \text{etc.}},$$

on trouvera sans peine

$$\begin{aligned} A' &= \tfrac{1}{2}n, \\ 2A'' &= \tfrac{1}{2}(n+1)A' - \tfrac{1}{2.3}n, \\ 3A''' &= \tfrac{1}{2}(n+2)A'' - \tfrac{1}{2.3}(n+1)A' + \tfrac{1}{2.3.4}n, \\ 4A'''' &= \tfrac{1}{2}(n+3)A''' - \tfrac{1}{2.3}(n+2)A'' + \tfrac{1}{2.3.4}(n+1)A' - \tfrac{1}{2.3.4.5}n, \end{aligned}$$
etc.

933. La même relation entre les puissances et les différences se retrouve dans les fonctions d'un nombre quelconque de variables; et pour la mettre hors de doute, il suffira de considérer le cas où u dépendrait en même temps de x et de y. Si l'on conçoit que ces deux variables deviennent respectivement $x+h$ et $y+k$, la fonction u se changera en

$$\begin{aligned} u &+ \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right\} \\ &+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}hk^2 + \frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\} \\ &+ \text{etc.} \ (33); \end{aligned}$$

et si de cette formule on retranche u, le reste sera le développement de Δu, différence totale de u, et se formera de celui de l'expression

$$e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k} - 1,$$

en observant de transporter à la caractéristique d les exposans de du, c'est-à-dire de changer le produit $\frac{du^p}{dx^p}\frac{du^q}{dy^q}$ en $\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}$, ou mieux encore en posant l'équation

$$\Delta u = \left(e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}} - 1\right)u,$$

et en joignant l'u à la caractéristique d, lorsqu'on développera.

On aura ensuite, par analogie,

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}} - 1\right)^n u.$$

En effet, on verra par les développemens successifs que produisent les substitutions réitérées de $x+h$ et $y+k$, dans ceux de Δu, $\Delta^2 u$, etc., que

$$\begin{aligned} \Delta^n u = &\left\{\frac{d^n u}{dx^n}h^n + A'\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + A''\frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \left\{B\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + B'\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}h^n k + B''\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}h^{n-1}k^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

et si l'on prend $u = e^{x+y}$, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} = \text{etc.} = e^{x+y},$$
$$\Delta u = e^{x+h+y+k} - e^{x+y} = e^{x+y}(e^{h+k} - 1),$$
$$\Delta^2 u = e^{x+y}(e^{h+k} - 1)^2, \ldots . \Delta^n u = e^{x+y}(e^{h+k} - 1)^n,$$

valeurs qui changeront l'expression générale de $\Delta^n u$ en

$$\begin{aligned}(e^{h+k} - 1)^n = {} & h^n + A'h^{n-1}k + A''h^{n-2}k^2 + A'''h^{n-3}k^3 + \text{etc.} \\ & + Bh^{n+1} + B'h^n k + B''h^{n-1}k^2 + B'''h^{n-2}k^3 + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}:\end{aligned}$$

or les accroissemens h et k devant rester indéterminés, il en résulte que les coefficiens numériques A', A'', ..., B, B', ..., etc., du second membre seront identiques avec ceux du développement du premier.

Il doit être évident, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de nonveaux détails, que si u dépend de x, y, z, etc., et que h, k, l, etc. soient les accroissemens respectifs de ces variables,

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \text{etc.}} - 1\right)^n u;$$

car en opérant comme ci-dessus, on ramènerait la détermination des coefficiens numériques à celle du développement de $(e^{h+k+l+\text{etc.}} - 1)^n$.

934. A l'égard des différences partielles des fonctions de deux variables, on a d'abord les équations

$$\Delta_x^m u = \left(e^{h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^m u, \qquad \Delta_y^n u = \left(e^{k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}} - 1\right)^n u \text{ (930)}.$$

En combinant la seconde formnle avec la première, pour développer

$$\Delta_y^n(\Delta_x^m u) = \Delta_{x,y}^{m+n} u,$$

on obtient un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y}^{m+n} u = {} & \frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}x^m\mathrm{d}y^n} h^m k^n + A\frac{\mathrm{d}^{m+n+1}u}{\mathrm{d}x^{m+1}\mathrm{d}y^n} h^{m+1}k^n + \text{etc.} \\ & + A'\frac{\mathrm{d}^{m+n+1}u}{\mathrm{d}x^m\mathrm{d}y^{n+1}} h^m k^{n+1} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

où les coefficiens A, A', etc., sont indépendans des variables x, y et de leurs accroissemens h, k; et l'on tombe sur une expression de la même forme lorsqu'on développe le second membre de l'équation

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u = \left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^m\left(e^{k\frac{d}{dy}}-1\right)^n u:$$

il ne s'agit donc plus que de constater l'identité des coefficiens, ce qui se fait encore en posant $u=e^{x+y}$, d'où il résulte

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u = e^{x+y}(e^h-1)^m(e^k-1)^n,$$

et par où l'on voit que la formation des coefficiens dont il s'agit, est la même dans la première expression que dans la seconde.

935. La même marche mène à la démonstration de la formule générale du n° 919. En effet, les opérations successives indiquées dans ce numéro, devant conduire à une expression de la forme

$$\begin{aligned}\Delta^n u = {} & A\Delta_x^n u + A'\Delta_{x,y}^{(n-1)+1} u + A''\Delta_{x,y}^{(n-2)+2} u + \text{etc.}\\ & + B\Delta_x^{n+1} u + B'\Delta_{x,y}^{n+1} u + B''\Delta_{x,y}^{(n-1)+2} u + \text{etc.}\\ & + C\Delta_x^{n+2} u + C'\Delta_{x,y}^{(n+1)+1} u + C''\Delta_{x,y}^{n+2} u + \text{etc.}\\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

que la supposition de $u=e^{x+y}$ change en

$$\begin{aligned}(e^{h+k}-1)^n = {} & A(e^h-1)^n + A'(e^h-1)^{n-1}(e^k-1) + A''(e^h-1)^{n-2}(e^k-1)^2 + \text{etc}\\ & + B(e^h-1)^{n+1} + B'(e^h-1)^n\ (e^k-1) + B''(e^h-1)^{n-1}(e^k-1)^2 + \text{etc.}\\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

on connaîtra les coefficiens A, A', etc., B, etc., si l'on obtient pour le premier membre un développement de la même forme que le second membre, ce qui est facile, en observant que

$$(e^{h+k}-1)^n = \{[1+(e^h-1)][1+(e^k-1)]-1\}^n:$$

le coefficient d'un terme quelconque $(e^h-1)^r(e^k-1)^s$ dans ce développement, sera donc celui de $\Delta_{x,y}^{r+s} u$ dans celui de $\Delta^n u$; ainsi l'on pourra poser

$$\Delta^n u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1\}^n u,$$

On parviendra au même résultat, en tirant des expressions de $\Delta_x u$ et de $\Delta_y u$, celles de

$$e^{h\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta_x, \quad e^{k\frac{d}{dy}} = 1 + \Delta_y,$$

et substituant ces dernières dans

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}} - 1\right)^n u \ (933).$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs, d'après lesquels on voit évidemment que, quel que soit le nombre des variables de la fonction u,

$$\Delta^n u = \{(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) \ldots\ldots - 1\}^n u.$$

936. Nous avons supposé jusqu'ici que les accroissemens des variables indépendantes étaient constans; dans le cas contraire, l'application du théorème de Taylor fournit une expression très-élégante du développement de $\Delta^n u$, lorsque u ne renferme que la variable x. Pour y parvenir, soit

$$x_1 - x = h_1, \quad x_2 - x = h_2, \quad x_3 - x = h_3, \ldots\ldots x_n - x = h_n;$$

nous obtiendrons

$$u_1 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_1}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h_1^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h_1^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$u_2 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_2}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h_2^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h_2^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$u_3 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_3}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h_3^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h_3^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = u + \frac{du}{dx}\frac{h_n}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h_n^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h_n^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et substituant ces valeurs dans la formule

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \text{etc.},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta^n u = \ & u\left\{1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}\\
&+ \frac{1}{1}\frac{du}{dx}\left\{h_n - \frac{n}{1}h_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h_{n-3} + \text{etc.}\right\}\\
&+ \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\left\{h_n^2 - \frac{n}{1}h_{n-1}^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}h_{n-2}^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h_{n-3}^2 + \text{etc.}\right\}\\
&+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\left\{h_n^3 - \frac{n}{1}h_{n-1}^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}h_{n-2}^3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h_{n-3}^3 + \text{etc.}\right\}\\
&+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Le coefficient de u est identiquement nul ; car c'est le développement de $(1-1)^n$; de plus, si l'on changeait en exposans les indices de la lettre h, les séries qui multiplient $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., deviendraient respectivement égales aux développemens de $(h-1)^n$, $(h^2-1)^n$, $(h^3-1)^n$, etc., privés de leur dernier terme, qui est ∓ 1, suivant que n est impair ou pair : on peut donc remplacer ces séries par les quantités

$$(h-1)^n \pm 1,\quad (h^2-1)^n \pm 1,\quad (h^3-1)^n \pm 1,\quad \text{etc.},$$

en observant, lorsqu'on développera, de convertir en indices tous les exposans n, $n-1$, $n-2$, etc., et de ne laisser à la lettre h que les exposans 1, 2, 3, etc., dont elle est affectée dans les parenthèses ci-dessus : c'est ainsi que M. Prony a présenté la formule suivante :

$$\Delta^n u = \frac{1}{1}\frac{du}{dx}[(h-1)^n \pm 1] + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}[(h^2-1)^n \pm 1] + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}[(h^3-1)^n \pm 1] + \text{etc.}$$

937. La valeur que prend la fonction u, lorsqu'on y change x en $x+nh$, est, par le théorème de Taylor, *Développement des différentielles par les différences.*

$$u + \frac{du}{dx}\frac{nh}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{n^2h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{n^3h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et par l'expression de u_n (882),

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.};$$

on a donc ainsi deux développemens de la même expression, l'un ordonné suivant les puissances de n, et l'autre suivant des produits de facteurs équidifférens. En effectuant ces produits et comparant les termes affectés de la même puissance de n, dans les deux expressions, il vient

$$\frac{du}{dx}\,h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}\,h^2 = \Delta^2 u - \Delta^3 u + \tfrac{11}{12}\Delta^4 u - \text{etc.},$$
$$\frac{d^3u}{dx^3}\,h^3 = \Delta^3 u - \tfrac{3}{2}\Delta^4 u + \text{etc.},$$
$$\frac{d^4u}{dx^4}\,h^4 = \Delta^4 u - \text{etc.},$$
etc.

Euler, qui trouva le premier ces valeurs, à peu près comme on vient de le voir, n'en remarqua pas la loi; et elle n'est évidente que pour la première, par la formation de laquelle on voit clairement que l'on peut écrire

$$\frac{du}{dx}h = \{l(1+\Delta)\}u.$$

La même chose résulterait aussi du renversement de l'équation

$$\Delta u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)u,$$

en y supprimant d'abord la lettre u dans les deux membres; car

$$\Delta = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) \text{ donne } e^{h\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta, \text{ d'où } h\frac{d}{dx} = l(1+\Delta);$$

et en remettant la lettre u, on formera la valeur de $\frac{du}{dx}h$.

Par analogie, on en conclura que

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \{l(1+\Delta)\}^n u,$$

ce qu'on vérifiera bien aisément, puisqu'on sait déjà que la valeur cherchée doit être de la forme

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \Delta^n u + B'\Delta^{n+1}u + B''\Delta^{n+2}u + \text{etc.}$$

En faisant $u = e^x$ dans cette équation, on en déduira

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.};$$

et pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffira d'observer que $h^n = \{l(1+e^h-1)\}^n$, parce que le développement de $l(1+e^h-1)$, ordonné suivant les puissances de e^h-1, étant

$$(e^h - 1) - \tfrac{1}{2}(e^h - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(e^h - 1)^3 - \tfrac{1}{4}(e^h - 1)^4 + \text{etc.},$$

si l'on pose, pour abréger, $e^h - 1 = \theta$, il viendra

$$\{\theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{1}{3}\theta^3 - \tfrac{1}{4}\theta^4 + \text{etc.}\}^n = \theta^n + B'\theta^{n+1} + B''\theta^{n+2} + \text{etc.},$$

équation par laquelle les coefficiens B', B'', etc., seront déterminés; et

comme en écrivant dans le second membre $\Delta^n u$, $\Delta^{n+1}u$, etc., à la place de θ^n, θ^{n+1}, etc., on aura la valeur de $\frac{d^n u}{dx^n}h^n$, il s'ensuit que cette valeur est égale à ce que devient le développement de $\{l(1+\theta)\}^n$, lorsqu'on y effectue un semblable changement, c'est-à-dire que $\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\{l(1+\Delta)\}^n u$.

On déterminerait successivement les coefficiens B', B'', etc., les uns par les autres, en appliquant à l'expression

$$(\theta-\tfrac{1}{2}\theta^2+\tfrac{1}{3}\theta^3-\tfrac{1}{4}\theta^4+\text{etc.})^n$$

la méthode du n° 94.

Nous ferons observer que l'expression de $\Delta^r u$, obtenue dans le n° 911, et qui suppose $h=1$, étant mise sous la forme

$$\frac{\Delta^r u}{\left(\frac{1}{m}\right)^r}=\frac{1}{1.2\ldots r}\left\{\alpha\Delta^r u+\frac{\frac{\beta}{m}+\alpha A'}{r+1}\Delta^{r+1}u+\frac{\frac{\gamma}{m^2}+\frac{\beta}{m}A'+\alpha B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u+\text{etc.}\right\},$$

donne aussi

$$\frac{d^r u}{dx^r}=\frac{1}{1.2\ldots r}\left\{\alpha\Delta^r u+\frac{\alpha A'}{r+1}\Delta^{r+1}u+\frac{\alpha B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u+\text{etc.}\right\},$$

lorsqu'on y fait $\frac{1}{m}=dx$, et qu'on en prend la limite dans l'hypothèse de m infinie; et parce que $\alpha=\Delta^r.t^r=1.2.3\ldots\ldots r$ (885), elle se réduit à

$$\frac{d^r u}{dx^r}=\Delta^r u+\frac{A'}{r+1}\Delta^{r+1}u+\frac{B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u+\text{etc.},$$

ce qui fait voir l'origine des coefficiens A', B'', etc.

938. Les formules précédentes supposent que les différences de la variable x soient constamment égales à h; quand cette circonstance n'a pas lieu, c'est aux expressions de u_x, obtenues dans les n°s 903 et 907, qu'il faut recourir. En différentiant la première, on en tire

$$\frac{du}{dx}=\frac{d(x-a)}{dx}\delta u+\frac{d.(x-a)(x-a_1)}{dx}\delta^2 u+\text{etc.},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2.(x-a)(x-a_1)}{dx^2}\delta^2 u+\text{etc.},$$
etc.

On a donc le moyen de déterminer, dans tous les cas, les coefficiens différentiels d'une fonction, sans connaître son expression analytique, mais lorsqu'on a seulement un certain nombre de ses valeurs. Cependant, il ne faut pas oublier les restrictions indiquées dans les nos 898, 908, car elles conviennent également aux formules que nous venons de construire, et dont l'application n'est sûre que lorsqu'elles sont convergentes : encore faut-il observer que des erreurs peu considérables, dans les valeurs données de u, devenant très-grandes relativement aux valeurs des différences d'un ordre élevé de cette fonction, rendent souvent très-inexactes les valeurs des coefficiens différentiels qu'on en déduit (*).

939. L'expression

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h'}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

que le théorème de Taylor donne pour le développement de ce que devient u, lorsque x reçoit l'accroissement quelconque h', peut être changée en une formule d'interpolation, en y substituant, au lieu des coefficiens différentiels, leurs expressions trouvées ci-dessus, en différences. En nommant u' la nouvelle valeur de u, il vient d'abord

$$u'=u+\frac{h'}{1h}[1(1+\Delta)]u+\frac{h'^2}{1.2h^2}[1(1+\Delta)]^2u+\frac{h'^3}{1.2.3h^3}[1(1+\Delta)]^3u+\text{etc.}(937),$$

formule ordonnée suivant les puissances de h', mais qui n'est guère applicable, à moins qu'on ne l'ordonne par rapport à la caractéristique Δ; or, il est aisé de voir qu'elle doit prendre alors la forme

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(A\frac{h'}{h}+A'\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2u+\left(B\frac{h'}{h}+B'\frac{h'^2}{h^2}+B''\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3u+\text{etc.}$$

Si l'on y fait ensuite $u=e^x$, d'où $u'=e^{x+h'}$, il en résulte

$$e^{h'}=1+\frac{h'}{h}(e^h-1)+\left(A\frac{h'}{h}+A'\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h-1)^2+\text{etc.};$$

(*) Euler a essayé de se servir de ce procédé pour comparer les observations de la Lune avec la théorie, par l'introduction des différences dans les équations différentielles que fournit la loi de la gravitation (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, année 1763, page 223). C'est aussi ce qu'a fait M. Laplace, pour déterminer l'orbite des comètes (*Mécan. céleste*, t. I, page 200.)

et l'on peut donner au premier membre la forme du second, en observant que $e^{h'} = [1+(e^h-1)]^{\frac{h'}{h}}$; il suffira donc de remplacer, dans cette dernière expression, e^h-1 par la caractéristique Δ, pour arriver à l'équation

$$u' = (1+\Delta)^{\frac{h'}{h}} u,$$

dont le développement donnera précisément la formule du n° 899.

Il est maintenant évident que cette formule ne peut être légitimement employée à représenter une fonction inconnue, que quand l'intervalle h, compris entre les valeurs de la variable indépendante, est assez petit pour que les expressions du n° 937 soient convergentes et donnent au moins une valeur approchée des coefficiens différentiels, ce qui confirme bien les remarques faites dans le n° 928.

940. Si l'on retranche u de u', la formule précédente donnera

$$\Delta' u = \{(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}} - 1\} u,$$

et l'on en conclura, par l'analogie déjà si souvent vérifiée, entre les différences et les puissances, que

$$\Delta'^n u = \{(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}} - 1\}^n u.$$

Cette équation peut aussi se déduire de la combinaison de celles du n° 930; car ayant d'abord

$$\Delta'^n u = \left(e^{h'\frac{d}{dx}} - 1\right)^n u, \quad e^{h\frac{d}{dx}} u = u + \Delta u, \quad \text{d'où} \quad e^{\frac{d}{dx}} u = (1+\Delta)^{\frac{1}{h}} u,$$

il en résulte précisément l'équation ci-dessus, dont le développement donnera les différences de la fonction u, pour l'accroissement h' de x, au moyen de celles qui ont lieu pour l'accroissement h.

Cette expression résoudrait donc aussi le problème que s'était proposé Mouton (911).

941. Toutes ces relations s'étendent sans peine aux fonctions de plusieurs variables; et il est facile de voir que la formule

$$\left\{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} + l\frac{d}{dz} + \text{etc.}\right\}^n u = \{1(1+\Delta)\}^n u,$$

inverse de celle du n° 933, se vérifierait comme celle du n° 937.

Ensuite, les équations du n° 934, par rapport aux différences partielles, donnant

$$e^{\frac{d}{dx}}u = (1+\Delta_x)^{\frac{1}{h}}u, \quad e^{\frac{d}{dy}}u = (1+\Delta_y)^{\frac{1}{k}}u, \quad e^{\frac{d}{dz}}u = (1+\Delta_z)^{\frac{1}{l}}u, \quad \text{etc.},$$

si l'on substitue ces valeurs dans

$$\Delta'^n u = \left\{e^{h'\frac{d}{dx}+k'\frac{d}{dy}+l'\frac{d}{dz}+\text{etc.}} - 1\right\}^n u \,(933),$$

on obtiendra

$$\Delta'^n u = \left\{(1+\Delta_x)^{\frac{h'}{h}}(1+\Delta_y)^{\frac{k'}{k}}(1+\Delta_z)^{\frac{l'}{l}} \text{ etc.} - 1\right\}^n u.$$

En posant d'abord $n=1$ dans cette expression, on en déduira, pour l'interpolation des fonctions d'un nombre quelconque de variables, une formule analogue à celle du n° 918; et comme on en pourra tirer aussi toutes les différences de u relatives à des accroissemens h', k', l', etc. de x, y, z, etc., par le moyen de celles qui répondent aux accroissemens h, k, l, etc., elle résoudra, dans ce cas, le problème analogue à celui du n° 911.

942. Il peut n'être pas inutile de faire observer que si, dans l'expression de $\Delta^n u$, formée suivant l'hypothèse du n° 921, on écrit en première ligne les termes qui contiennent la puissance la moins élevée de chacune des différences des variables x, y, etc., l'ensemble de ces termes deviendra identique avec la différentielle $d^n u$, lorsqu'on y changera Δx, $\Delta^2 x$, etc., Δy, $\Delta^2 y$, etc. en dx, $d^2 x$, etc., dy, $d^2 y$, etc., et que chacun d'eux sera de la forme

$$M\Delta x^p \Delta^2 x^{p'} \Delta^3 x^{p''} \ldots \Delta y^q \Delta^2 y^{q'} \Delta^3 y^{q''} \ldots \Delta z^r \Delta^2 z^{r'} \Delta^3 z^{r''}, \text{ etc.},$$

M désignant une fonction des variables x, y, z, etc., et les exposans satisfaisant à l'équation

$$p + 2p' + 3p'' \ldots + q + 2q' + 3q'' \ldots + r + 2r' + 3r'' \ldots = n.$$

Ceci est une conséquence de la subordination établie entre les différentielles (69), à cause qu'elles sont les premiers termes des différences de même ordre, ou, ce qui est la même chose, de ce que, si l'on rapporte les variables x, y, z, etc. à une même variable indépendante t, le coefficient différentiel $\frac{d^n u}{dt^n}$ sera la fonction qui multiplie dt^n dans le développement de $\Delta^n u$.

CHAPITRE II.

Du Calcul inverse des Différences, par rapport aux fonctions explicites.

943. Le calcul inverse des différences a pour objet de remonter de celles-ci aux fonctions primitives; il est par conséquent analogue au Calcul intégral. Je m'occuperai d'abord des différences qui sont exprimées immédiatement par la variable indépendante, c'est-à-dire où l'on a, pour déterminer la fonction u_x, une équation de la forme Intégration des fonctions algébriques

$$\Delta^r u_x = \mathrm{f}(x),$$

l'accroissement de x étant constant et donné. Je le représenterai, à l'ordinaire, par h.

Soit premièrement $r=1$, d'où $\Delta u_x = \mathrm{f}(x)$; pour indiquer l'opération qui doit faire revenir de Δu_x à u_x, on emploie la caractéristique Σ, et l'on écrit, en conséquence,

$$\Sigma \Delta u_x = u_x = \Sigma \mathrm{f}(x),$$

les caractéristiques Δ et Σ indiquant des opérations contraires qui se détruisent lorsqu'on les effectue l'une après l'autre sur la même fonction.

L'opération indiquée par le signe Σ s'appelle aussi *intégration;* car $\Sigma \mathrm{f}(x)$ désigne une véritable somme, puisque, d'après l'équation

$$u_n = u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} \ (923);$$

si l'on représente par u la valeur de u_x correspondante à $x=a$, on aura, pour une valeur quelconque $x=a+nh$,

$$\Sigma \mathrm{f}(x) = u + \mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a+2h) \ldots\ldots + \mathrm{f}[a+(n-1)h];$$

cette expression, qui augmenterait de $\mathrm{f}(a+nh)$, ou $\mathrm{f}(x)$, si l'on ajoutait h à la dernière valeur $a+(n-1)h$ attribuée à x, et qui a par conséquent pour différence $\mathrm{f}(x)$, se compose aussi de la somme

de toutes les valeurs que prend $f(x)$, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+(n-1)h$, plus de la première valeur u, qui est indéterminée, et qui tient ici la place de la constante arbitraire que le passage de u_x à Δu_x a pu faire disparaître.

Pour revenir de $\Delta^r u_x = f(x)$ à u_x, il est évident qu'il faut effectuer autant d'intégrations successives qu'il y a eu de différentiations, ce qu'on indiquerait ainsi :

$$\Sigma^r \Delta^r u_x = u_x = \Sigma^r f(x).$$

A chacune de ces opérations il faudrait ajouter une nouvelle constante, ce que l'on peut voir aussi en observant que l'équation $\Delta^r u_x = f(x)$ ne donnant les différences de la fonction cherchée qu'à commencer de l'ordre r, laisse indéterminées les r quantités u, Δu, $\Delta^2 u, \ldots \Delta^{r-1} u$, et par conséquent les r premiers termes de l'expression

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \text{etc. } (882),$$

au moyen de laquelle on passe de la valeur de u relative à $x=a$, à celle qui se rapporte à $x=a+nh$.

On voit donc qu'ici, comme pour les différentielles, l'intégration introduit un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de l'ordre; mais il y a cette différence, que les quantités qui disparaissent quand on passe aux différentielles, sont absolument constantes, au lieu que pour se détruire quand on prend les différences, il suffit qu'une quantité soit telle qu'elle demeure la même lorsqu'on passe de x à $x+h$: et il en existe de telles; car il est visible que l'expression

$$\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{h},\ \cos\frac{2\pi x}{h}\right), \text{ qui devient alors } \varphi\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right),\left(\cos\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right)\right],$$

jouit de cette propriété, quelle que soit la forme de la fonction φ, ce qui rentre dans les remarques faites au n° 908.

944. Il est à propos de remarquer qu'en prenant l'intégrale de chaque membre de l'équation

$$\Delta u + \Delta v - \Delta w = \Delta(u + v - w) \ (881),$$

il vient

$$\Sigma(\Delta u + \Delta v - \Delta w) = u + v - w = \Sigma\Delta u + \Sigma\Delta v - \Sigma\Delta w,$$

ce qui ramène l'intégration des différences polynomes à celle des différences monomes.

De même, l'équation

$$a\Delta u = \Delta . au \quad \text{donne} \quad \Sigma a\Delta u = au = a\Sigma\Delta u,$$

par où l'on voit que les constantes passent, comme on veut, sous le signe Σ, ou hors de ce signe.

945. Lorsque la fonction $f(x)$ est rationnelle et entière, l'expression de u_n se terminant, en donne l'intégrale exacte. En effet, si m désigne l'ordre auquel les différences de cette fonction sont constantes; comme de $\Delta^r u = f(x)$, il suit $\Delta^m f(x) = \Delta^{r+m} u$, et que cette différence est constante, on a sur-le-champ

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots(r+m)}\Delta^{r+m} u,$$

expression où l'on pourra changer n en x, si la valeur u répond à $x=0$; et que la différence de x soit 1. Dans le cas contraire, n sera $\frac{x-a}{h}$, de même qu'au n° 899.

En faisant, pour abréger, $f(x) = v_x$, il viendra

$$\Delta^r u = v, \quad \Delta^{r+1} u = \Delta v, \quad \Delta^{r+2} u = \Delta^2 v, \ldots\ldots \Delta^{r+m} u = \Delta^m v;$$

u et ses différences, jusqu'à l'ordre $r-1$ inclusivement, demeurent arbitraires, ainsi qu'on l'a déjà dit.

Soit, pour exemple,

$$\Delta u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1;$$

l'accroissement de x étant 1; on aura $r=1$, $m=3$, et l'on trouvera

$$v = -1, \quad \Delta v = 2, \quad \Delta^2 v = -4, \quad \Delta^3 v = 6, \quad \Delta^4 v = 0 \ (888),$$

d'où

$$u_x = u - 1.\frac{x}{1} + 2.\frac{x(x-1)}{1.2} - 4.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 6.\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}$$
$$= \frac{3x^4 - 26x^3 + 69x^2 - 58x}{12} + const. = \Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1).$$

946. Si l'on fait $r=1$, dans l'expression précédente de u_n, ce qui la change en

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u \\ \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots(m+1)}\Delta^{m+1}u,$$

on en déduit tout de suite les intégrales des produits composés de facteurs équidifférens; car si on y augmente de l'unité les exposans de la caractéristique Δ, en se rappelant que $\Delta^{m+2}u=0$, on aura

$$\Delta u_n = 1.\Delta u + \frac{n}{1}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 u\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots.m}\Delta^{m+1}u.$$

Prenant ensuite les intégrales par rapport à n, dans tous les termes de cette dernière équation, il viendra

$$u_n = const. + \Sigma 1.\Delta u + \frac{\Sigma n}{1}\Delta^2 u + \frac{\Sigma n(n-1)}{1.2}\Delta^3 u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\Sigma n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots.m}\Delta^{m+1}u;$$

et comparant terme à terme cette dernière valeur de u_n avec celle d'où elle a été tirée, on en conclura

$$\Sigma 1 = n,$$
$$\Sigma n = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\Sigma n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{m+1},$$

formules où la variable n croît par des différences égales à l'unité.

On en aurait trouvé de semblables, pour un accroissement quelconque de x, en traitant de même la valeur de u_x du n° 899, après y avoir fait $a=0$; mais on peut éviter ce calcul, en observant que le produit

$$x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h] = h^m.\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-m+1\right),$$

et qu'il suffit par conséquent d'écrire, dans l'intégrale précédente, $\frac{x}{h}$ au lieu de n, et de multiplier le résultat par h^m, pour avoir

$$\Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]=\frac{x(x-h)(x-2h)\ldots(x-mh)}{(m+1)h},$$

formule que l'on obtiendrait aussi en renversant la différence trouvée dans le n° 926.

En effet, si l'on prend l'intégrale des deux membres de l'équation

$$\Delta.x(x-h)\ldots[x-(m-1)h]=mh.x(x-h)\ldots[x-(m-2)h],$$

il en résultera

$$x(x-h)\ldots[x-(m-1)h]=mh\Sigma x(x-h)\ldots[x-(m-2)h],$$

d'où, par le changement de m en $m+1$, et en tirant la valeur de l'intégrale qui est dans le second membre, on déduira l'expression ci-dessus.

Il est aisé de voir qu'au moyen de cette formule, on peut intégrer séparément, par rapport à x, chaque terme de l'expression

$$v_x=v+\frac{x}{h}\Delta v+\frac{x(x-h)}{1.2h^2}\Delta^2 v\ldots+\frac{x(x-h)\ldots[x-(m-1)h]}{1.2.3\ldots mh^m}\Delta^m v,$$

et qu'on retombera sur la valeur de u_x, que donnerait celle de u_x employée dans le numéro précédent.

947. La formule

$$u_x=u+\frac{x}{1}\frac{\Delta u}{h}+\frac{x(x+h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2}+\frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3}+\text{etc. (927)},$$

servirait aux mêmes usages, si l'on prenait les différences en rétrogradant, et donnerait les intégrales des produits composés de facteurs équidifférens, en progression croissante.

Pour arriver à ces dernières, lorsque les différences sont prises directement, il suffira de changer, dans celles du numéro précédent, x en $x+(m-1)h$, d'où il suit que $x-mh$ devient $x-h$, et d'écrire les facteurs dans un ordre inverse; on trouve ainsi

$$\Sigma x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]=\frac{(x-h)x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]}{(m+1)h},$$

comme on le déduirait du renversement de la différence obtenue dans le n° 927.

948. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que les intégrales des produits des facteurs équidifférens, sont analogues à $\int x^m dx$; car elles s'obtiennent de même que celle-ci, en augmentant le nombre des facteurs d'une unité, et divisant par ce nombre et par l'accroissement de x; il en est de même lorsque le produit des facteurs divise l'unité, ce qui répond aux puissances négatives.

En effet, par la différentiation, on trouve d'abord

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} =$$
$$\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} - \frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(m-1)]h} =$$
$$\frac{x-(x+mh)}{x(x+h)\ldots(x+mh)} = \frac{-mh}{x(x+h)\ldots(x+mh)};$$

et prenant ensuite l'intégrale du premier et du dernier membre de ce résultat, on obtient

$$\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]} = -mh\Sigma\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+mh)},$$

où il n'y a plus qu'à changer m en $m-1$, et à tirer la valeur de l'intégrale indiquée dans le second membre, pour arriver à

$$\Sigma\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]} = -\frac{1}{(m-1)h.x(x+h)\ldots[x+(m-2)h]},$$

résultat semblable à $\int x^{-m}dx = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}$.

Il suffirait de multiplier par h le produit affecté du signe Σ, d'y supprimer tous les termes où h surpasse le premier degré, et de le faire nul dans la valeur de l'intégrale, pour arriver à $\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, où Σ tient la place de $\int$.

949. On donne à ces divers résultats une forme qui paraît plus générale, en posant $XX_1X_2\ldots X_m$, pour le produit à intégrer. On trouve d'abord

$$\begin{aligned}\Delta.XX_1X_2\ldots X_m &= X_1X_2X_3\ldots X_{m+1} - XX_1X_2\ldots X_m\\ &= X_1X_2X_3\ldots X_m(X_{m+1}-X)\\ &= X_1X_2X_3\ldots X_m.(m+1)\Delta X,\end{aligned}$$

si la différence première des facteurs X est constante; et de là on tire,

en diminuant tous les indices de l'unité, et en intégrant le premier et le dernier membres,

$$\Sigma XX_1X_2\ldots X_{m-1} = \frac{X_{-1}XX_1X_2\ldots X_{m-1}}{(m+1)\Delta X} + const.$$

Cette formule s'appliquerait immédiatement au produit

$$ax(ax+b)(ax+2b)\ldots[ax+(m-1)b],$$

b étant la différence de ax, produit qu'il est d'ailleurs bien aisé de ramener à la forme $x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]$.

On intègre de même la fraction $\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}}$, parce qu'en la différentiant on trouve

$$\Delta\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}} = \frac{1}{X_1X_2X_3\ldots X_m} - \frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}}$$
$$= \frac{X-X_m}{XX_1X_2X_3\ldots X_m} = -\frac{m\Delta X}{XX_1X_2X_3\ldots X_m},$$

ce qui donne

$$\Sigma\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m} = -\frac{1}{m\Delta X}\,\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}} + const.;$$

et changeant m en $m-1$, on obtient

$$\Sigma\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}} = -\frac{1}{(m-1)\Delta X}\,\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-2}} + const.$$

950. On trouve aussi fort aisément l'intégrale des fonctions rationnelles et entières ordonnée, comme ces fonctions, suivant les puissances de la variable indépendante; et pour commencer par le cas le plus simple, nous chercherons d'abord celle de x^m.

Par le n° 885, on a

$$\Delta.x^{m+1} = \frac{(m+1)}{1}x^mh + \frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}x^{m-3}h^4\ldots + h^{m+1}x^0.$$

En intégrant terme à terme chaque membre de cette équation, et passant hors du signe Σ les facteurs constans, on obtiendra

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1}h\Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2}h^2\Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{m-2}$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}h^4\Sigma x^{m-3}\ldots + h^{m+1}\Sigma x^0.$$

Cette équation ferait connaître l'intégrale Σx^m, si l'on avait Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, ... Σx^0, puisqu'on en tirerait

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left\{ \frac{m}{1.2} h \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} h^2 \Sigma x^{m-2} \ldots + \frac{1}{m+1} h^m \Sigma x^0 \right\}.$$

Si l'on écrit successivement dans cette dernière $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. pour m, on formera des expressions de Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, etc., qui ne dépendront que des intégrales des puissances de x qui leur sont respectivement inférieures. On peut aussi former ces valeurs en remontant; et si l'on prend d'abord $m = 0$, il vient $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, parce que l'accolade ne doit renfermer qu'un nombre m de termes. Cette conclusion se vérifie d'ailleurs *à priori*, soit en observant que de $\Delta x = h.x^0$, il résulte $x = h\Sigma x^0$, et par conséquent $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$; soit en prenant la différence de la fonction primitive $\frac{x}{h}$, pour laquelle on trouve

$$\frac{x+h}{h} - \frac{x}{h} = 1 = x^0.$$

Faisant ensuite $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., et substituant successivement pour Σx^0, Σx^1, Σx^2, etc., les valeurs auxquelles on parviendra, on formera cette table :

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h},$$
$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x,$$
$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}xh,$$
$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2h,$$
$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5.6}xh^3,$$
$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4h - \frac{1}{2.6}x^2h^3,$$
etc.

951. Au lieu de pousser plus loin cette induction, supposons qu'en général

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{etc.};$$

nous aurons, en prenant la différence première de chaque membre,

$$\begin{aligned}
x^m = A\frac{(m+1)}{1}x^m h &+ A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \text{etc.}\\
&+ \quad B\frac{m}{1}x^{m-1}h \quad + \quad B\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad + \quad C\frac{(m-1)}{1}x^{m-2}h + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.};
\end{aligned}$$

et comparant entre eux les termes affectés d'une même puissance de x, nous obtiendrons entre les coefficiens A, B, C, D, etc., les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(m+1)h},\\
B &= -A\frac{(m+1)h}{2} = -\tfrac{1}{2},\\
C &= -A\frac{(m+1)mh^2}{2.3} - B\frac{mh}{2},\\
D &= -A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2.3.4} - B\frac{m(m-1)h^2}{2.3} - C\frac{(m-1)h}{2},
\end{aligned}$$

etc.,

avec lesquelles on déduira facilement les uns des autres, les coefficiens de l'expression de Σx^m, quel que soit l'exposant m. En calculant immédiatement les douze premiers termes, on trouvera

$$\begin{aligned}
\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \frac{1}{2.3}\frac{mh}{2}x^{m-1} &- \frac{1}{6.5}\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4}x^{m-3}\\
&+ \frac{1}{6.7}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6}x^{m-5}\\
&- \frac{3}{10.9}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-6)h^7}{2.3\ldots\ldots\ldots 8}x^{m-7}\\
&+ \frac{5}{6.11}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-8)h^9}{2.3\ldots\ldots\ldots 10}x^{m-9}\\
&- \frac{691}{210.13}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-10)h^{11}}{2.3\ldots\ldots\ldots 12}x^{m-11}\\
&+ \frac{35}{2.15}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-12)h^{13}}{2.3\ldots\ldots\ldots 14}x^{m-13}\\
&- \frac{3617}{30.17}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-14)h^{15}}{2.3\ldots\ldots\ldots 16}x^{m-15}\\
&+ \frac{43867}{42.19}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-16)h^{17}}{2.3\ldots\ldots\ldots 18}x^{m-17}\\
&- \frac{1222277}{110.21}\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-18)h^{19}}{2.3\ldots\ldots\ldots 20}x^{m-19}\\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad + \mathit{const.}
\end{aligned}$$

formule dans laquelle la partie des coefficiens qui dépend de l'exposant m suit une loi évidente; il n'en est pas de même des nombres qui précèdent cette partie, et qui, revenant souvent dans la théorie des suites, méritent une attention particulière. On les appelle *nombres de Bernoulli*, parce que Jacques Bernoulli les a remarqués le premier, comme formant le coefficient du dernier terme dans les sommes des puissances paires. En attendant que nous les retrouvions par des considérations plus générales, nous allons faire connaître d'une manière simple, une loi trouvée par Moivre, pour les former successivement.

952. D'après la définition de Σu_x (943), il est visible que cette intégrale peut se prendre entre des limites données, et qu'alors la constante disparaît comme pour les intégrales définies aux différentielles. En effet, si l'on prend la différence des valeurs de Σu_x correspondantes aux valeurs $x=nh$, $x=(n+r)h$, on aura

$$\Sigma u_x = u_n + u_{n+1} \ldots + u_{n+r-1}.$$

Suivant cette formule, l'intégrale Σx^m, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, doit se réduire à 0, puisqu'alors $n=0$, $r=1$, et $u_0=0$; ainsi, en désignant par B_1, B_3, B_5, etc., le premier facteur du coefficient de x^{m-1}, x^{m-3}, x^{m-5}, etc., il viendra

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{h^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2}h^m + B_1\frac{m}{2}h^m + B_3\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}h^m \\ & + B_5\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6}h^m \\ & + B_7\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-6)}{2.3.4.5.6.7.8}h^m + \text{etc.}; \end{aligned}$$

divisant cette équation par h^m, et donnant ensuite à m les valeurs 2, 4, 6, 8, etc., on en tirera les équations suivantes:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + B_1, \\ 0 &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{2}B_1 + B_3, \\ 0 &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{2}B_1 + \frac{6.5.4}{2.3.4}B_3 + B_5, \\ 0 &= \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{8}{2}B_1 + \frac{8.7.6}{2.3.4}B_3 + \frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}B_5 + B_7, \end{aligned}$$

etc.

Ces mêmes coefficiens ont, avec les nombres représentés par le sym-

bole $\Delta^x . 0^i$ (932), des relations qu'on obtiendrait en comparant l'expression précédente de Σx^m avec celle qui résulterait de la formule du n° 945, en l'ordonnant par rapport aux puissances de x.

Nous observerons, avant de finir cet article, que si l'on multiplie Σx^m par h, et qu'on passe cet accroissement sous le signe Σ, on aura l'équation

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2}x^m h + \tfrac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3}x^{m-1} - \text{etc.} + const.,$$

dont le second membre a pour limite $\frac{x^{m+1}}{m+1} + const.$, lorsque h s'évanouit, cas auquel $\Sigma x^m h$ se change en $\int x^m dx$, d'après ce qu'on a vu dans le n° 467.

953. Ce qui précède fournit le moyen d'intégrer toutes les fonctions algébriques, rationnelles et entières, lorsque la variable indépendante ne change que par une différence constante.

Prenons pour exemple la fonction

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

nous aurons

$$\Sigma(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = \alpha\Sigma x^3 + \beta\Sigma x^2 + \gamma\Sigma x + \delta\Sigma x^0;$$

et mettant pour Σx^3, Σx^2, Σx, Σx^0, leurs valeurs (950), il viendra

$$\Sigma(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) =$$
$$\frac{\alpha}{4h}x^4 - \frac{3\alpha h - 2\beta}{6h}x^3 + \frac{\alpha h^2 - 2\beta h + 2\gamma}{4h}x^2 + \frac{\beta h^2 - 3\gamma h + 6\delta}{6h}x + const.$$

Il est facile de voir, d'ailleurs, qu'en posant tout de suite

$$\Sigma(\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \text{etc.}) = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + \text{etc.},$$

et prenant les différences de chaque membre, on aurait immédiatement, comme dans le n° 951, les relations des coefficiens A, B, C, etc., avec α, β, γ, etc.

954. Passons maintenant aux fractions rationnelles, et supposons-les décomposées en fractions simples, comme pour l'intégration des différentielles (372). On pourra toujours intégrer parmi ces dernières chaque couple de la forme

$$\frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x+a};$$

car il est évident que

$$\frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x+a} = \Delta\, \frac{A}{x+a};$$

et en prenant l'intégrale de chaque membre, on arrive à

$$\Sigma\left\{\frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x+a}\right\} = \frac{A}{x+a} + const.$$

Il est à remarquer que ni l'une ni l'autre des fractions du premier membre ne peut s'intégrer.

Soit, pour exemple, $\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$. La décomposition de cette fraction en fractions simples, conduit à

$$\Sigma\,\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{1}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x} + \frac{1}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x+h} - \frac{2}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x+2h};$$

par la formule générale obtenue plus haut, on a

$$\Sigma\,\frac{A}{x+a} = \Sigma\,\frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x+a},$$

et par conséquent

$$\Sigma\,\frac{1}{x} = \Sigma\,\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x};$$

en substituant cette valeur, on trouvera

$$\Sigma\,\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{2}{h}\left\{\Sigma\,\frac{1}{x+h} - \Sigma\,\frac{1}{x+2h}\right\} - \frac{1}{h}\,\frac{1}{x};$$

mais $\Sigma\left\{\frac{1}{x+2h} - \frac{1}{x+h}\right\} = \frac{1}{x+h}$: il viendra donc

$$\Sigma\,\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = -\frac{2}{h(x+h)} - \frac{1}{hx} + const. = -\frac{3x+h}{hx(x+h)} + const.$$

On aurait pu mettre immédiatement la formule proposée sons une forme évidemment intégrable, en l'écrivant ainsi :

$$\Sigma\,\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{1}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x+h} + \frac{2}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x+h} - \frac{2}{h}\,\Sigma\,\frac{1}{x+2h},$$

et on aurait conclu sur-le-champ

$$\Sigma\,\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = -\frac{1}{h}\,\frac{1}{x} - \frac{2}{h}\,\frac{1}{x+h} + const.$$

Cet exemple suffit pour faire connaître l'esprit de la méthode; et l'on voit, par ce qui précède, combien il doit être rare de tomber sur des fractions rationnelles qui soient la différence exacte de quelque fonction primitive. En revenant sur ce sujet par les méthodes d'approximation, nous ferons voir que la fraction $\frac{1}{x}$ n'est pas même intégrable par logarithmes, comme lorsqu'il s'agit des différentielles.

955. Les cas où l'on peut intégrer les différences irrationnelles sont si rares et si particuliers, que nous ne nous y arrêterons pas; on en reconnaîtra d'ailleurs les caractères, en différentiant des fonctions irrationnelles, et nous passerons en conséquence tout de suite aux fonctions transcendantes, parmi lesquelles il s'en trouve plusieurs qui se prêtent assez facilement aux intégrations. De ce nombre est la fonction a^x. Intégration des fonctions transcendantes.

En effet, puisque $\Delta . a^x = a^x(a^h - 1)$ (891), il s'ensuit $\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + const.$

On intègre aussi l'expression $a^x y$, lorsque y est une fonction rationnelle et entière de x; car si l'on fait $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc., que l'on suppose ensuite

$$\Sigma a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = a^x(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}),$$

et qu'on prenne la différence de chaque membre, on trouvera

$$a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = \begin{cases} a^{x+h}[A + B(x+h) + C(x+h)^2 + D(x+h)^3 + \text{etc.}] \\ -a^x(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}); \end{cases}$$

développant le second membre et divisant tout par a^x, il viendra

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} = (a^h - 1)\ &(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) \\ &+ a^h h\,(B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}) \\ &+ a^h h^2 (C + 3Dx + \text{etc.}) \\ &+ a^h h^3 (D + \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Comparant les termes semblables dans chacun des membres, on aura

$$\begin{aligned} \alpha &= -A + a^h(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.}), \\ \beta &= -B + a^h(B + 2Ch + 3Dh^2 + \text{etc.}), \\ \gamma &= -C + a^h(C + 3Dh + \text{etc.}), \\ \delta &= -D + a^h(D + \text{etc.}), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Si, pour donner un exemple, on veut terminer à γx^2 la fonction y, on fera $\delta = 0$, ce qui donnera $D = 0$, et on trouvera

$$C = \frac{\gamma}{a^h - 1},$$
$$B = \frac{\beta - 2Ca^h h}{a^h - 1} = \frac{a^h(\beta - 2\gamma h) - \beta}{(a^h - 1)^2},$$
$$A = \frac{\alpha - Ba^h h - Ca^h h^2}{a^h - 1} = \frac{a^{2h}(\alpha - \beta h + \gamma h^2) - a^h(2\alpha - \beta h - \gamma h^2) + \alpha}{(a^h - 1)^3},$$

d'où l'on tirera

$$\Sigma a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = const. +$$
$$a^x \left\{ \frac{a^{2h}(\alpha - \beta h + \gamma h^2) - a^h(2\alpha - \beta h - \gamma h^2) + \alpha}{(a^h - 1)^3} + \frac{[a^h(\beta - 2\gamma h) - \beta]x}{(a^h - 1)^2} + \frac{\gamma x^2}{a^h - 1} \right\}.$$

956. Venons à l'intégration des fonctions circulaires. Elle s'effectue par les formules trouvées plus haut, lorsqu'on fait usage des expressions exponentielles de ces fonctions. On a, par le n° 41 de l'Introduction, et par le précédent,

$$\Sigma \sin x = \Sigma \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ \Sigma e^{x\sqrt{-1}} - \Sigma e^{-x\sqrt{-1}} \}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{h\sqrt{-1}} - 1} - \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{-h\sqrt{-1}} - 1} \right\} + const.$$
$$= \frac{e^{(x-h)\sqrt{-1}} - e^{-(x-h)\sqrt{-1}} - (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}\,[2 - (e^{h\sqrt{-1}} + e^{-h\sqrt{-1}})]} + const.$$

Le dernier de ces résultats étant transformé en fonction de sinus et de cosinus, devient successivement

$$\Sigma \sin x = \frac{\sin(x-h) - \sin x}{2(1 - \cos h)} + const.$$
$$= -\frac{\sin x - \sin(x-h)}{4(\sin\frac{1}{2}h)^2} + const. = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.,$$

au moyen des relations

$$1 - \cos A = 2(\sin\tfrac{1}{2}A)^2, \quad \sin A - \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B).$$

On étendrait sans peine ce procédé à beaucoup d'autres fonctions du même genre; mais il paraîtra sans doute plus commode d'opérer immédiatement sur les sinus et les cosinus, ainsi que nous allons le faire.

957. 1°. On trouve dans le n° 892, l'équation

$$\Delta \cos x = -2\sin\tfrac{1}{2}h \sin(x + \tfrac{1}{2}h),$$

de laquelle on tire

$$\sin(x+\tfrac{1}{2}h) = -\frac{\Delta \cos x}{2\sin\frac{1}{2}h}, \quad \text{et} \quad \sin x = -\frac{\Delta \cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

en écrivant $x-\frac{1}{2}h$, au lieu de x; prenant ensuite l'intégrale de chaque membre de la dernière équation, on obtient, comme ci-dessus,

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \textit{const.}$$

2°. De l'équation

$$\Delta \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h),$$

on tire de même

$$\cos(x+\tfrac{1}{2}h) = \frac{\Delta \sin x}{2\sin\frac{1}{2}h}, \qquad \cos x = \frac{\Delta \sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

et en intégrant les deux membres de la dernière, il vient

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \textit{const.}$$

3°. La conversion des puissances de sinus, de cosinus et de leurs produits, en fonction de sinus et de cosinus d'arcs multiples, ramènera aux deux formules que nous venons de trouver, l'intégration de la fonction générale $\sin x^m \cos x^n$, lorsque les exposans m et n seront des nombres entiers positifs.

En effet, cette fonction sera changée en une suite de termes de la forme $A\sin qx$, ou $A\cos qx$, dont les intégrales se déduiront de celles de $A\sin x$ et $A\cos x$, en écrivant qx et qh, au lieu de x et de h; et il est facile de voir que l'on aura en général

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \textit{const.},$$
$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \textit{const.}$$

Lorsque le développement de la fonction $\sin x^m \cos x^n$ contiendra des termes constans, son intégrale renfermera l'arc de cercle x, puisque $\Sigma A = A\Sigma x^0 = A\frac{x}{h}$.

958. On peut encore pousser plus loin l'intégration des fonctions circulaires, et obtenir la fonction primitive dont la différence est $x^r \sin x'$,

ou $x^p \cos x'$, x' étant une fonction de x ayant pour différence première la constante h'. Le développement des fonctions

$$\Delta\{(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} \quad \text{et} \quad \Delta\{(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\},$$

donne d'abord les équations

$$\Delta\{(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = x^p\cos(x'+\tfrac{1}{2}h')-(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')$$
$$= x^p\{\cos(x'+\tfrac{1}{2}h')-\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\}+$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h-\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3-\text{etc.}\right\}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h'),$$

$$\Delta\{(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = x^p\sin(x'+\tfrac{1}{2}h')-(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')$$
$$= x^p\{\sin(x'+\tfrac{1}{2}h')-\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\}+$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h-\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3-\text{etc.}\right\}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h').$$

Substituant dans l'une la valeur de $\cos(x'+\frac{1}{2}h')-\cos(x'-\frac{1}{2}h')$, et dans l'autre celle de $\sin(x'+\frac{1}{2}h')-\sin(x'-\frac{1}{2}h')$, il viendra

$$\Delta\{(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = -2x^p\sin x'\sin\tfrac{1}{2}h'+$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h-\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3-\text{etc.}\right\}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h'),$$
$$\Delta\{(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = 2x^p\cos x'\sin\tfrac{1}{2}h'+$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h-\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3-\text{etc.}\right\}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h');$$

tirant de ces dernières la valeur de $x^p\sin x'$, celle de $x^p\cos x'$, et prenant l'intégrale de chaque terme du résultat, on aura

$$\Sigma x^p\sin x' = -\frac{(x-h)^p\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}+$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\frac{p}{1}h\Sigma x^{p-1}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')-\frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')-\text{etc.}\right\}+\textit{const.},$$
$$\Sigma x^p\cos x' = \frac{(x-h)^p\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}-$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\frac{p}{1}h\Sigma x^{p-1}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')-\frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')-\text{etc.}\right\}+\textit{const.}$$

Si l'on fait d'abord $p=1$, ces formules donneront

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\cos(x'-\frac{1}{2}h') + const.,$$

$$\Sigma x \cos x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} - \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\sin(x'-\frac{1}{2}h') + const.;$$

et comme, par le numéro précédent, on a

$$\Sigma \sin(x'-\tfrac{1}{2}h') = -\frac{\cos(x'-h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}, \qquad \Sigma\cos(x'-\tfrac{1}{2}h') = \frac{\sin(x'-h')}{2\sin\frac{1}{2}h'},$$

il en résultera

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\sin(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2} + const.,$$

$$\Sigma x \cos x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\cos(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2} + const.$$

Avec ces expressions on obtiendra celles de $\Sigma x^2 \sin x'$, $\Sigma x^2 \cos x'$, en faisant $p=2$, puis celles de $\Sigma x^3 \sin x'$, $\Sigma x^3 \cos x'$, en faisant $p=3$, et ainsi de suite; on sera donc en état d'assigner l'intégrale des fonctions $y \sin x$, $y \cos x$, dans tous les cas où y sera une fonction rationnelle et entière de x.

Il est bon de remarquer que si l'on prend $x = ax'+b$, ce qui donnera $h = ah'$, on conclura immédiatement

$$\Sigma(ax'+b)^p \sin x', \qquad \Sigma(ax'+b)^p \cos x',$$

de $\Sigma x^p \sin x'$, $\Sigma x^p \cos x'$, en changeant hors des sinus et des cosinus seulement, x en $ax'+b$, et h en ah'. On n'a pu, jusqu'à présent, faire pour les tangentes et les sécantes, ni pour les fractions ayant pour dénominateurs des puissances de sinus et de cosinus, ce que nous venons de faire sur les fonctions rationnelles et entières de ces derniers.

959. L'intégration par parties se pratique sur les différences aussi bien que sur les différentielles. Soient P et Q deux fonctions quelconques de x; et faisons $\Sigma PQ = Q\Sigma P + z$, z étant une fonction inconnue de la même variable. En prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q+\Delta Q)\,\Sigma(P+\Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z;$$

développant et réduisant, en observant que $Q\Sigma\Delta P = PQ$, il viendra

$$0 = \Delta Q \Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \qquad \text{ou} \qquad \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P+\Delta P),$$

et par conséquent

$$z=-\Sigma[\Delta Q\Sigma(P+\Delta P)]=-\Sigma(\Delta Q\Sigma P_1),$$

d'où il résulte

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Sigma(\Delta Q\Sigma P_1)\ldots\ldots(a).$$

Changeant maintenant Q en ΔQ et P en ΣP_1, la formule (a) nous donnera

$$\Sigma(\Delta Q\Sigma P_1)=\Delta Q\Sigma^2 P_1-\Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2);$$

car il est visible que le second état de P étant représenté par $P_1=P+\Delta P$, le second état de ΣP_1 sera

$$\Sigma P_1+\Delta\Sigma P_1=\Sigma P_1+P_1=\Sigma P_2;$$

et l'on aura par conséquent

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2).$$

On trouvera encore par la formule (a) que

$$\Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2)=\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Sigma(\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3);$$

et par ce moyen l'on aura

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Sigma(\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3).$$

En général, soit $\Sigma(\Delta^n Q\Sigma^n P_n)$ le terme auquel on arrive après n opérations semblables aux précédentes; la formule (a) le changera en

$$\Sigma(\Delta^n Q\Sigma^n P_n)=\Delta^n Q\Sigma^{n+1} P_n-\Sigma(\Delta^{n+1} Q\Sigma^{n+1} P_{n+1}),$$

équation qui renferme la loi de cette expression élégante, donnée pour la première fois par Taylor, dans les *Transactions Philosophiques :*

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Delta^3 Q\Sigma^4 P_3+\Delta^4 Q\Sigma^5 P_4-\text{etc.}$$

Si l'on y met pour P_1, P_2, P_3, etc., leurs valeurs en P, et qu'on effectue les intégrations qui deviennent possibles, elle se change en

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Delta Q(\Sigma^2 P+\ \Sigma P\ )+\Delta^2 Q(\Sigma^3 P+2\Sigma^2 P+\Sigma P)$$
$$-\Delta^3 Q(\Sigma^4 P+3\Sigma^3 P\ +3\Sigma^2 P+\Sigma P)+\text{etc.}$$

C'est sous cette forme que Condorcet l'a présentée dans son *Essai sur l'Application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, p. 163.

Elle s'arrête toutes les fois que la fonction Q mène à des différences

constantes dans un ordre quelconque; et si la fonction P est susceptible d'un nombre suffisant d'intégrations successives, on parvient à l'intégrale exacte de la fonction PQ.

960. Il suit de là qu'on peut intégrer, 1°. toute fonction de la forme

$$\frac{Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(n-1)h]},$$

quand les exposans du numérateur sont entiers et positifs, et que le plus fort est moindre que $n-1$, parce que la fraction

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots[x+(n-1)h]}$$

ne peut s'intégrer que $n-1$ fois de suite, à cause que le nombre des facteurs du dénominateur diminue de l'unité à chaque fois (948), et que, comme on le verra plus loin, elle cesse d'être intégrable lorsqu'il n'en reste qu'un.

2°. Toute fonction de la forme

$$a^{mx}(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma\ldots\ldots),$$

quel que soit le signe de m.

3°. Enfin toute fonction de la forme

$$\sin x^m \cos x^n (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma\ldots\ldots),$$

pourvu que m et n soient positifs, et en changeant le produit $\sin x^m \cos x^n$ en sinus et cosinus d'arcs multiples.

Ces deux dernières remarques sont fondées sur ce que les fonctions

$$a^{mx}, \quad \sin x \quad \text{et} \quad \cos x$$

sont susceptibles d'un nombre quelconque d'intégrations successives (955, 957).

Les trois formules rapportées ci-dessus méritent d'autant plus d'attention, qu'elles comprennent à peu près tous les cas où l'on peut intégrer les différences qui ne dépendent que d'une seule variable, et qu'elles conduisent par conséquent à la sommation d'un grand nombre de suites (943).

961. En intégrant plusieurs fois de suite et par parties, chaque terme de la formule

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \text{etc.},$$

on obtiendra successivement les expressions de $\Sigma^2 PQ$, $\Sigma^3 PQ$, etc.

Taylor a donné celle de $\Sigma^n PQ$, savoir :

$$\Sigma^n PQ = Q\Sigma^n P - \frac{n}{1}\,\Delta Q\Sigma^{n+1}P_1 + \frac{n(n+1)}{1.2}\,\Delta^2 Q\Sigma^{n+2}P_2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\,\Delta^3 Q\Sigma^{n+3}P_3 + \text{etc.}$$

Cette formule se vérifie facilement de proche en proche, en observant que les coefficiens de $Q\Sigma^n P$, $\Delta Q\Sigma^{n+1}P_1$, etc., sont les mêmes que ceux des puissances de x dans le développement de $(1+x)^{-n}$, analogie que l'on prouve comme il suit. Si l'on fait

$$\Sigma^n PQ = AQ\Sigma^n P + B\Delta Q\Sigma^{n+1}P_1 + C\Delta^2 Q\Sigma^{n+2}P_2 + \text{etc.},$$

et que l'on prenne la différence de cette équation, en n'y faisant varier que les fonctions P et Q, on aura

$$\Sigma^{n-1}PQ = AQ\Sigma^{n-1}P + \left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right|\Delta Q\Sigma^n P_1 + \left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right|\Delta^2 Q\Sigma^{n+1}P_2 + \text{etc.},$$

parce que $\Delta\Sigma^n PQ = \Sigma^{n-1}PQ$, et

$$\Delta.xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta y\Delta x = \Delta xy + y_1\Delta x;$$

mais si l'on fait aussi

$$(1+x)^{-n} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

on trouvera

$$(1+x)^{-(n-1)} = (1+x)^{-n}(1+x) = A + \left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right|x + \left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right|x^2 + \text{etc.}$$

Il suit de là que l'on passe de $\Sigma^n PQ$ à $\Sigma^{n-1}PQ$, comme de $(1+x)^{-n}$ à $(1+x)^{-(n-1)}$; cette correspondance ayant toujours lieu jusqu'au cas où $n=1$, pour lequel les coefficiens de ΣPQ et de $(1+x)^{-1}$ sont identiques, il en résulte que toute la suite des développemens de ΣPQ, $\Sigma^2 PQ$, $\Sigma^3 PQ$, etc., sera semblable à cet égard à celle des développemens de $(1+x)^{-1}$, $(1+x)^{-2}$, $(1+x)^{-3}$, etc. (*).

(*) Taylor démontre immédiatement son résultat par des intégrations qu'il est aisé de reconnaître dans l'expression de $\Sigma^{n-1}PQ$, et d'effectuer ensuite. Il est évident que si l'on change n en $n+1$ et qu'on écrive en conséquence A_1, B_1, C_1, etc., pour A, B, C, etc., $\Sigma^{n-1}PQ$ devenant alors $\Sigma^n PQ$, on aura

$$A_1 = A,\quad B_1 + A_1 = B,\quad C_1 + B_1 = C,\ \text{etc.},$$

d'où

$$\Delta A = 0,\quad \Delta B = -A_1,\quad \Delta C = -B_1,\ \text{etc.}$$

La première de ces équations donne d'abord $A = const.$ puis $A = 1$, puisque $n = 0$ donne

Quant aux termes provenant de la constante arbitraire qu'il faut ajouter après chaque intégration, on trouve aisément leur forme, en observant que de

$$\Sigma u = f(x) + C,$$

il résulte

$$\Sigma^2 u = \Sigma f(x) + C\Sigma 1 = \Sigma f(x) + C\frac{x}{h} + C' \text{ (950)},$$

$$\Sigma^3 u = \Sigma^2 f(x) + C\Sigma\frac{x}{h} + C'\frac{x}{h} + C'',$$

etc.

962. Il ne serait pas difficile, au moyen de ce qu'on a vu dans le n° 920, de parvenir à la formule

$$\Delta^n . PQ = Q\Delta^n P + \frac{n}{1}\Delta Q\Delta^{n-1}P_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 Q\Delta^{n-2}P_2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 Q\Delta^{n-3}P_3 + \text{etc.},$$

---

aussi $A = 1$; la seconde conduit à $\Delta B = -1$, $B = -\frac{n}{1}$, à cause de $B = 0$, quand $n = 0$; poursuivant de la même manière on obtiendra

$$\Delta C = \frac{n+1}{1},\quad C = \frac{n(n+1)}{1.2},\quad \Delta D = -\frac{(n+1)(n+2)}{1.2},\quad D = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

Pour mettre plus d'uniformité dans la méthode, j'ai préféré à ce procédé, la considération de l'analogie des puissances et des différences. En le suivant j'aurais rendu la démonstration indépendante de celle du binome; mais j'observerai que l'on peut se servir de l'intégration pour parvenir à cette dernière, sans tomber dans aucun cercle vicieux. En effet, si l'on prend

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.},$$
$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \text{etc.},$$

on aura

$$A' = A + 1,\quad B' = B + A,\quad C' = C + B, \text{ etc.},$$
$$\Delta A = 1,\quad \Delta B = A,\quad \Delta C = B, \text{ etc.};$$

en intégrant d'après le n° 946, qui ne suppose point la théorie des puissances, et faisant attention que A, B, C, etc., doivent être nuls quand $n = 0$, on obtiendra

$$A = \frac{n}{1},\quad B = \frac{n(n-1)}{1.2},\quad C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \text{ etc.},$$

quel que soit l'exposant n. Il serait facile de donner à cette démonstration une forme purement élémentaire; c'est ce qu'on peut voir dans l'*Encyclopédie méthodique* (*Dictionnaire de Mathématiques* au mot *binome*) et dans les *Nova Acta Acad. Petropolitanæ*, ann. 1787.

de laquelle on conclurait l'expression de $\Sigma^n PQ$, par le seul changement de $+n$ en $-n$ et de Δ^{-n} en Σ^n. Cette relation entre les différences et les intégrales, suite de leur analogie avec les puissances, se manifeste dans l'expression du n° 883, d'après laquelle

$$\Delta^{-n}u = u_{-n} + \frac{n}{1} u_{-n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2} u_{-n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} u_{-n-3} + \text{etc.}$$

Si l'on y fait d'abord $n=1$, on trouve

$$\Delta^{-1}u = u_{-1} + u_{-2} + u_{-3} + u_{-4} + \text{etc.};$$

ce qui est la somme des quantités u, à partir de u_0 exclusivement; et comme, en plaçant l'origine de ces quantités à u_r, on aurait

$$\Delta^{-1}u_r = u_{r-1} + u_{r-2} + u_{r-3} \ldots + u + u_{-1} + \text{etc.};$$

la différence de ces deux expressions donnerait évidemment Σu_x, depuis $x=r$ jusqu'à $x=0$ inclusivement.

La supposition de $n=2$ conduit à l'expression

$$\Delta^{-2}u = u_{-2} + 2u_{-3} + 3u_{-4} + 4u_{-5} + \text{etc.};$$

qui peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{array}{rrrrr} u_{-2} + u_{-3} + u_{-4} + u_{-5} + \text{etc.} \\ + u_{-3} + u_{-4} + u_{-5} + \text{etc.} \\ + u_{-4} + u_{-5} + \text{etc.} \\ + u_{-5} + \text{etc.} \\ + \text{etc.}, \end{array}$$

où chaque ligne exprime une des sommes partielles de la suite

$$u_{-2},\ u_{-3},\ u_{-4},\ u_{-5},\ \text{etc.},$$

à compter successivement du premier, du deuxième, du troisième, etc. terme, ce qui donne la somme des sommes, à partir du dernier terme; et la comparaison de cette forme de calcul avec celle du n° 925, en fait voir l'analogie avec le développement des puissances négatives.

Développement des intégrales Σ par les différentielles et les intégrales $\int$.

963. L'utilité dont est l'expression de Σu, pour la sommation des suites, a fixé l'attention des analystes sur cette expression; et ils sont parvenus à lui donner plusieurs formes très-élégantes. Euler la fit dépendre des coefficiens différentiels de u et de l'intégrale $\int u dx$. On arrive à

ce résultat en partant de la formule

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

qui donne

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si on fait $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra $z = \int u dx$ et

$$\int u dx = h\Sigma u + \alpha h^2\Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.},$$

en représentant par α, β, γ, etc., les coefficiens numériques; on tirera de là

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \alpha h\Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

Si maintenant on prend les coefficiens différentiels de chaque membre, en observant que $\frac{d\Sigma u}{dx} = \Sigma\frac{du}{dx}$, ce qu'il est fort aisé de vérifier (*), on obtiendra cette suite d'équations

$$\Sigma\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}u - \alpha h\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \beta h^2\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.},$$
$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h}\frac{du}{dx} - \alpha h\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \beta h^2\Sigma\frac{d^4u}{dx^4} - \text{etc.},$$
$$\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h}\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha h\Sigma\frac{d^4u}{dx^4} - \beta h^2\Sigma\frac{d^5u}{dx^5} - \text{etc.},$$
etc.,

dont on se servira comme il suit, pour éliminer successivement de la valeur de Σu, les fonctions

$$\Sigma\frac{du}{dx},\quad \Sigma\frac{d^2u}{dx^2},\quad \Sigma\frac{d^3u}{dx^3},\quad \text{etc.}$$

Après avoir multiplié ces équations, respectivement par Ah, Bh^2, Ch^3, etc., on en passera tous les termes dans le second membre, pour les

(*) On voit d'abord que

$$d\Delta u = d\{f(x+h) - f(x)\} = \{f'(x+h) - f'(x)\}dx = \Delta f'(x)dx = \Delta du,$$

et posant ensuite $\Sigma u = U$, il vient

$$u = \Delta U,\quad du = d\Delta U = \Delta dU,$$

d'où

$$\Sigma du = \Sigma\Delta dU = dU = d\Sigma u.$$

ajouter à la valeur de Σu, et l'on aura

$$\begin{aligned}\Sigma u = \tfrac{1}{h}\textstyle\int u\,dx &- \alpha h\Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma h^3\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.}\\ + Au &- Ah\Sigma\frac{du}{dx} - A\alpha h^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - A\beta h^3\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.}\\ + Bh\frac{du}{dx} &\qquad - Bh^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - B\alpha h^3\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.}\\ + Ch^2\frac{d^2u}{dx^2} &\qquad\qquad - Ch^3\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.}\\ + \text{etc.};\end{aligned}$$

en égalant à zéro tous les termes affectés d'intégrales semblables, on formera les équations

$$\left.\begin{aligned}&A + \alpha = 0,\\ &B + A\alpha + \beta = 0,\\ &C + B\alpha + A\beta + \gamma = 0,\end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned}&A + \frac{1}{1.2} = 0,\\ &B + \frac{A}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0,\\ &C + \frac{B}{1.2} + \frac{A}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0,\end{aligned}\right.$$

etc., etc.,

qui serviront à déterminer les coefficiens A, B, C, etc., de l'expression restante

$$\Sigma u = \tfrac{1}{h}\textstyle\int u\,dx + Au + Bh\frac{du}{dx} + Ch^2\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

En faisant $u = x^m$ dans cette expression, on en déduit

$$\begin{aligned}\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} &+ Ax^m + mBhx^{m-1} + m(m-1)Ch^2x^{m-2}\\ &+ m(m-1)(m-2)Dh^3x^{m-3} + m(m-1)(m-2)(m-3)Eh^4x^{m-4} + \text{etc.};\end{aligned}$$

et comparant avec celle du n° 951, il vient

$$A = -\frac{1}{2},\quad B = \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2},\quad C = 0,\quad D = -\frac{1}{6.5}\cdot\frac{1}{2.3.4},\quad E = 0, \text{ etc.}$$

On peut vérifier, par les relations indiquées ci-dessus, entre A, B, C, etc., les valeurs absolues qu'on vient de trouver, et établir ensuite de nouvelles relations entre les nombres de Bernoulli (952).

964. La détermination des coefficiens A, B, C, etc., s'opère encore ici comme dans le n° 931, par la considération de la fonction parti-

culière e^x, pour laquelle on trouve

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \frac{d^n . e^x}{dx^n} = e^x,$$

d'où il suit

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + \text{etc.};$$

ce qui montre que les coefficiens A, B, C, etc., ne sont autre chose que ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de la fonction $\frac{1}{e^h - 1}$, réduite en série ascendante par rapport à cette lettre.

965. On étend sans peine l'expression de Σu, donnée dans le n° 963, au cas où l'on a $u = a^x y$, y étant une fonction quelconque de x, parce qu'en intégrant par parties, d'après la formule du n° 959, on trouve $\Sigma a^x y = \frac{a^x y - a^h \Sigma a^x \Delta y}{a^h - 1}$; substituant pour Δy la série qui l'exprime, il vient

$$(a^h - 1)\Sigma a^x y = a^x y - a^h \left\{ \frac{h}{1} \Sigma a^x \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\}.$$

Si, à la place de y, on met successivement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., on trouvera les équations

$$(a^h - 1)\Sigma a^x \frac{dy}{dx} = a^x \frac{dy}{dx} - a^h \left\{ \frac{h}{1} \Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^2}{1.2} \Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\},$$

$$(a^h - 1)\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} = a^x \frac{d^2y}{dx^2} - a^h \left\{ \frac{h}{1} \Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\},$$

etc.,

avec le secours desquelles on éliminera les intégrales

$$\Sigma a^x \frac{dy}{dx}, \quad \Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{etc.}$$

Il est visible que le résultat sera de la forme

$$(a^h - 1)\Sigma a^x y = a^x y + Aha^x \frac{dy}{dx} + Bh^2 a^x \frac{d^2y}{dx^2} + Ch^3 a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

Euler détermine les coefficiens A, B, C, etc., en substituant dans cette dernière équation les valeurs de $a^x y$, $a^x \frac{dy}{dx}$, $a^x \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., prises dans

les précédentes. Par ce moyen on obtient l'équation

$$(a^h-1)\Sigma a^x y=(a^h-1)\Sigma a^x y+\frac{a^h h}{1}\Sigma a^x \frac{dy}{dx}+\frac{a^h h^2}{1.2}\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^h h^3}{1.2.3}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+A(a^h-1)h\Sigma a^x \frac{dy}{dx}+\frac{Aa^h h^2}{1}\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Aa^h h^3}{1.2}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+B(a^h-1)h^2\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Ba^h h^3}{1}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+C(a^h-1)h^3\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+\text{etc.},$$

qui, devant être identique, donne

$$A(a^h-1)+a^h=0,$$
$$B(a^h-1)+\frac{1}{1}Aa^h+\frac{a^h}{1.2}=0;$$
$$C(a^h-1)+\frac{1}{1}Ba^h+\frac{1}{1.2}Aa^h+\frac{a^h}{1.2.3}=0;$$
$$D(a^h-1)+\frac{1}{1}Ca^h+\frac{1}{1.2}Ba^h+\frac{1}{1.2.3}Aa^h+\frac{a^h}{1.2.3.4}=0,$$
etc.

966. On obtiendra de la même manière, et sans plus de difficulté, l'intégrale répétée $\Sigma^n u$; car la formule

$$\Delta^n z=\frac{d^n z}{dx^n}h^n+\alpha\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}h^{n+1}+\beta\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}h^{n+2}+\text{etc. (931)}$$

conduit à

$$z=h^n\Sigma^n\frac{d^n z}{dx^n}+\alpha h^{n+1}\Sigma^n\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}+\beta h^{n+2}\Sigma^n\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}+\text{etc.};$$

faisant ensuite $\frac{d^n z}{dx^n}=u$, on aura $z=\int^n u\,dx^n$, et par conséquent

$$\Sigma^n u=\frac{1}{h^n}\int^n u\,dx^n-\alpha h\Sigma^n\frac{du}{dx}-\beta h^2\Sigma^n\frac{d^2u}{dx^2}-\text{etc.};$$

prenant les coefficiens différentiels de chaque membre de cette dernière équation, on formera les suivantes:

$$\Sigma^n\frac{du}{dx}=\frac{1}{h^n}\int^{n-1}u\,dx^{n-1}-\alpha h\Sigma^n\frac{d^2u}{dx^2}-\beta h^2\Sigma^n\frac{d^3u}{dx^3}-\text{etc.},$$
$$\Sigma^n\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{h^n}\int^{n-2}u\,dx^{n-2}-\alpha h\Sigma^n\frac{d^3u}{dx^3}-\beta h^2\Sigma^n\frac{d^4u}{dx^4}-\text{etc.},$$
etc.,

à l'aide desquelles on chassera $\Sigma^n\frac{du}{dx}$, $\Sigma^n\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., de l'expression de

$\Sigma^n u$. L'équation finale pourra être représentée par

$$\Sigma^n u = \frac{1}{h^n}\int^n u\,dx^n + \frac{A}{h^{n-1}}\int^{n-1} u\,dx^{n-1} + \frac{B}{h^{n-2}}\int^{n-2} u\,dx^{n-2} \ldots + \frac{M}{h}\int u\,dx$$
$$+ Nu + Ph\frac{du}{dx} + Qh^2\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.},$$

et deviendra

$$\frac{1}{(e^h - 1)^n} = \frac{1}{h^n} + \frac{A}{h^{n-1}} + \frac{B}{h^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{M}{h}$$
$$+ N + Ph + Qh^2 + \text{etc.},$$

quand on y fera $u = e^x$: les coefficiens $A, B, \ldots M, N$, etc., sont donc encore ici ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de $\frac{1}{(e^h-1)^n}$: ainsi l'on peut écrire

$$\Sigma^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^{-n} u,$$

pourvu qu'après le développement on change les expressions d^{-p} en $\int^p$, ce qui donnera

$$\frac{d^{-p}u}{dx^{-p}} = \int^p u\,dx^p;$$

et en rapprochant cette expression de

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^n u \quad (930);$$

on verra que l'expression de $\Sigma^n u$ se déduit de celle de $\Delta^n u$, par le seul changement du signe de n, ce qui confirme la remarque du n° 962.

967. En écrivant $n-1$, $n-2$, etc., à la place de n, dans l'expression de $\Sigma^n u$, on en déduit une suite d'équations au moyen desquelles on peut éliminer successivement les intégrales $\int^{n-1} u\,dx^{n-1}$, $\int^{n-2} u\,dx^{n-2}$, etc., et obtenir un résultat de la forme

$$\frac{1}{h^n}\int^n u\,dx^n = \Sigma^n u + A'\Sigma^{n-1}u + B'\Sigma^{n-2}u + \text{etc.},$$

qui devient

$$\frac{1}{h^n} = \frac{1}{(e^h-1)^n} + \frac{A'}{(e^h-1)^{n-1}} + \frac{B'}{(e^h-1)^{n-2}} + \text{etc.};$$

lorsqu'on y fait $u = e^x$; mais $\frac{1}{h^n} = \frac{1}{[l(1+e^h-1)]^n}$, expression qui, se

développant dans la même forme que le second membre de l'équation précédente, fera connaître les coefficiens A', B', etc.; ainsi l'on aura

$$\frac{1}{h^n}\int^n u\mathrm{d}x^n = [1(1+\Delta)]^{-n}u,$$

pourvu qu'on change les signes Δ en Σ, tant que leur exposant sera négatif.

Cette expression est une des formules propres à quarrer les courbes par les sommes et les différences de leurs ordonnées, procédé très-important pour la détermination des valeurs numériques des intégrales aux différentielles, et qui sera développé dans la suite avec quelqu'étendue.

L'expression de $\frac{1}{h^n}\int^n u\mathrm{d}x^n$, rapprochée de celle de $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}h^n$ (957), fait voir que l'équation

$$h^n\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} = \{1(1+\Delta)\}^n u$$

a lieu lorsque l'exposant n est négatif, aussi bien que lorsqu'il est positif.

968. Si l'on écrit h' au lieu de h, dans l'expression de $\Sigma^n u$ (966), on aura, pour le cas où x varie de h',

$$\Sigma'^n u = \left(e^{h'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^{-n} u,$$

équation qui se déduirait aussi de

$$\Delta'^n u = \left(e^{h'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^{n} u,$$

par le seul changement du signe de l'exposant n.

Il n'est pas difficile, en suivant la marche tracée dans le n° 940, de passer à l'équation

$$\Sigma'^n u = \{(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}} - 1\}^{-n}u,$$

qui se groupe avec

$$\Delta'^n u = \{(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}} - 1\}^{n}u.$$

969. Si dans l'expression

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \text{etc.},$$

obtenue n° 959, on remplace les différences de la fonction Q par leurs valeurs en séries, formées d'après le n° 931, et que nous représenterons, pour abréger, par

$$\Delta Q = h\,\frac{dQ}{dx} + \alpha h^2\,\frac{d^2Q}{dx^2} + \beta h^3\,\frac{d^3Q}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$\Delta^2 Q = h^2\,\frac{d^2Q}{dx^2} + \alpha' h^3\,\frac{d^3Q}{dx^3} + \beta' h^4\,\frac{d^4Q}{dx^4} + \text{etc.},$$

$$\Delta^3 Q = h^3\,\frac{d^3Q}{dx^3} + \alpha'' h^4\,\frac{d^4Q}{dx^4} + \beta'' h^5\,\frac{d^5Q}{dx^5} + \text{etc.},$$

etc.,

on aura

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \frac{dQ}{dx}\,h\Sigma^2 P_1 + \frac{d^2Q}{dx^2}\,h^2(\Sigma^3 P_2 - \alpha\Sigma^2 P_1)$$
$$- \frac{d^3Q}{dx^3}\,h^3(\Sigma^4 P_3 - \alpha'\Sigma^3 P_2 + \beta\Sigma^2 P_1) + \text{etc.}$$

Examinons en particulier le cas où $P = a^x$; il viendra pour ce cas,

$$\Sigma P = \frac{a^x}{a^h - 1},\quad \Sigma^2 P_1 = \Sigma^2 a^{x+h} = \frac{a^{x+h}}{(a^h-1)^2},\quad \Sigma^3 P_2 = \Sigma^3 a^{x+2h} = \frac{a^{x+2h}}{(a^h-1)^3},\ \text{etc.};$$

et par conséquent

$$\Sigma a^x Q = \frac{a^x Q}{a^h-1} - a^x\frac{dQ}{dx}\,\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\,h + a^x\frac{d^2Q}{dx^2}\left\{\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} - \alpha\,\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^2$$
$$- a^x\frac{d^3Q}{dx^3}\left\{\frac{a^{3h}}{(a^h-1)^4} - \alpha'\,\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} + \beta\,\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^3 + \text{etc.},$$

formule qui rentre dans celle du n° 965, lorsqu'on y substitue les valeurs des coefficiens α, β, ... α', β', etc.

En faisant usage dans le cas actuel, ainsi que dans les précédens, de la considération des exponentielles, il faut prendre $Q = e^x$; il vient alors

$$\Sigma a^x Q = \Sigma a^x e^x = \Sigma e^{x(1+la)} = \frac{e^{x(1+la)}}{e^{h(1+la)} - 1} = \frac{a^x e^x}{a^h e^h - 1};$$

et dans la même hypothèse, la série qui exprime $\Sigma a^x Q$ devenant divisible par $a^x e^x$, on a

$$\frac{1}{a^h e^h - 1} = \frac{1}{a^h-1} - \frac{a^h}{(a^h-1)^2}\,h + \left\{\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} - \frac{\alpha a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^2$$
$$- \left\{\frac{a^{3h}}{(a^h-1)^4} - \frac{\alpha' a^{2h}}{(a^h-1)^3} + \frac{\beta a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^3 + \text{etc.},$$

équation dont le second membre peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{a^h-1}-\frac{a^h}{(a^h-1)^2}h+\left\{\frac{Aa^h+A_1a^{2h}}{(a^h-1)^3}\right\}h^2-\left\{\frac{A'a^h+A'_1a^{2h}+A'_2a^{3h}}{(a^h-1)^4}\right\}h^3+\text{etc.}$$

Il reste maintenant à développer le premier sous une forme analogue ; pour y parvenir, il faut remarquer que

$$\frac{1}{a^he^h-1}=\frac{1}{(a^h-1)e^h+(e^h-1)}=\frac{e^{-h}}{(a^h-1)-(e^{-h}-1)},$$

parce qu'il en résulte

$$\frac{e^{-h}}{(a^h-1)-(e^{-h}-1)}=e^{-h}\left\{\frac{1}{(a^h-1)}+\frac{e^{-h}-1}{(a^h-1)^2}+\frac{(e^{-h}-1)^2}{(a^h-1)^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$=\left\{1-\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1.2}-\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right\}\left\{\frac{1}{a^h-1}-\frac{h\left\{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2.3}-\frac{h^3}{2.3.4}+\text{etc.}\right\}}{(a^h-1)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{h^2\left\{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2.3}-\frac{h^3}{2.3.4}+\text{etc.}\right\}^2}{(a^h-1)^3}-\text{etc.}\right\},$$

série qui prend évidemment la forme

$$\frac{1}{a^h-1}-\left\{\frac{B}{a^h-1}+\frac{B_1}{(a^h-1)^2}\right\}h+\left\{\frac{B'}{a^h-1}+\frac{B'_1}{(a^h-1)^2}+\frac{B'_2}{(a^h-1)^3}\right\}h^2-\text{etc.},$$

et rentre par conséquent dans celle de la précédente.

Si donc on y change les puissances de h en produits de la forme $h\frac{dQ}{dx}$, $h^2\frac{d^2Q}{dx^2}$, etc., et qu'on la multiplie par a^x, on aura l'expression de Σa^xQ, d'où il suit que l'on peut écrire cette équation :

$$\Sigma a^xy=a^x\left(a^he^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}y,$$

pourvu qu'on en développe le second membre comme il a été dit ci-dessus, ce qui s'opérera en faisant, pour abréger, $h\frac{d}{dx}=z$, et en réduisant la fonction $\frac{1}{a^he^z-1}$ en série ascendante suivant les puissances de z.

Le résultat précédent n'est qu'un cas particulier de l'équation

$$\Sigma^na^xy=a^x\left(a^he^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-n}y,$$

donnée en premier lieu par M. Laplace, et à laquelle on parviendrait par des considérations analogues aux précédentes. Nous la déduirons, dans le chapitre IV, de la source même dont ce géomètre l'a tirée.

970. Nous ne nous arrèterons pas au cas où la fonction u renferme plusieurs variables; nous nous bornerons à indiquer les formules

$$\Sigma^n u = \left\{e^{h\frac{d}{dx}+k\frac{d}{dy}+l\frac{d}{dz}+\text{etc.}}-1\right\}^{-n} u,$$

$$\Sigma'^n u = \left\{(1+\Delta_x)^{\frac{h'}{h}}(1+\Delta_y)^{\frac{k'}{k}}(1+\Delta_z)^{\frac{l'}{l}}\ldots-1\right\}^{-n} u,$$

qui résultent des expressions

$$\Delta^n u = \left\{e^{h\frac{d}{dx}+k\frac{d}{dy}+l\frac{d}{dz}+\text{etc.}}-1\right\}^{n} u \,(933),$$

$$\Delta'^n u = \left\{(1+\Delta_x)^{\frac{h'}{h}}(1+\Delta_y)^{\frac{k'}{k}}(1+\Delta_z)^{\frac{l'}{l}}\ldots-1\right\}^{n} u \,(941),$$

lorsqu'on y change $+n$ en $-n$, en vertu de l'analogie des puissances négatives et des intégrales. Le lecteur familiarisé avec les démonstrations que nous avons données des cas les plus simples de ces formules, trouvera sans peine le moyen de les prouver en général.

Leibnitz remarqua le premier, sur les différentielles des produits de plusieurs variables, l'analogie qu'elles ont avec les puissances; il montra bientôt après, que les intégrales en avaient une semblable avec les puissances négatives. Cette connaissance demeura stérile, jusqu'au Mémoire que Lagrange publia sur ce sujet en 1772; il généralisa les idées de Leibnitz, les étendit aux différences, et en déduisit les formules qu'on vient de rapporter; mais ces formules n'étaient encore que les résultats d'une induction, à la vérité très-fine, et l'auteur les regardait comme très-difficiles à prouver directement, lorsque M. Laplace en donna, dans le septième volume des *Savans étrangers*, des démonstrations qui réunissent l'élégance à la simplicité; il ajouta quelque chose à ce travail, en 1777 : c'est ce dernier Mémoire que j'ai suivi dans ce qui précède. On verra, dans le chapitre IV, ces mêmes formules faire partie d'une théorie complète des suites, due entièrement à M. Laplace; mais dès à présent, il paraîtra sans doute que l'analogie des puissances avec les différences est précieuse pour trouver, retenir et généraliser des expressions qui coûteraient beaucoup de peine par d'autres méthodes.

Développement de l'expression précédente de $\Sigma^n u$.

971. La formule

$$\Sigma^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^{-n} u \ (966)$$

se développera par le procédé dont on a fait usage pour la fonction $(e^h-1)^n$ à la fin du n° 932; et les relations des nombres qui multiplient les coefficiens différentiels tenant ici la place des puissances de h, s'obtiendront en écrivant $-n$ au lieu de n, dans les équations de la page 64. Si l'on donne le signe $-$ aux A qui sont affectés d'un nombre impair d'accens, afin de rendre positifs tous les termes de ces équations, il viendra, par cette opération,

$$A' = \frac{1}{2}n,$$

$$2A'' = \frac{1}{2}(n-1)A' + \frac{1}{2.3}n,$$

$$3A''' = \frac{1}{2}(n-2)A'' + \frac{1}{2.3}(n-1)A' + \frac{1}{2.3.4}n,$$

$$4A'''' = \frac{1}{2}(n-3)A''' + \frac{1}{2.3}(n-2)A'' + \frac{1}{2.3.4}(n-1)A' + \frac{1}{2.3.4.5}n,$$

etc.,

et on aura par conséquent

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^{-n} u = \frac{d^{-n}u}{dx^{-n}}h^{-n} - A'\frac{d^{-n+1}u}{dx^{-n+1}}h^{-n+1} + A''\frac{d^{-n+2}u}{dx^{-n+2}}h^{-n+2} - \text{etc.};$$

changeant en intégrales, d'après la règle prescrite dans le n° 966, les différentielles à exposant négatif, il en résultera

$$\Sigma^n u = \frac{1}{h^n}\int^n u dx^n - \frac{A'}{h^{n-1}}\int^{n-1} u dx^{n-1} + \frac{A''}{h^{n-2}}\int^{n-2} u dx^{n-2} - \text{etc.}$$

972. Examinons en particulier le cas où $n=1$, dans lequel on a

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - A'u + A''\frac{du}{dx}h - A'''\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \text{etc.},$$

en observant que $\int^{n-1} u dx^{n-1}$ devient

$$\int^{1-1} u dx^{1-1} = \int^0 u dx^0 = u.$$

On trouve par les formules du numéro précédent, que les coefficiens A''', A^{v}, A^{vii}, etc., des puissances paires de h, s'évanouissent, ce qu'on peut aussi vérifier en mettant pour A' sa valeur $\frac{1}{2}$, dans Σu, d'où l'on conclut

$$\Sigma u - \frac{1}{h}\int u \mathrm{d}x + \frac{1}{2}u = A''\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h - \text{etc.}$$

En effet, si l'on pose $u = e^x$ dans cette équation, le premier membre devient

$$\frac{1}{e^h - 1} - \frac{1}{h} + \frac{1}{2} = \frac{e^h + 1}{2(e^h - 1)} - \frac{1}{h} = \frac{e^{\frac{1}{2}h}.e^{\frac{1}{2}h} + 1}{2\left(e^{\frac{1}{2}h}.e^{\frac{1}{2}h} - 1\right)} - \frac{1}{h} = \frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{2\left(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}\right)} - \frac{1}{h},$$

fonction qui, ne faisant que changer de signe lorsqu'on y met $-h$ au lieu de $+h$, ne doit point contenir dans son développement les puissances paires de cette quantité; ainsi l'on a

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u \mathrm{d}x - \frac{1}{2}u + A''\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h + A^{iv}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}h^3 + A^{vi}\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}h^5 + \text{etc.},$$

ce qui justifie la forme supposée à Σx^m dans le n° 952.

973. On s'est beaucoup occupé de la recherche des coefficiens numériques de la valeur de Σu : voici comment M. Laplace est parvenu à l'expression générale de l'un quelconque de ces coefficiens, indépendamment de tous ceux qui le précèdent. On a premièrement

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{A}{h} + A_1 + A_2 h + A_3 h^2 + A_4 h^3 + \text{etc.};$$

en multipliant les deux membres par h, il viendra

$$\frac{h}{e^h - 1} = A + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \text{etc.}$$

Cette série étant ordonnée suivant les puissances entières et positives de h, il résulte du théorème de Taylor, que

$$A_n = \frac{1}{1.2.\ldots.n}\;\frac{\mathrm{d}^n\left\{\frac{h}{e^h - 1}\right\}}{\mathrm{d}h^n},$$

en observant de faire $h = 0$, après les différentiations; cependant si l'on effectue les calculs indiqués, les valeurs de A, A_1, A_2, etc., se présenteront toutes sous la forme $\frac{0}{0}$: M. Laplace a évité cette difficulté, par un artifice d'analyse très-ingénieux. La fraction

$\frac{h}{e^h-1}=\frac{h}{(e^{\frac{1}{2}h}-1)(e^{\frac{1}{2}h}+1)}$ se décompose en $\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}-\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}$;

de plus, il est visible que, lorsqu'on fait $h=0$, on a

$$\frac{d^q\left\{\frac{ph}{e^{ph}\pm 1}\right\}}{(pdh)^q}=\frac{d^q\left\{\frac{h}{e^h\pm 1}\right\}}{dh^q},$$

puisqu'il est indifférent d'écrire, au lieu de la quantité h, son multiple ph, qui s'évanouit en même temps qu'elle. On tire de là, toujours dans l'hypothèse de $h=0$,

$$\frac{d^q\left\{\frac{ph}{e^{ph}\pm 1}\right\}}{dh^q}=p^q\frac{d^q\left\{\frac{h}{e^h\pm 1}\right\}}{dh^q};$$

en faisant $p=\frac{1}{2}$ et $q=n$, on aura donc

$$\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}\right\}}{dh^n}-\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right\}}{dh^n}=$$

$$\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n}-\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h+1}\right\}}{dh^n}=\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n}=-\frac{1}{2^n-1}\;\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h+1}\right\}}{dh^n},$$

équation dont le second membre ne devient plus $\frac{0}{0}$, quand on y met o pour h.

Si l'on donne à $\frac{h}{e^h+1}$ la forme $h(e^h+1)^{-1}$, on obtiendra, par la formule du n° 91,

$$d^n\{h(e^h+1)^{-1}\}=d^nh(e^h+1)^{-1}+nd^{n-1}hd.(e^h+1)^{-1}\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots.+ndhd^{n-1}.(e^h+1)^{-1}+hd^n.(e^h+1)^{-1};$$

mais la différentielle dh étant prise pour constante, il ne reste que les deux derniers termes du second membre, et la supposition de $h=0$ fait encore disparaître le dernier, en sorte qu'on a seulement

$$d^n\{h(e^h+1)^{-1}\}=ndhd^{n-1}.(e^h+1)^{-1},$$

lorsque $h=0$; ce qui donne,

$$\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n} = -\frac{n}{2^n-1}\,\frac{d^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{dh^{n-1}} = -\frac{n}{2^n-1}\,\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}},$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{-1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)(2^n-1)}\,\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}.$$

Si maintenant on calcule les différentielles successives de la quantité $\frac{1}{e^h+1}$, pour en connaître la loi, on trouvera

$$\frac{d\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh} = \frac{-e^h}{(e^h+1)^2}, \qquad \frac{d^2\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^2} = \frac{e^{2h}-e^h}{(e^h+1)^3}, \quad \text{etc.};$$

et l'on en conclura qu'en général,

$$\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}} = \frac{B_1e^{(n-1)h}+B_2e^{(n-2)h}+B_3e^{(n-3)h}+\text{etc.}}{(e^h+1)^n},$$

B_1, B_2, B_3, etc., désignant des coefficiens numériques indépendans de h. Il est d'ailleurs évident que le numérateur de cette fraction ne doit contenir que des puissances positives de e^h, et que, par conséquent, le second membre de l'équation

$$(e^h+1)^n\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}} = B_1e^{(n-1)h}+B_2e^{(n-2)h}+B_3e^{(n-3)h}\ldots\ldots+B_{n-1}e^h$$

doit s'arrêter à $B_{n-1}e^h$; d'où il suit que si on développe le premier en une série descendante ordonnée suivant les puissances de e^h, cette série doit aussi se terminer à e^h. Or on a

$$(e^h+1)^{-1} = e^{-h}(1+e^{-h})^{-1} = e^{-h}-e^{-2h}+e^{-3h}-e^{-4h}+\text{etc.},$$
$$\frac{d^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{dh^{n-1}} = \mp\left\{e^{-h}-2^{n-1}e^{-2h}+3^{n-1}e^{-3h}-4^{n-1}e^{-4h}+\text{etc.}\right\};$$

le signe $-$ se rapportant au cas où n est pair, et le signe $+$ à celui où il est impair : on obtiendra donc

$$\mp(e^h+1)^n\left\{e^{-h}-2^{n-1}e^{-2h}+3^{n-1}e^{-3h}-4^{n-1}e^{-4h}+\text{etc.}\right\}$$
$$= B_1e^{(n-1)h}+B_2e^{(n-2)h}+B_3e^{(n-3)h}\ldots\ldots+B_{n-1}e^h,$$

en observant de s'arrêter, dans le développement du premier membre, au terme multiplié par e^h, parce que tous les autres doivent évidemment s'évanouir. D'après cette remarque, il viendra

$$(e^h+1)^n \frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}} =$$
$$\mp\left\{\begin{array}{l} e^{(n-1)h} - e^{(n-2)h}\{2^{n-1}-n\} + e^{(n-3)h}\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\} \\ \quad - e^{(n-4)h}\left\{4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

Si l'on divise les deux membres de cette équation par $(e^h+1)^n$, qu'on fasse ensuite $h=0$, dans le second, il en résultera

$$\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}} = \mp\frac{1}{2^n}\left\{\begin{array}{l}1-\{2^{n-1}-n\}+\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\} \\ -\left\{4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

et enfin

$$A_n = \frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(n-1)(2^n-1)2^n}\left\{\begin{array}{l}1-\{2^{n-1}-n\}+\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\left\{(n-1)^{n-1}-(n-2)^{n-1}n+(n-3)^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\text{etc.}\right\}\end{array}\right\}.$$

Il ne faut pas oublier que le signe supérieur convient au cas où n est pair, et le signe inférieur a lieu dans le cas contraire.

974. Cette valeur ne peut être employée que quand $n>1$; car elle devient infinie lorsque $n=1$; et on prouve avec la plus grande facilité, qu'elle s'évanouit dans tous les cas où n est impair et >1. En effet, si dans la première formule du n° 887, on fait $m=n-1$, $h=1$ et $x=-1,-2,-$etc., en mettant à part les termes dans lesquels les facteurs de la forme $(n-i)^{n-1}$ deviennent de celle-ci $(-p)^{n-1}$, parce que i l'emporte sur n, on a

$$\Delta^n.(-1)^{n-1}=\left.\begin{array}{l}(n-1)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mp n(n-n)^{n-1}\pm(n-n-1)^{n-1}\end{array}\right\}=$$
$$=(n-1)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1}\ldots\ldots\pm(-1)^{n-1},$$
$$\Delta^n.(-2)^{n-1}=(n-2)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-3)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1}\ldots\mp\{n(-1)^{n-1}-(-2)^{n-1}\},$$
$$\Delta^n.(-3)^{n-1}=(n-3)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-4)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1}\ldots\pm\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}(-1)^{n-1}-n(-2)^{n-1}+(-3)^{n-1}\right\}$$
etc.;

mais comme en général, $\Delta^n . x^{n-1} = 0$ (885), les premiers membres des équations ci-dessus s'évanouissent, et les seconds donnent alors

$$(n-1)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} \ldots = 1,$$
$$(n-2)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} \ldots = 2^{n-1} - n,$$
$$(n-3)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} \ldots = 3^{n-1} - 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{1.2},$$
etc.,

en ne comprenant dans les premiers membres de chacune de ces dernières équations que les termes où la quantité $n-i$ est positive entre les parenthèses des puissances $n-1$. Cela posé, il est évident que le numérateur de l'expression de A_n renferme un nombre pair de termes lorsque n est impair; si l'on substitue, à la place de la première moitié de ces termes qui forment les seconds membres des équations précédentes, leurs valeurs, et que l'on fasse attention aux signes de la seconde moitié, qui se déduisent de celui du dernier terme, on aura le résultat suivant :

$$
\begin{array}{l}
(n-1)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} - \ldots \\
-(n-2)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} + \ldots \\
+(n-3)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} - \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-(n-3)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} + \ldots \\
+(n-2)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} - \ldots \\
-(n-1)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} + \ldots
\end{array}
$$

dans lequel les lignes placées à égale distance de la première et de la dernière sont composées des mêmes termes, mais pris avec un signe contraire; or le nombre de ces lignes étant pair, leur assemblage sera identiquement nul : ainsi $A_n = 0$, lorsque n est impair.

Lorsque n est pair, le numérateur de A_n a un terme moyen exprimé par

$$\pm\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1} - \text{etc.}\right\},$$

et ceux qui sont placés à égale distance des termes extrêmes sont affectés du même signe, en sorte que si l'on met à la place du dernier, et de ceux qui le précèdent, jusqu'au terme moyen exclusivement, les expressions équivalentes

$$1,\quad 2^{n-1}-n,\quad 3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2},\quad \text{etc.},$$

il viendra, en réunissant les termes semblables placés à égale distance avant et après le terme moyen,

$$\begin{array}{l}
2.1 \\
+2\left\{2^{n-1}-n\right\} \\
+2\left\{3^{n-1}-2^{n-1}\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mp 2\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}-\frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-3\right)^{n-1}-\ldots\ldots\right\} \\
\pm\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1}-\ldots\ldots\right\};
\end{array}$$

le signe supérieur ayant lieu quand $\frac{n}{2}$ est impair, et le signe inférieur lorsque ce nombre est pair. Soit fait $\frac{n}{2}=p$, et concevons qu'après la substitution on divise par 2 le numérateur et le dénominateur de A_n, on aura

$$A_{2p}=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(2p-1)(2^{2p}-1)2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left\{p^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-1)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-2)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\
-\left\{(p-1)^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-2)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-3)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\
+\left\{(p-2)^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-3)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-4)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\
-\text{etc.},
\end{array}\right.$$

ce résultat étant ordonné par rapport aux puissances de p, $p-1$, $p-2$, etc., prendra la forme

$$A_{2p}=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(2p-1)(2^{2p}-1)2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}p^{2p-1}-(p-1)^{2p-1}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2p}{1}\right\}+(p-2)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)}{1.2}\right\} \\
\quad -(p-3)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}\right\} \\
\quad +\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Telle est l'expression du coefficient du terme général de la suite

$$\frac{1}{e^h-1}=\frac{1}{h}\{A+A_1h+A_2h^2+A_4h^4+A_6h^6\ldots\ldots+A_{2p}h^{2p}+\text{etc.}\},$$

d'après laquelle on forme celle-ci :

$$\Sigma u=\frac{1}{h}A\int u\mathrm{d}x+A_1u+A_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h+A_4\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}h^3+A_6\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}h^5\ldots+A_{2p}\frac{\mathrm{d}^{2p-1}u}{\mathrm{d}x^{2p-1}}h^{2p-1}+\text{etc.}$$

975. Si l'on fait $u=x^m$, dans la formule de l'article précédent, on aura

$$\Sigma x^m=A\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}+A_1x^m+A_2mx^{m-1}h+A_4m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3$$
$$+A_6m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5}h^5+\text{etc.}$$

La série s'arrêtera toutes les fois que l'exposant m sera entier et positif; le dernier terme sera

$$A_m m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2.xh^{m-1},$$

si m est pair, et

$$A_{m+1}m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1.h^m,$$

si ce nombre est impair.

En rapprochant ce résultat de celui que nous avons rapporté dans le n° 951, on trouvera, entre les coefficiens représentés par B_1, B_3, B_5, B_7, etc., dans le n° 952, et ceux qui le sont maintenant par A_2, A_4, A_6, A_8, etc., les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}A_2&=B_1.\tfrac{1}{2},\\ A_4&=B_3.\tfrac{1}{2.3.4},\\ A_6&=B_5.\tfrac{1}{2.3.4.5.6},\\ A_8&=B_7.\tfrac{1}{2.3.4.5.6.7.8},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{2p}&=B_{2p-1}.\tfrac{1}{2.3.4\ldots 2p},\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned}B_1&=2A_2,\\ B_3&=2.3.4A_4,\\ B_5&=2.3.4.5.6A_6,\\ B_7&=2.3.4.5.6.7.8A_8;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B_{2p-1}&=2.3.4\ldots 2pA_{2p};\end{aligned}\right.$$

et comme la formation des coefficiens A, A_1, A_2, A_4, A_6, etc., est connue, celle des nombres de Bernoulli, représentés par B_1, B_3, B_5, etc., le sera pareillement; car de l'équation

$$B_{2p-1}=2.3.4\ldots.2pA_{2p},$$

il résulte

$$B_{2p-1} = \frac{\pm 2p}{(2^{2p}-1)2^{2p-1}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}p^{2p-1} - (p-1)^{2p-1}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2p}{1}\right\} + (p-2)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)}{1.2}\right\} \\ \quad -(p-3)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}\right\} \\ \quad + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Exprimée par les nombres B_1, B_3, etc., la valeur de Σu devient

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\mathrm{d}x - \frac{1}{2}u + B_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{2} + B_3 \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{2.3.4} + B_5 \frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\frac{h^5}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

976. L'intégrale $\int u\mathrm{d}x$, qui entre dans la formule précédente, pourrait en être chassée au moyen de la série

$$\int u\mathrm{d}x = ux - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{2.3} - \text{etc. (482)},$$

qui s'arrête aussi lorsque la fonction u a, dans un ordre quelconque, des différences constantes; mais on parvient directement à une expression délivrée du signe $\int$, par le moyen du théorème de Taylor, qui, pour les quantités u_{-1}, u_{-2}, u_{-3}, ... u_{-n}, antécédentes à u, donne les séries

$$u - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

$$u - 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + 4\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} - 8\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + 16\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

....

$$u - n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + n^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} - n^3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + n^4\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

En ajoutant toutes ces valeurs ensemble (943), on trouve

$$\begin{aligned} \Sigma u = nu &- (1+2+3 \ldots\ldots + n)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} \\ &+ (1^2+2^2+3^2 \ldots\ldots + n^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} \\ &- (1^3+2^3+3^3 \ldots\ldots + n^3)\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} \\ &+ (1^4+2^4+3^4 \ldots\ldots + n^4)\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} \\ &- \text{etc.}; \end{aligned}$$

désignant par Sn, Sn^2, Sn^3, etc. les sommes des puissances des termes de la série 1, 2, 3,....n, on obtient cette formule

$$\Sigma u = nu - Sn.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + Sn^2.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} - Sn^3.\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

dans laquelle Σu s'étend depuis $x-nh$ jusqu'à x. Les sommes Sn, Sn^2, Sn^3, etc., sont rapportées dans le *Complément des Élémens d'Algèbre*, et l'on verra plus loin (990) la manière de les déduire des intégrales Σ.

On rendra semblables entre eux tous les termes de cette expression de Σu, en observant que $n = Sn^0$, et on aura

$$\Sigma u = Sn^0.u - Sn.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + Sn^2.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} - Sn^3.\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

977. Le développement de l'expression

$$\Sigma.a^x y = a^x\left(a^h e^{h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^{-1} y \quad (969)$$

s'obtient aussi par le théorème de Taylor. En appliquant ce théorème à la fonction $\frac{1}{a^h e^z - 1}$, il donne

$$\frac{1}{a^h-1} - \frac{a^h}{(a^h-1)^2}z + \frac{1}{2}\left\{\frac{2a^{2h}}{(a^h-1)^3} - \frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}z^2 - \text{etc.},$$

et le coefficient du $n^{ième}$ terme de cette suite, ou de z^{n-1}, sera égal à $\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{1}{\mathrm{d}z^{n-1}}\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{a^h e^z - 1}$, en observant de faire $z = 0$ après les différentiations. Il se déterminera d'une manière analogue à celle dont on a trouvé $\frac{1}{\mathrm{d}h^{n-1}}\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{e^h+1}$ dans le n° 973. On a en effet

$$\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{a^h e^z - 1} = \frac{C_1 a^{(n-1)h}e^{(n-1)z} + C_2 a^{(n-2)h}e^{(n-2)z} + C_3 a^{(n-3)h}e^{(n-3)z}\ldots + C_{n-1}a^h e^z}{(a^h e^z - 1)^n}\mathrm{d}z^{n-1};$$

$$\frac{1}{a^h e^z - 1} = a^{-h}e^{-z} + a^{-2h}e^{-2z} + a^{-3h}e^{-3z} + a^{-4h}e^{-4z} + \text{etc.};$$

par cette dernière série on trouve

$$\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{a^h e^z - 1} = \mp\{a^{-h}e^{-z} + 2^{n-1}a^{-2h}e^{-2z} + 3^{n-1}a^{-3h}e^{-3z} + 4^{n-1}a^{-4h}e^{-4z} + \text{etc.}\}\mathrm{d}z^{n-1};$$

multipliant le second membre de cette équation par le développement de $(a^h e^z - 1)^n$, pour le comparer au numérateur de la première expres-

sion de $\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{a^h e^z - 1}$, on trouvera

$$\mp\left\{\begin{array}{r} a^{(n-1)h}e^{(n-1)z} + 2^{n-1}a^{(n-2)h}e^{(n-2)z} + 3^{n-1}a^{(n-3)h}e^{(n-3)z} + 4^{n-1}a^{(n-4)h}e^{(n-4)z} + \text{etc.} \\ - na^{(n-2)h}e^{(n-2)z} - 2^{n-1}na^{(n-3)h}e^{(n-3)z} - 3^{n-1}na^{(n-4)h}e^{(n-4)z} - \text{etc.} \\ + \frac{n(n-1)}{2}a^{(n-3)h}e^{(n-3)z} + 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{2}a^{(n-4)h}e^{(n-4)z} + \text{etc.} \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{(n-4)h}e^{(n-4)z} - \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= C_1 a^{(n-1)h}e^{(n-1)z} + C_2 a^{(n-2)h}e^{(n-2)z} + C_3 a^{(n-3)h}e^{(n-3)z} \ldots + C_{n-1}a^h e^z,$$

d'où l'on déduira

$$C_1 = \mp 1, \quad C_2 = \mp(2^{n-1} - n), \quad C_3 = \mp\left(3^{n-1} - 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{2}\right),$$

$$C_4 = \mp\left(4^{n-1} - 3^{n-1}n + 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\right), \quad \text{etc.}$$

Faisant ensuite $z = 0$, dans l'expression de $\mathrm{d}^{n-1}\frac{1}{a^h e^z - 1}$, et se rappelant qu'il faut remplacer z^{n-1} par $h^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$, on aura pour le terme général de la valeur de $\Sigma a^x y$, cette formule

$$\mp\frac{\left\{a^{(n-1)h} + (2^{n-1} - n)a^{(n-2)h} + \left(3^{n-1} - 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{2}\right)a^{(n-3)h} + \text{etc.}\right\}}{1.2.3\ldots(n-1)(a^h - 1)^n}h^{n-1}a^x\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}.$$

978. Nous allons encore rapporter une méthode proposée par Euler; pour obtenir l'expression approchée de Σu, au moyen d'une équation différentielle du premier degré et d'un ordre indéfini.

Si l'on fait $\Sigma u = z$, il viendra $u = \Delta z$; et l'on aura, par le théorème de Taylor, l'équation

$$u = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

que l'on pourra terminer lorsque la quantité h sera très-petite, ou que les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$, etc., ne formeront pas une série divergente; on aura alors une équation différentielle du premier degré, à coefficiens constans, d'un ordre marqué par celui du

terme auquel on s'arrêtera, et dont l'intégration ferait connaître la fonction z (611).

Au lieu d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus, pour en tirer la valeur de u, nous ferons usage de la méthode des substitutions successives. En négligeant d'abord les puissances de h, supérieures à la première, on aura $u = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1}$, d'où $z = \frac{1}{h}\int u dx$. Soit, pour abréger, $\frac{1}{h}\int u dx = P$, et posons $z = P + ph$; en substituant cette valeur dans l'expression de u, nous aurons

$$u = \begin{cases} \frac{dP}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2P}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3P}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3p}{dx^3}\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.}: \end{cases}$$

mais il est évident que la première ligne du second membre est égale à ΔP; et en se bornant dans la seconde au terme affecté de h^2, on obtiendra $u - \Delta P = \frac{dp}{dx}h^2$, d'où $p = \frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)dx$.

Faisons encore

$$\frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)dx = P',$$

et prenons $p = P' + p'h$; l'équation

$$u - \Delta P = \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3p}{dx^3}\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.}$$

deviendra

$$u - \Delta P = \begin{cases} \frac{dP'}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2P'}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3P'}{dx^3}\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + \frac{dp'}{dx}\frac{h^3}{1} + \frac{d^2p'}{dx^2}\frac{h^4}{1.2} + \frac{d^3p'}{dx^3}\frac{h^5}{1.2.3} + \text{etc.}; \end{cases}$$

la première ligne du second membre étant égale à $h\Delta P'$, on aura, en se bornant au premier terme de la seconde,

$$u - \Delta P - h\Delta P' = \frac{dp'}{dx}h^3, \text{ d'où } p' = \frac{1}{h^3}\int(u - \Delta P - h\Delta P')dx.$$

Il est facile de continuer ce procédé, qui donnera

$$\Sigma u = z = P + P'h + P''h^2 + \text{etc.},$$

$$P = \frac{1}{h}\int u dx, \quad P' = \frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)dx, \quad P'' = \frac{1}{h^3}\int(u - \Delta P - h\Delta P')dx, \text{etc.}$$

Pour en montrer l'application, nous ferons, avec Euler, $u=x^2$, $h=1$; il viendra

$$P=\tfrac{1}{3}x^3,\quad P'=\int\{x^2-\tfrac{1}{3}(3x^2+3x+1)\}dx=-(\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x),$$
$$P''=\int\{-(x+\tfrac{1}{3})+x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\}\,dx=\tfrac{1}{2}x,\quad P'''=0,$$

et par conséquent

$$\Sigma x^2=\tfrac{1}{3}x^3-(\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x)+\tfrac{1}{2}x+const.=\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x+const.,$$

résultat qui s'accorde avec celui du n° 950.

979. Lorsque la fonction u est de la forme vy, on parvient à un résultat délivré du signe d'intégration, en faisant $\Sigma vy=vz$, ce qui donne

$$vy=\Delta.vz=z\Delta v+v\Delta z+\Delta v\Delta z=z\Delta v+v_1\Delta z,$$

en mettant v_1 à la place de $v+\Delta v$, et d'où on tire

$$vy-z\Delta v=v_1\left\{\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right\}.$$

En négligeant les termes multipliés par h, on obtient d'abord $z=\frac{vy}{\Delta v}$. Faisant $\frac{vy}{\Delta v}=P$ et $z=P+ph$, il vient ensuite

$$-ph\Delta v=v_1\left\{\begin{array}{l}\frac{dP}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3P}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\+\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1}+\frac{d^2p}{dx^2}\frac{h^3}{1.2}+\frac{d^3p}{dx^3}\frac{h^4}{1.2.3}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

d'où l'on déduira, en raisonnant comme dans le numéro précédent,

$$-ph\Delta v=v_1\Delta P,\quad\text{et}\quad p=-\frac{v_1\Delta P}{h\Delta v};$$

puis on posera

$$-\frac{v_1\Delta P}{h\Delta v}=P',\qquad p=P'+p'h,$$

et en vertu de l'équation

$$-ph\Delta v=v_1\Delta P+v_1\left\{\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1}+\frac{d^2p}{dx^2}\frac{h^3}{1.2}+\text{etc.}\right\},$$

on aura

$$-p'h^2\Delta v=v_1\left\{\begin{array}{l}\frac{dP'}{dx}\frac{h^2}{1}+\frac{d^2P'}{dx^2}\frac{h^3}{1.2}+\text{etc.}\\+\frac{dp'}{dx}\frac{h^3}{1}+\frac{d^2p'}{dx^2}\frac{h^4}{1.2}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

d'où on tirera

$$-p'h\Delta v = v_1\Delta P', \quad p' = -\frac{v_1\Delta P'}{h\Delta v}.$$

La marche du reste de l'opération est semblable à ce commencement, et en la suivant on parvient à

$$\Sigma vy = vz = v\,\{P + P'h + P''h^2 + \text{etc.}\},$$
$$P = \frac{vy}{\Delta v}, \qquad P' = -\frac{v_1\Delta P}{h\Delta v}, \qquad P'' = -\frac{v_1\Delta P'}{h\Delta v}, \qquad \text{etc.}$$

980. Ce serait ici le lieu de rapporter, comme formules d'approximation, celles qu'on tirerait des nos 945, 947, parce qu'elles sont analogues aux expressions de $\int X\mathrm{d}x$ données dans le n° 482; mais comme elles mènent rarement à des suites convergentes, nous aurons peu de chose à dire sur la manière d'intégrer par approximation les différences. Ce procédé, de même que son analogue dans le Calcul intégral aux différentielles, consiste à convertir les fonctions proposées, en séries dont chaque terme soit facilement intégrable; et c'est ce qui arrive quand ces termes sont des produits de facteurs équidifférens (946, 947), ou l'unité divisée par ces produits (948).

Cependant il est à remarquer que la plus simple de ces dernières fonctions échappe à la règle générale donnée pour leur intégration, de même que la différentielle $x^{-1}\mathrm{d}x$ met en défaut la formule $\frac{x^{m+1}}{m+1}$; car l'intégrale $\Sigma\frac{1}{x}$ étant rapportée à la formule générale du n° 948, donne $m = 1$, ce qui rend infini le facteur constant $\frac{-1}{(m-1)h}$ de cette formule, et nul le nombre des facteurs variables qu'elle doit contenir, indiqué par $m - 1$ dans l'état général; on verra plus loin (982) ce que signifie cette dernière circonstance.

En recourant à la formule du n° 975, il vient

$$\Sigma\frac{1}{x} = \frac{1}{h}\,\mathrm{l}x - \frac{1}{2x} - \frac{B_1 h}{2x^2} - \frac{B_3 h^3}{4x^4} - \frac{B_5 h^5}{6x^6} - \text{etc.} + const.$$

981. Stirling s'est occupé le premier de la conversion des puissances positives et négatives en produits directs ou inverses de facteurs équidifférens; mais les résultats qu'il a obtenus s'expriment plus simplement et se généralisent beaucoup, en considérant ces produits dans leur analogie avec les puissances, comme l'a fait Vandermonde, dont je vais

Digression sur les puissances du second ordre ou factorielles.

exposer ici l'ingénieuse théorie, qui se trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1772 (Ire partie, p. 489).

Par l'expression x^n on entend le produit d'un nombre n de termes consécutifs de la suite

$$x, \quad x, \quad x, \quad x, \quad x, \quad \text{etc.},$$

dont les différences premières sont nulles. Après cette suite, se présente immédiatement celle-ci :

$$x, \quad x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \quad \text{etc.},$$

dont les différences premières sont constantes et les secondes nulles : il paraît donc naturel de regarder le produit d'un nombre n de termes de cette dernière, comme venant après la fonction x^n, dans l'ordre de la simplicité, et de l'exprimer d'une manière analogue; c'est pourquoi nous représenterons la quantité

$$x(x+h)\ldots.[x+(n-1)h], \qquad \text{par } [x, \overset{n}{h}],$$

h désignant la différence commune des facteurs, et n étant leur nombre.

En passant aux suites dont les différences secondes sont constantes et les troisièmes nulles, on ne formerait pas, comme a paru le croire Vandermonde, un nouveau genre de fonctions; car toute fonction algébrique dont les différences secondes sont constantes, étant de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, peut se décomposer en facteurs du premier degré, sous la forme $\alpha(x-a)(x-b)$, d'où il suit que passant de x à

$$x+h, \quad x+2h, \ldots\ldots x+(n-1)h,$$

et formant le produit des valeurs successives que prend alors la fonction proposée, on aura, suivant la notation employée ci-dessus,

$$[\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \overset{n}{h}] = \alpha^n [x-a, \overset{n}{h}][x-b, \overset{n}{h}],$$

d'où l'on voit que la fonction du premier membre se décompose en produits de facteurs simples équidifférens.

Cette considération, qui peut s'étendre aussi loin qu'on voudra, m'a fait renoncer à la dénomination de *puissances du second ordre*, que

j'avais appliquée au produit $[x, \overset{n}{h]}$, et préférer le nom de *factorielles*, que leur a donné Arbogast (*).

1°. On peut présenter toute factorielle de manière à rendre la différence $h=1$, et faire ensuite abstraction de cette différence, ce qui simplifie un peu la notation; en effet, en reprenant la valeur attachée au symbole $[x, \overset{n}{h]}$, on a

$$\begin{aligned} &x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots[x+(n-1)h] \\ &=h^n\left(\tfrac{x}{h}\right)\left(\tfrac{x}{h}+1\right)\left(\tfrac{x}{h}+2\right)\ldots\left(\tfrac{x}{h}+n-1\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$[x, \overset{n}{h]} = h^n\left[\tfrac{x}{h},\ \overset{n}{1}\right] = h^n\left[\overset{n}{\tfrac{x}{h}}\right],$$

en convenant de ne point écrire la différence des facteurs, toutes les fois qu'elle est égale à l'unité.

2°. Nous avons supposé que la suite

$$x,\quad x+h,\quad x+2h,\quad x+3h,\quad \text{etc.},$$

était croissante; on indiquerait le contraire, en affectant du signe — la différence h; mais pour donner aux produits désignés par $\left[\overset{n}{\tfrac{x}{h}}\right]$ la forme des coefficiens du binome dont les facteurs sont écrits dans un ordre décroissant, nous supposerons que x est le dernier terme de la suite proposée, et que

$$\left[\overset{n}{\tfrac{x}{h}}\right] = \tfrac{x}{h}\left(\tfrac{x}{h}-1\right)\left(\tfrac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\tfrac{x}{h}-n+1\right).$$

Cela posé, faisons, pour abréger, $\frac{x}{h}=p$, et montrons les rapports du symbole $[\overset{n}{p}]$, avec l'expression si bien connue p^n.

982. Il est d'abord évident que de même qu'on a $p^n=p^m.p^{n-m}$, on a aussi $[\overset{n}{p}]=[\overset{m}{p}][p-\overset{n-m}{m}]$; car,

(*) M. Kramp les avait d'abord appelées *facultés numériques*, dans son *Analyse des réfractions*, mais il se sert à présent du nom proposé par Arbogast; et il désignerait $[x, \overset{n}{h]}$ par $x^{n|h}$. (Voyez ses *Elémens d'Arithmétique universelle*.)

$$[p]^{n} = p\,(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1),$$
$$[p]^{m} = p\,(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1);$$
$$[p-m]^{n-m} = (p-m)(p-m-1)\ldots[p-m-(n-m-1)],$$

et le troisième produit, dont le dernier facteur se réduit à $p-n+1$, renferme tous ceux du premier qui ne se trouvent pas dans le second.

Les conséquences qui résultent de l'équation $p^{n}=p^{m}.p^{n-m}$, lorsqu'on y fait $m=0$ et m négative, ont leurs analogues pour les factorielles. Quand $m=0$, on a $p^{n}=p^{0}p^{n}$, d'où $p^{0}=1$, et l'équation $[p]^{n}=[p]^{m}[p-m]^{n-m}$, devenant $[p]^{n}=[p]^{0}[p]^{n}$, donne aussi $[p]^{0}=1$.

En faisant $n=0$, dans la même équation, on en tire.......... $[p]^{0}=[p]^{m}[p-m]^{-m}$, ce qui conduit à $[p-m]^{-m}=\frac{[p]^{0}}{[p]^{m}}=\frac{1}{[p]^{m}}$, comme l'équation $p^{0}=p^{m}.p^{-m}$, dans la même hypothèse, mène à.......... $p^{-m}=\frac{p^{0}}{p^{m}}=\frac{1}{p^{m}}$; et si l'on écrit $p+m$, au lieu de p, on aura

$$[p]^{-m}=\frac{1}{[p+m]^{m}}.$$

Ces deux dernières remarques établissent la loi de continuité entre

$$[p]^{n}=p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n+1),$$
$$[p]^{0}=1,$$
$$[p]^{-n}=\frac{1}{(p+n)(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)}.$$

En écrivant, dans la troisième expression, les facteurs du dénominateur suivant l'ordre direct de leur grandeur, on aura

$$[p]^{-n}=\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+n)};$$

et si l'on fait $p=0$, on tombera sur la nouvelle expression

$$[0]^{-n}=\frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

qui, toute singulière qu'elle est, n'en doit pas moins être adoptée, à

cause de sa simplicité. Elle n'est point absurde, puisque le facteur o n'entre pas dans son développement.

983. Éclaircissons cette notation par quelques exemples. Le produit

11.9.7.5 s'écrira de ces deux manières : $[11, 2]^{4}$, $2^4\left[\frac{11}{2}\right]^{4}$;

la fraction $\frac{1}{5.7.9.11}$ de celles-ci : $2^{-4}\left[\frac{5}{2}-1\right]^{-4}$, $\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\right]^{-4}$;

la fraction $\frac{1}{1.4.7.10.13}$ revient à $3^{-5}\left[\frac{1}{3}-1\right]^{-5}$, ou $\frac{1}{3^5}\left[-\frac{2}{3}\right]^{-5}$;

enfin $\frac{1}{1.2.3.4.5}$ équivaut à $[0]^{-5}$.

La première et la seconde fractions se ramènent à la forme

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots.(p+n)} = [p]^{-n},$$

en divisant chaque facteur du dénominateur par la différence qui règne entr'eux.

La formule du binome devient, par ces nouveaux signes,

$$(a+b)^n = a^n + [n]^{1}[0]^{-1}a^{n-1}b + [n]^{2}[0]^{-2}a^{n-2}b^2 + [n]^{3}[0]^{-3}a^{n-3}b^3$$
$$\ldots.. + [n]^{m}[0]^{-m}a^{n-m}b^m + \text{etc.}$$

Ce qui les distingue de la plupart des notations qu'on aurait pu imaginer, c'est qu'ils sont susceptibles de devenir l'objet d'un calcul aussi simple que celui des exposans, avec lesquels ils ont la plus grande analogie. Le lecteur se les rendra familiers par les fréquentes applications que nous aurons occasion d'en faire; mais il doit se rappeler soigneusement ces résultats :

$[x, h]^{n} = x^n$, lorsque $h = 0$;

$[x, h]^{n} = x^n$, lorsque x est infinie par rapport à n et à h;

$[p]^{n} = 0$, lorsque $p = 0$;

$[p]^{-n} = \frac{1}{0}$, lorsque $p = -1$;

$\Delta[p]^{n} = n[p]^{n-1}$ (926), $\Sigma[p]^{n} = \frac{[p]^{n+1}}{n+1} + const.$ (946),

$\Delta[p]^{-n} = -n[p]^{-n-1}$, $\Sigma[p]^{-n} = \frac{[p]^{-n+1}}{-n+1} + const.$ (947).

984. Occupons-nous maintenant de transformer les puissances p^n, en fonctions des factorielles $[p]^{n}$, $[p]^{n-1}$, etc. Suivant la marche de Vandermonde, faisons d'abord

$$p^n = A[p]^{n} + B[p]^{n-1} + C[p]^{n-2} + D[p]^{n-3} \ldots + M[p]^{2} + N[p]^{1},$$

et supposons que n devienne $n+1$; à cause de $p^{n+1} = p^n . p$, nous aurons

$$p^{n+1} = Ap[p]^{n} + Bp[p]^{n-1} + Cp[p]^{n-2} + Dp[p]^{n-3} \ldots + Mp[p]^{2} + Np[p]^{1};$$

mais de $[p]^{n+1} = [p]^{n}(p-n)$, on tire $p[p]^{n} = [p]^{n+1} + n[p]^{n}$,

$$\begin{array}{ll}
[p]^{n} = [p]^{n-1}(p-n+1), & p[p]^{n-1} = [p]^{n} + (n-1)[p]^{n-1}, \\
[p]^{n-1} = [p]^{n-2}(p-n+2), & p[p]^{n-2} = [p]^{n-1} + (n-2)[p]^{n-2}, \\
[p]^{n-2} = [p]^{n-3}(p-n+3), & p[p]^{n-3} = [p]^{n-2} + (n-3)[p]^{n-3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p]^{3} = [p]^{2}(p-2), & p[p]^{2} = [p]^{3} + 2[p]^{2}, \\
[p]^{2} = [p]^{1}(p-1), & p[p]^{1} = [p]^{2} + 1[p]^{1};
\end{array}$$

substituant ces valeurs, il viendra

$$p^{n+1} = A[p]^{n+1} + \left.\begin{array}{l} B \\ +nA \end{array}\right| [p]^{n} + \left.\begin{array}{l} C \\ +(n-1)B \end{array}\right| [p]^{n-1} + \left.\begin{array}{l} D \\ +(n-2)C \end{array}\right| [p]^{n-2} \ldots + \left.\begin{array}{l} N \\ +2M \end{array}\right| [p]^{2} \left.\begin{array}{l} \\ +N \end{array}\right| [p]^{1}.$$

Le second membre de cette équation donne la manière de tirer successivement le coefficient d'une puissance quelconque de ceux de la puissance immédiatement inférieure. Si l'on fait $n=0$, il en résultera $p = A[p]^{1}$; et comme $[p]^{1} = p$, on en conclura $A=1$. Ce premier coefficient étant connu, tous les autres se forment avec la plus grande facilité; et c'est ainsi qu'on a construit la table ci-dessous.

$$\begin{array}{l}
p^1 = [p]^{1}, \\
p^2 = [p]^{2} + [p]^{1}, \\
p^3 = [p]^{3} + 3[p]^{2} + [p]^{1}, \\
p^4 = [p]^{4} + 6[p]^{3} + 7[p]^{2} + [p]^{1}, \\
p^5 = [p]^{5} + 10[p]^{4} + 25[p]^{3} + 15[p]^{2} + [p]^{1},
\end{array}$$

etc.

On arriverait à l'expression générale de p^n, avec le secours de l'intégration; car, par l'expression de p^{n+1}, on a

$$\Delta B = nA, \quad \Delta C = (n-1)B, \quad \Delta D = (n-2)C, \quad \text{etc.};$$

or, A étant 1, on trouve $B = \Sigma n = \Sigma \overset{1}{[n]} = \frac{\overset{2}{[n]}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, ce qui donne $\Delta C = \frac{(n-1)^2 n}{2}$; et en observant que d'après les formules précédentes, $(n-1)^2 = \overset{2}{[n-1]} + [n-1]$, on changera ΔC en $\frac{\overset{3}{[n]} + \overset{2}{[n]}}{2}$, d'où on tirera, en intégrant,

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\overset{4}{[n]}}{4} + \frac{\overset{3}{[n]}}{3}\right) + const. = \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\right\} + const.$$

Les constantes se déterminent ici comme après l'intégration des différentielles, par une valeur donnée; et puisque les coefficiens B, C, etc., doivent s'évanouir lorsque $n=0$, il s'ensuit que les constantes mises à la suite de leurs expressions doivent être supprimées.

985. La transformation qui se ferait successivement, au moyen des formules précédentes, s'effectue sur-le-champ par la formule du n° 926, qui, par la notation de Vandermonde, et en faisant $\frac{x}{h} = p$, devient

$$u_x = u + \frac{\overset{1}{[p]}\Delta u}{1} + \frac{\overset{2}{[p]}\Delta^2 u}{1.2} + \frac{\overset{3}{[p]}\Delta^3 u}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En l'appliquant à x^m, et l'écrivant dans un ordre inverse, on trouve, pour le cas où $h=1$,

$$x^m = \frac{\overset{m}{[p]}\Delta^m . 0^m}{1.2.3\ldots m} + \frac{\overset{m-1}{[p]}\Delta^{m-1} . 0^m}{1.2.3\ldots(m-1)} \ldots\ldots + \frac{\overset{2}{[p]}\Delta^2 . 0^m}{1.2} + \frac{\overset{1}{[p]}\Delta . 0^m}{1},$$

ce qui fournit de nouvelles expressions des coefficiens A, B, C, etc. Il faut observer que le coefficient du premier terme est toujours l'unité, puisque $\Delta^m . 0^m = 1.2.3\ldots m$ (885).

Je n'insisterai point ici sur la transformation inverse de la précédente; car il est facile de voir que la factorielle $\overset{n}{[p]}$, équivalant à

$$p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-n+1),$$

se développe suivant les puissances de p, dans la forme

$$p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + A_3 p^{n-3} \ldots\ldots + A_{n-1} p,$$

A_1 A_2, A_3, etc., désignant la somme des nombres 1, 2, 3, ... $n-1$, celles de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. Nous reviendrons dans la suite sur la formation de ces sommes (*).

986. Passons maintenant aux puissances négatives, et faisons

$$p^{-n} = A\overset{-n}{[p]} + B\overset{-n-1}{[p]} + C\overset{-n-2}{[p]} \ldots\ldots + M\overset{-n-m}{[p]} + N\overset{-n-m-1}{[p]} + \text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par p, nous aurons

$$p^{-n+1} = Ap\overset{-n}{[p]} + Bp\overset{-n-1}{[p]} + Cp\overset{-n-2}{[p]} \ldots\ldots + Mp\overset{-n-m}{[p]} + Np\overset{-n-m-1}{[p]} + \text{etc.},$$

$$\begin{array}{ll} \overset{-n+1}{[p]} = \overset{-n}{[p]}(p+n), & \text{d'où} \quad p\overset{-n}{[p]} = \overset{-n+1}{[p]} - n\overset{-n}{[p]}, \\ \overset{-n}{[p]} = \overset{-n-1}{[p]}(p+n+1), & \qquad\quad p\overset{-n-1}{[p]} = \overset{-n}{[p]} - (n+1)\overset{-n-1}{[p]}, \\ \overset{-n-1}{[p]} = \overset{-n-2}{[p]}(p+n+2), & \qquad\quad p\overset{-n-2}{[p]} = \overset{-n-1}{[p]} - (n+2)\overset{-n-2}{[p]}, \\ \text{etc.}, & \qquad\quad \text{etc.}, \end{array}$$

d'où nous conclurons

$$p^{-n+1} = A\overset{-n+1}{[p]} + \left.\begin{matrix} B \\ -nA \end{matrix}\right| \overset{-n}{[p]} + \left.\begin{matrix} C \\ -(n+1)B \end{matrix}\right| \overset{-n-1}{[p]} \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} N \\ -(n+m)M \end{matrix}\right| \overset{-n-m}{[p]} + \text{etc.},$$

résultat qui ne diffère de son analogue, dans le numéro précédent, que par le signe de n; et comme tous deux coïncident lorsque $n=0$, on est en droit d'affirmer que le second doit se déduire du premier,

---

(*) Par la notation de Vandermonde, et en vertu du n° 945, on a

$$\Sigma v_x = const. + \frac{\overset{1}{[p]}v}{1} + \frac{\overset{2}{[p]}\Delta v}{1.2} + \frac{\overset{3}{[p]}\Delta^2 v}{1.2.3} + \text{etc.},$$

d'où il suit

$$\Sigma x^m = const. + \frac{\overset{2}{[p]}\Delta.0^m}{1.2} + \frac{\overset{3}{[p]}\Delta^2.0^m}{1.2.3} \ldots + \frac{\overset{m+1}{[p]}\Delta^m.0^m}{1.2.3\ldots(m+1)}.$$

Si l'on range les termes de cette formule dans un ordre inverse, et qu'on développe les factorielles suivant les puissances de p, on obtiendra des expressions assez simples des relations annoncées à la fin du n° 952, entre les nombres de Bernoulli.

en y changeant simplement le signe de n. On prendra donc

$$A=1,\ B=\frac{n(n+1)}{2},\ C=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right\}, \text{ etc.};$$

et l'on voit que la série ne s'arrête plus comme pour le cas de l'exposant positif.

On peut former successivement les valeurs de p^{-1}, p^{-2}, p^{-3}, etc., en partant de la valeur de p^0, qui est 1, et en faisant en conséquence $n=1$, dans l'expression de p^{-n+1} rapportée plus haut, laquelle, à cause de $p^0=\overset{0}{[p]}$, donne

$$A=1,\quad B-A=0,\quad C-2B=0,\ldots N-(1+m)M=0,$$

d'où on tire

$$p^{-1}=\overset{-1}{[p]}+1\overset{-2}{[p]}+1.2\overset{-3}{[p]}+1.2.3\overset{-4}{[p]}\ldots\ldots+1.2.3\ldots\ldots(m+1)\overset{-m-2}{[p]}+\text{etc.}$$

Supposant ensuite $n=2$, la puissance p^{-n+1} se changera en p^{-1}; en la comparant au développement ci-dessus, il viendra

$$A=1,\quad B-2A=1,\quad C-3B=1.2,\quad \text{etc.},$$

et par conséquent

$$p^{-2}=\overset{-2}{[p]}+3\overset{-3}{[p]}+11\overset{-4}{[p]}+\text{etc.}$$

En continuant ainsi, on trouvera

$$p^{-3}=\overset{-3}{[p]}+6\overset{-4}{[p]}+35\overset{-5}{[p]}+\text{etc. } (*).$$

(*) Les formules de Stirling ne sont pas tout-à-fait les mêmes que celles-ci, parce que n'ayant pas aperçu la loi qui lie $\overset{0}{[p]}$ à $\overset{-1}{[p]}$ (982), il prit pour analogues, dans le système des factorielles, les expressions p et $\frac{1}{p}$, qui ne le sont que dans celui des puissances; et il trouva en conséquence

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p}$$
$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)(p+2)}+\frac{2}{p(p+1)(p+2)(p+3)}+\text{etc.},$$
etc.,

résultats qui s'obtiennent en divisant par p les deux membres des valeurs de p^0, p^{-1}, etc., rapportées ci-dessus.

987. Par suite de leur analogie avec les puissances, les factorielles de la forme $[p+q]^{n}$, ou à *base binome*, s'expriment d'une manière très-élégante, au moyen de $[p]^{n}$, $[p]^{n-1}$, etc. On a d'abord

$$[p+q]^{1}=p+q=[p]^{1}+[q]^{1},$$
$$[p+q]^{2}=(p+q)(p+q-1)=p(p-1)+2pq+q(q-1)$$
$$=[p]^{2}+2[p]^{1}[q]^{1}+[q]^{2},$$

où l'on remarque la même loi que dans les deux premières puissances du binome. Pour s'assurer de la continuation de cette loi, il suffit de la constater dans le passage de $[p+q]^{n}$ à $[p+q]^{n+1}$. Or

$$[p+q]^{n+1}=[p+q]^{n}(p+q-n)=[p+q]^{n}(p-n)+[p+q]^{n}q;$$

posant donc

$$[p+q]^{n}=[p]^{n}+A[p]^{n-1}[q]^{1}+B[p]^{n-2}[q]^{2}+C[p]^{n-3}[q]^{3}+\text{etc.},$$

on formera l'équation

$$[p+q]^{n+1}=\{[p]^{n}+A[p]^{n-1}[q]^{1}+B[p]^{n-2}[q]^{2}+C[p]^{n-3}[q]^{3}+\text{etc.}\}(p-n)$$
$$+\{[p]^{n}+A[p]^{n-1}[q]^{1}+B[p]^{n-2}[q]^{2}+\text{etc.}\}q;$$

mais on voit aisément que

$$[p]^{n}(p-n)=[p]^{n+1},$$
$$[p]^{n-1}(p-n)=[p]^{n-1}\{(p-n+1)-1\}=[p]^{n}-[p]^{n-1},\quad q=[q]^{1},$$
$$[p]^{n-2}(p-n)=[p]^{n-2}\{(p-n+2)-2\}=[p]^{n-1}-2[p]^{n-2},\quad [q]^{1}q=[q]^{2}+[q]^{1},$$
$$[p]^{n-3}(p-n)=[p]^{n-3}\{(p-n+3)-3\}=[p]^{n-2}-3[p]^{n-3},\quad [q]^{2}q=[q]^{3}+2[q]^{2},$$

etc.;

substituant ces valeurs et effaçant les termes qui se détruisent, il vient

$$[p+q]^{n+1}=[p]^{n+1}+\left.\begin{matrix}A\\+1\end{matrix}\right|[p]^{n}[q]^{1}+\left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right|[p]^{n-1}[q]^{2}+\left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right|[p]^{n-2}[q]^{3}+\text{etc.},$$

ce qui prouve que les coefficiens des factorielles changent ici comme

ceux des puissances de p et de q, dans le passage de $(p+q)^n$ à $(p+q)^{n+1}$. L'identité des uns et des autres étant déjà établie pour les deux premiers degrés, on aura par conséquent, pour un degré quelconque,

$$[p+q]^{n}=[p]^{n}+[0]^{-1}[n]^{1}[p]^{n-1}[q]^{1}+[0]^{-2}[n]^{2}[p]^{n-2}[q]^{2}+[0]^{-3}[n]^{3}[p]^{n-3}[q]^{3}+\text{etc.},$$

suivant la notation du n° 983.

988. Les factorielles étant interpolées prennent, comme les puissances, des exposans fractionnaires; mais pour en calculer alors les valeurs, il faut les transformer en d'autres où le nombre fractionnaire n'entre plus comme exposant, ce qui les change, ainsi qu'on va le voir, en produits composés d'un nombre infini de facteurs. Par le n° 982, on a d'abord,

$$[p]^{n}=[p]^{-r}[p+r]^{n+r}=[p]^{-r}[p+r]^{n}[p+r-n]^{r}=\frac{[p]^{-r}[p+r]^{n}}{[p-n]^{-r}},$$

en observant que $[p+r-n]^{r}=\frac{1}{[p-n]^{-r}}$. Il viendra de même

$$[q]^{-n}=\frac{[q]^{-r}[q+r]^{-n}}{[q+n]^{-r}},$$

d'où l'on tirera

$$[p]^{n}[q]^{-n}=[p+r]^{n}[q+r]^{-n}.\frac{[p]^{-r}[q]^{-r}}{[p-n]^{-r}[q+n]^{-r}}.$$

Maintenant il est visible, soit par le développement, soit par ce qui a été dit n° 983, que la limite vers laquelle tend l'expression....... $[p+r]^{n}[q+r]^{-n}$, à mesure que le nombre indéterminé r augmente par rapport aux nombres p, q et n, est $[r]^{n}[r]^{-n}$, et que cette dernière tend à son tour vers $r^n r^{-n}=1$. En supposant donc r infini, on aura

$$[p]^{n}[q]^{-n}=\frac{[p]^{-r}}{[p-n]^{-r}}.\frac{[q]^{-r}}{[q+n]^{-r}}=\frac{(p-n+1)(p-n+2)\text{etc.}}{(p+1)(p+2)\text{etc.}}.\frac{(q+n+1)(q+n+2)\text{etc.}}{(q+1)(q+2)\text{etc.}},$$

valeur dans laquelle le nombre n n'entre plus comme exposant.

Prenons pour exemple la série

$$\frac{1}{2},\quad\frac{1.3}{2.4},\quad\frac{1.3.5}{2.4.6},\quad\frac{1.3.5.7\ldots(2x-1)}{2.4.6.8\ldots2x},$$

dont le terme général est

$$\frac{[2x-1,2]^{x}}{[2x,2]^{x}} = \frac{2^{x}[x-\frac{1}{2}]^{x}}{2^{x}[x]^{x}} = [x-\tfrac{1}{2}]^{x}\,[0]^{-x};$$

dans ce cas on a $p = x-\frac{1}{2}$, $q = 0$, $n = x$, et il vient

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}\,[0]^{-x} = \frac{[x-\frac{1}{2}]^{-r}\,[0]^{-r}}{[-\frac{1}{2}]^{-r}\,[x]^{-r}}.$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{2}$, on trouvera, en développant les factorielles affectées de l'exposant infini r,

$$[0]^{\frac{1}{2}}\,[0]^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{2})\text{ etc.}}{1.2.3.\text{etc.}} \cdot \frac{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)\text{ etc.}}{1.2.3.\text{etc.}}$$
$$= \frac{1.3.5.\text{etc.}}{2.4.6.\text{etc.}} \cdot \frac{3.5.7.\text{etc.}}{2.4.6.\text{etc.}} = \frac{1.3.3.5.5.7.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.\text{etc.}}$$

989. En changeant, dans l'équation

$$[p+q]^{n} = [p]^{n} + [0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p]^{n-1}\,[q]^{1} + [0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p]^{n-2}\,[q]^{2}$$
$$+ [0]^{-3}\,[n]^{3}\,[p]^{n-3}\,[q]^{3} + [0]^{-4}\,[n]^{4}\,[p]^{n-4}\,[q]^{4} + \text{etc.},$$

à laquelle nous sommes parvenus dans le n° 987, q en m, p en $p+n$; et multipliant ses deux membres par $[p]^{-n}$, il viendra

$$\left.\begin{aligned}[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n} = [p+n]^{n}\,[p]^{-n} &+ [m]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p+n]^{n-1}\,[p]^{-n}\\ &+ [m]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p+n]^{n-2}\,[p]^{-n}\\ &+ [m]^{3}\,[0]^{-3}\,[n]^{3}\,[p+n]^{n-3}\,[p]^{-n}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\};$$

or, il est visible que

$$[p+n]^{n}\,[p]^{-n} = 1,\quad [p+n]^{n-1}\,[p]^{-n} = [p]^{-1},\quad [p+n]^{n-2}\,[p]^{-n} = [p]^{-2},\ldots.$$
$$[p+n]^{n-n}\,[p]^{-n} = [p]^{-n}:$$

on aura donc

$$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n} = 1 + [m]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p]^{-1} + [m]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p]^{-2}$$
$$+ [m]^{3}\,[0]^{-3}\,[n]^{3}\,[p]^{-3} + [m]^{4}\,[0]^{-4}\,[n]^{4}\,[p]^{-4} + \text{etc.};$$

et comme le second membre de cette équation demeure le même lors-

qu'on y échange les quantités m et n entre elles, il s'ensuit que

$$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n}=[p+n+m]^{m}\,[p]^{-m}.$$

Si l'on remplace p par q, et qu'on écrive ensuite p à la place de $q+m+n$, et $p-q-n$ à celle de m, on aura l'expression

$$[p]^{n}\,[q]^{-n}=1+[p-q-n]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[q]^{-1}+[p-q-n]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[q]^{-2}$$
$$+[p-q-n]^{3}\,[0]^{-3}\,[n]^{3}\,[q]^{-3}+[p-q-n]^{4}\,[0]^{-4}\,[n]^{4}\,[q]^{-4}+\text{etc.},$$

dans laquelle la quantité n n'entre plus comme exposant, et qui peut par conséquent servir à l'interpolation.

En l'appliquant à l'exemple du numéro précédent, elle donnera

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}\,[0]^{-x}=1+[-\tfrac{1}{2}]^{1}\,[0]^{-1}\,[x]^{1}\,[0]^{-1}+[-\tfrac{1}{2}]^{2}\,[0]^{-2}\,[x]^{2}\,[0]^{-2}$$
$$+[-\tfrac{1}{2}]^{3}\,[0]^{-3}\,[x]^{3}\,[0]^{-3}+[-\tfrac{1}{2}]^{4}\,[0]^{-4}\,[x]^{4}\,[0]^{-4}+\text{etc.},$$

résultat qui revient à

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}\,[0]^{-x}=1-\frac{1}{2}\,\frac{x}{1.1}+\frac{1.3}{2.2}\,\frac{x(x-1)}{1.1.2.2}-\frac{1.3.5}{2.2.2}\,\frac{x(x-1)(x-2)}{1.1.2.2.3.3}+\text{etc.}$$

Une des interpolations les plus remarquables de ce genre, est celle de la suite

$$[\tfrac{1}{2}]^{1}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-1}=\frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2}+1)}=1,$$
$$[\tfrac{1}{2}]^{2}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)}=-\frac{1}{3},$$
$$[\tfrac{1}{2}]^{3}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)(-\frac{1}{2}+3)}=\frac{1}{5},$$
$$[\tfrac{1}{2}]^{4}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-4}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)(-\frac{1}{2}+3)(-\frac{1}{2}+4)}=-\frac{1}{7},$$
etc. ;

d'où il faut d'abord conclure $[\tfrac{1}{2}]^{n}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-n}=\pm\frac{1}{2n-1}$, suivant que n est impair ou pair.

Avec un peu d'attention, on reconnaît que l'expression $\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\pi}{2n-1}$ donne précisément les mêmes valeurs lorsque l'indice n est entier, d'où il résulte que les deux expressions $[\tfrac{1}{2}]^{n}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-n}$ et $\frac{\sin\frac{2n-1}{2}\pi}{2n-1}$, ont une infinité de valeurs communes. En interpolant donc la première par la

seconde, on en déduira, lorsque $n = \frac{1}{2}$,

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin 0 \times \frac{\pi}{2}}{0};$$

mais la vraie valeur du second membre de cette équation étant $\frac{1}{2}\pi$, il viendra

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

résultat dont le premier membre étant développé, donne l'expression

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots},$$

due à Wallis, et qui sera vérifiée de plusieurs manières, dans la suite, au moyen des intégrales définies auxquelles les factorielles peuvent aussi se rapporter.

Si dans l'équation $[p]^{n} = [p]^{m}\,[p-m]^{n-m}$ (982), on fait $p = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$, on aura

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = [\tfrac{1}{2}]^{1}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad [-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = 2[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$2\{[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\}^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ce qui donne} \quad \sqrt{\pi} = 2[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}},$$

expression analogue à $\sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$. Il est remarquable que la première soit le côté du quarré équivalent au cercle dont le rayon $= 1$, et la seconde, celle de la diagonale du quarré dont le côté $= 1$.

Nous apprenons encore, par ce qui précède, que le terme correspondant à l'indice $\frac{1}{2}$, dans la série

$$1, \quad -\tfrac{1}{3}, \quad +\tfrac{1}{5}, \quad -\tfrac{1}{7}, \quad +\text{etc.},$$

est $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\,[-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$.

Si l'on fait $n = \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, on trouvera

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{3}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{3}} = [\tfrac{1}{2}]^{\frac{2}{3}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{2}{3}} = \frac{5.7.11.13.17.19.23.25\ldots}{3.9.9.15.15.21.21.27\ldots} = \frac{3}{2},$$

puisque $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$.

Prenant encore $n = \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$, on parviendrait à

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{4}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{4}} = [\tfrac{1}{2}]^{\frac{3}{4}}\,[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{3}{4}} = \frac{3.5.7.9.11.13\ldots}{2.6.6.10.10.14\ldots} = \sqrt{2},$$

à cause de $\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

On peut obtenir dans cet algorithme un nombre infini de résultats semblables à ceux que nous venons de rapporter, et parmi lesquels il s'en trouvera qui seront transcendans, d'autres qui seront seulement irrationnels, et d'autres enfin qui seront rationnels, ce qui établit une différence essentielle entre les puissances et les factorielles, puisque par les unes on n'a pu exprimer en termes finis que des quantités rationnelles ou irrationnelles, et que les autres s'appliquent aussi à certaines trauscendantes.

990. La sommation des suites, par le moyen de leur terme général, est une des applications les plus importantes du calcul inverse aux différences, et la plus immédiate; car pour une suite quelconque, si l'on fait (Application du calcul des différences à la sommation des suites.)

$$u + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = Su_n,$$

on aura, par le nº 943,

$$\Sigma u_n = u + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} = Su_n - u_n,$$

et par conséquent

$$Su_n = \Sigma u_n + u_n = \Sigma u_{n+1}.$$

On voit, par ces expressions, que la fonction Su_n, nommée le *terme sommatoire* de la suite proposée, diffère de l'intégrale du terme général, seulement parce qu'elle comprend ce terme, et qu'elle est identique avec l'intégrale du terme suivant.

Désormais, pour abréger, nous supprimerons l'indice n, et nous aurons seulement

$$Su = \Sigma u + u + const.,$$

la constante arbitraire étant déterminée par le terme d'où l'on fait partir la somme de la série. Au moyen de ces relations, chacune des fonctions intégrées dans ce qui précède nous donnera la somme de la suite dont elle représente le terme général.

991. Ayant

$$\Sigma[\overset{n}{p}] = \frac{[\overset{n+1}{p}]}{n+1} + const., \quad \Sigma[\overset{-n}{p}] = \frac{[\overset{-n+1}{p}]}{-n+1} + const. \ (983),$$

nous en déduirons

$$S[p]^{n} = \frac{[p]^{n+1}}{n+1} + [p]^{n} + const. = \frac{[p]^{n+1} + (n+1)[p]^{n}}{n+1} + const.;$$

$$S[p]^{-n} = \frac{[p]^{-n+1}}{-n+1} + [p]^{-n} + const. = \frac{[p]^{-(n-1)} - (n-1)[p]^{-n}}{-n+1} + const.;$$

mais

$$[p]^{n+1} + (n+1)[p]^{n} = (p-n)[p]^{n} + (n+1)[p]^{n} = (p+1)[p]^{n} = [p+1]^{n+1};$$

donc

$$S[p]^{n} = \frac{[p+1]^{n+1}}{n+1} + const.;$$

de même

$$[p]^{-(n-1)} - (n-1)[p]^{-n} = (p+n)[p]^{-n} - (n-1)[p]^{-n} = (p+1)[p]^{-n} = [p+1]^{-(n-1)};$$

donc

$$S[p]^{-n} = \frac{[p+1]^{-n+1}}{-n+1} + const.,$$

résultat qui se tire du précédent, en changeant seulement le signe de n.

L'un et l'autre se concluent immédiatement de $\Sigma[p]^{n}$, en y écrivant $p+1$, au lieu de p; puisque $S[p]^{n} = \Sigma[p+1]^{n}$ (990).

Les expressions que nous venons d'obtenir, donnent la somme des suites des nombres figurés, ou dont les termes ont, avec un numérateur constant, ces nombres pour dénominateurs. On a, par ces expressions,

$$1+1+1+1\ldots\ldots+[p]^{0} = \frac{[p]^{1}}{1} = \frac{p}{1};$$

$$1+2+3+4\ldots\ldots+\frac{[p]}{1} = \frac{[p+1]^{2}}{2} = \frac{p(p+1)}{1.2},$$

$$1+3+6+10\ldots\ldots+\frac{[p+1]^{2}}{1.2} = \frac{[p+2]^{3}}{1.2.3} = \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3},$$

$$1+4+10+20\ldots\ldots+\frac{[p+2]^{3}}{1.2.3} = \frac{[p+3]^{4}}{1.2.3.4} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4},$$

etc.,

valeurs qui s'évanouissent en même temps que p, et qui toutes se présentent dans cet état, excepté la première, pour laquelle il faut avoir égard à la constante arbitraire.

On a de même la somme des séries inverses des précédentes, en exceptant néanmoins

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+1\,[p-1]^{-1},$$

pour laquelle $S[p-1]^{-1}$ devient $\frac{[p]^0}{0}$; car on trouve ensuite

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}\ldots\ldots+\quad 1.2[p-1]^{-2}=-\quad 2[p]^{-1}+\textit{const.},$$
$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}\ldots\ldots+\ 1.2.3[p-1]^{-3}=-\quad 3[p]^{-2}+\textit{const.},$$
$$1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}\ldots\ldots+1.2.3.4[p-1]^{-4}=-2.4[p]^{-3}+\textit{const.},$$
etc.

La constante est ici nécessaire pour compléter les résultats obtenus qui doivent donner l'unité, lorsqu'on y fait $p=1$; mais comme dans cette hypothèse

$$[p]^{-1}=\frac{1}{p+1},\qquad [p]^{-2}=\frac{1}{(p+1)(p+2)},\quad \text{etc.},$$

se réduisent respectivement à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, etc., on a pour le premier,.... *const.* $=\frac{2}{1}$; pour le deuxième, *const.* $=\frac{3}{2}$; pour le troisième,.... *const.* $=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, etc.

Il convient de remarquer que la valeur de chaque constante est la limite de la série à laquelle elle se rapporte; car les factorielles à exposant négatif $[p]^{-1}$, $[p]^{-2}$, etc., s'évanouissent lorsque p est supposé infini.

Cela posé, on aura

$$\frac{2}{1}-2[p]^{-1},\quad \frac{3}{2}-3[p]^{-2},\quad \frac{4}{3}-2.4[p]^{-3},\quad \text{etc.},$$

ou

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{p+1},\quad \frac{3}{2}-\frac{3}{(p+1)(p+2)},\quad \frac{4}{3}-\frac{2.4}{(p+1)(p+2)(p+3)},\ \text{etc.},$$

pour les sommes des séries dont les termes généraux sont

$$1.2[p-1]^{-2},\qquad 1.2.3[p-1]^{-3},\qquad 1.2.3.4[p-1]^{-4},\qquad \text{etc.},$$

ou

$$\frac{1.2}{p(p+1)},\quad \frac{1.2.3}{p(p+1)(p+2)},\quad \frac{1.2.3.4}{p(p+1)(p+2)(p+3)},\quad \text{etc.}$$

Il est bon d'observer que tout ce qui précède reposant entièrement

sur le n° 949, peut être facilement ramené, s'il était besoin, à une forme élémentaire.

Toutes les séries dont le terme général pourra se décomposer en factorielles soit à exposant positif, soit à exposant négatif, c'est-à-dire directes ou inverses, seront sommées facilement par ce qui précède.

992. La fraction $\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$, que nous avons intégrée dans le n° 954, produit, dans le cas où $h=1$, la série

$$\frac{5}{6},\quad \frac{8}{24},\quad \frac{11}{60},\quad \frac{14}{120},\quad \text{etc.};$$

on en obtient la somme, soit en mettant $x+1$, au lieu de x, dans l'expression $-\frac{3x+1}{x(x+1)}+const.$ que donne l'intégrale, par la supposition de $h=1$; soit en ajoutant à cette intégrale le terme général : on a, par l'un et l'autre procédés,

$$S\frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}=-\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}+const.$$

En égalant au premier terme $\frac{5}{6}$, ce que devient la somme quand $x=1$, on a

$$const.=2,\quad \text{d'où}\quad S\frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}=2-\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}.$$

On se conduira de même dans tous les cas où l'on aura intégré le terme général de la série proposée ; mais, sans nous arrêter davantage à des exemples particuliers, parcourons successivement les divers résultats que donnent les expressions générales de Σu.

993. Si dans la formule $Su=\Sigma u+u+const.$, on met à la place de Σu les diverses expressions que nous avons obtenues jusqu'ici, on en déduira les principales formules qu'Euler a données pour la sommation des suites, dans ses *Institutiones Calculi differentialis*.

1°. L'expression de Σu du n° 947, en y faisant $h=1$, et en employant, pour abréger, la notation du n° 982, donne

$$Su=(x+1)u+[x+1]^{2}[0]^{-2}\Delta u+[x+2]^{3}[0]^{-3}\Delta^2 u+[x+3]^{4}[0]^{-4}\Delta^3 u$$
$$+[x+4]^{5}[0]^{-5}\Delta^4 u+\text{etc.}+const.$$

2°. Il résulte de l'expression de Σu, rapportée dans le n° 975,

$$Su=\int u\,dx+\tfrac{1}{2}u+B_1[1]^{-1}\frac{du}{dx}+B_3[1]^{-3}\frac{d^3u}{dx^3}+B_5[1]^{-5}\frac{d^5u}{dx^5}+\text{etc.}+const.$$

Lorsqu'on prend $u = x^m$, il vient par la dernière

$$Sx^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}x^m + B_1[m]^{1}[1]^{-1}x^{m-1} + B_3[m]^{3}[1]^{-3}x^{m-3} + B_5[m]^{5}[1]^{-5}x^{m-5} + \text{etc.} + \textit{const.};$$

en remettant, au lieu des lettres B_1, B_3, B_5, etc., les nombres qu'elles représentent, on a cette valeur :

$$\begin{aligned}
Sx^m = {} & \frac{x^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}x^m + \tfrac{1}{6}[m]^{1}[1]^{-1}x^{m-1} - \tfrac{1}{30}[m]^{3}[1]^{-3}x^{m-3} + \tfrac{1}{42}[m]^{5}[1]^{-5}x^{m-5} \\
& - \tfrac{1}{30}[m]^{7}[1]^{-7}x^{m-7} + \tfrac{5}{66}[m]^{9}[1]^{-9}x^{m-9} - \tfrac{691}{2730}[m]^{11}[1]^{-11}x^{m-11} \\
& + \tfrac{7}{6}[m]^{13}[1]^{-13}x^{m-13} - \tfrac{3617}{510}[m]^{15}[1]^{-15}x^{m-15} + \tfrac{43867}{798}[m]^{17}[1]^{-17}x^{m-17} \\
& - \tfrac{174611}{330}[m]^{19}[1]^{-19}x^{m-19} + \tfrac{854513}{138}[m]^{21}[1]^{-21}x^{m-21} - \tfrac{236364091}{2730}[m]^{23}[1]^{-23}x^{m-23} \\
& + \tfrac{8553103}{6}[m]^{25}[1]^{-25}x^{m-25} - \tfrac{23749461029}{870}[m]^{27}[1]^{-27}x^{m-27} \\
& + \tfrac{8615841276005}{14322}[m]^{29}[1]^{-29}x^{m-29} - \text{etc.} + \textit{const.}
\end{aligned}$$

La constante arbitraire satisfera aux conditions relatives au terme d'où l'on commence à prendre la somme. Si l'on veut, par exemple, qu'elle soit nulle en même temps que x, la constante doit être nulle pour tous les cas où m est pair ; mais il faudra la prendre égale au dernier terme et de signe contraire, pour ceux où m est impair.

3°. L'expression du n° 976 donne

$$Su = (Sn^{0} + 1)u - Sn.\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + Sn^{2}.\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - Sn^{3}.\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

4°. Enfin les expressions des nos 959, 969 conduisent à

$$SPQ = Q(\Sigma P + P) - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \text{etc.};$$

$$\left.\begin{aligned}
SPQ = Q(\Sigma P + P) & - \frac{dQ}{dx}h\Sigma^2 P_1 + \frac{d^2Q}{dx^2}h^2(\Sigma^3 P_2 - \alpha\Sigma^2 P_1) \\
& - \frac{d^3Q}{dx^3}h^3(\Sigma^4 P_3 - \alpha'\Sigma^3 P_2 + \beta\Sigma^2 P_1) + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}$$

Par les trois premières formules on obtiendra la somme des suites dont le terme général est une fonction rationnelle et entière, et par les deux dernières celles des suites dont le terme général est composé de deux facteurs, dont l'un est une fonction rationnelle et entière de x, et l'autre une fonction susceptible d'un nombre indéfini d'intégrations.

994. L'un des cas les plus simples de cette dernière classe de séries

est compris dans le terme général $a^x x^m$, appartenant à la suite

$$a.1^m,\quad a^2.2^m,\quad a^3.3^m,\ldots\ldots a^x.x^m,$$

résultante de la multiplication, terme à terme, d'une progression par quotiens (ou progression géométrique), par la suite des puissances m des nombres naturels. L'expression de $\Sigma a^x y$ du nº 969, qui donne

$$Sa^x y = \frac{a^{x+h}y}{a^h-1} - a^x \frac{dy}{dx}\frac{a^h h}{(a^h-1)^2} + a^x \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(Aa^h + A_1 a^{2h})h^2}{(a^h-1)^3}$$
$$- a^x \frac{d^3y}{dx^3}\frac{(A'a^h + A'_1 a^{2h} + A'_2 a^{3h})h^3}{(a^h-1)^4} + \text{etc.} + const.,$$

devient pour ce cas,

$$Sa^x x^m = \frac{a^{x+h}}{a^h-1}\left\{\begin{array}{l} x^m - mx^{m-1}\dfrac{h}{a^h-1} + m(m-1)x^{m-2}\dfrac{(A+A_1a^h)h^2}{(a^h-1)^2} \\ -m(m-1)(m-2)x^{m-3}\dfrac{(A'+A'_1a^h+A'_2a^{2h})h^3}{(a^h-1)^3} + \text{etc.}\end{array}\right\} + const.$$

Si l'on veut prendre la valeur de $Sa^x x^m$, à partir de $x=0$, il faudra déterminer la constante arbitraire, de manière à rendre nul, dans la même hypothèse, le second membre de cette équation; on trouvera ainsi

$$Sa^x x^0 = \frac{a^{x+h}}{a^h-1} - \frac{a^h}{a^h-1},$$
$$Sa^x x = \frac{a^{x+h}}{a^h-1}\left\{x - \frac{h}{a^h-1}\right\} + \frac{a^h h}{(a^h-1)^2},$$
$$Sa^x x^2 = \frac{a^{x+h}}{a^h-1}\left\{x^2 - 2x\frac{h}{a^h-1} + \frac{(a^h+1)h^2}{(a^h-1)^2}\right\} - \frac{a^h(a^h+1)h^2}{(a^h-1)^3},$$

etc.

On voit, par ces résultats particuliers, que la constante est égale à ce que devient, lorsque $x=0$, le dernier terme de la partie variable de l'expression, et doit être affectée d'un signe contraire.

L'expression générale de $Sa^x y$ s'arrêtant toutes les fois que la fonction y sera rationnelle et entière, on pourra, par son moyen, obtenir les sommes des séries qui résultent de la multiplication terme à terme, d'une progression par quotiens et d'une série dont le terme général sera rationnel et entier. Les suites

$$\frac{1}{p},\quad \frac{2}{p^2},\quad \frac{3}{p^3},\ldots\ldots \frac{x}{1.p^x},$$
$$\frac{1}{p},\quad \frac{3}{p^2},\quad \frac{6}{p^3},\ldots\ldots \frac{x(x+1)}{1.2.p^x},$$
$$\frac{1}{p},\quad \frac{4}{p^2},\quad \frac{10}{p^3},\ldots\ldots \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3.p^x},$$

etc.,

que l'on rencontre fréquemment, sont dans ce cas. Leurs sommes se déduisent de l'expression de $Sa^x y$, en y faisant d'abord $h=1$, $a=\frac{1}{p}$, puis successivement

$$y=\frac{x}{1}, \quad y=\frac{x(x+1)}{1.2}, \quad y=\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}, \quad \text{etc.}$$

995. La formule $SPQ=Q(P+\Sigma P)-\Delta Q\Sigma^2 P_1+$ etc. semble encore plus appropriée aux séries ci-dessus, à cause de la simplicité que présente l'expression des différences des fonctions

$$x(x+1), \text{ ou } [x+1]^{2}, \quad x(x+1)(x+2), \text{ ou } [x+2]^{3}, \quad \text{etc.}$$

En faisant $P=a^x$ et $Q=[0]^{-n}[x+n-1]^{n}$, on obtient, pour le cas général,

$$S[0]^{-n}a^x[x+n-1]^{n}=[0]^{-n}\Big\{[x+n-1]^{n}\Big(a^x+\frac{a^x}{a-1}\Big)-[n]^{1}[x+n-1]^{n-1}\frac{a^{x+1}}{(a-1)^2}$$
$$+[n]^{2}[x+n-1]^{n-2}\frac{a^{x+2}}{(a-1)^3}\ldots\pm[n]^{n}\frac{a^{x+n}}{(a-1)^{n+1}}\Big\}+\mathit{const.}$$

Ce résultat est susceptible de plusieurs réductions, et notamment de celles du facteur commun $[0]^{-n}$, avec les facteurs $[n]^{1}$, $[n]^{2}$, etc.; en les effectuant toutes il vient

$$S[0]^{-n}a^x[x+n-1]^{n}=\frac{a^x}{a-1}\Big\{a[0]^{-n}[x+n-1]^{n}-[0]^{-n+1}[x+n-1]^{n-1}\frac{a}{a-1}$$
$$+[0]^{-n+2}[x+n-1]^{n-2}\frac{a^2}{(a-1)^2}\ldots\ldots\pm\frac{a^n}{(a-1)^n}\Big\}+\mathit{const.}$$

996. Si l'on fait $P=[x]^{-n}$, et que Q représente toujours une fonction rationnelle et entière, on aura, pour tous les cas où n sera un nombre entier, positif et différent de l'unité,

$$S[x]^{-n}Q=Q\Big([x]^{-n}+\frac{[x]^{-n+1}}{-n+1}\Big)-\Delta Q\frac{[x+1]^{-n+2}}{(-n+1)(-n+2)}+\Delta^2 Q\frac{[x+2]^{-n+3}}{(-n+1)(-n+2)(-n+3)}$$
$$-\Delta^3 Q\frac{[x+3]^{-n+4}}{(-n+1)(-n+2)(-n+3)(-n+4)}+\text{etc.}+\mathit{const.},$$

résultat qui peut s'écrire ainsi :

$$S[\overset{-n}{x}]Q = -\frac{Q(x+1)}{x+n}[n-\overset{-1}{2}][\overset{-n+1}{x}] - \Delta Q[n-\overset{-2}{3}][x+\overset{-n+2}{1}] - \Delta^2 Q[n-\overset{-3}{4}][x+\overset{-n+3}{2}]$$
$$-\Delta^3 Q[n-\overset{-4}{5}][x+\overset{-n+4}{3}] - \text{etc.}\ldots + const.,$$

en observant que $[\overset{-n}{x}] = \frac{[\overset{-n+1}{x}]}{x+n}$, et en changeant les produits......... $(-n+1)(-n+2)$, etc. en factorielles à exposant négatif, conformément aux lois établies dans le n° 982.

Il est bon de remarquer que l'on peut rapporter à cette formule toutes les fonctions telles que

$$\frac{Q}{(x+1)(x+2)(x+5)(x+11)},$$

dans le dénominateur desquels les facteurs ne sont pas consécutifs ; et pour cela il suffit de remplir les lacunes, en écrivant, tant au numérateur qu'au dénominateur, tous les facteurs qui manquent dans ce dernier. Dans l'exemple cité, on arrive à

$$\frac{Q(x+3)(x+4)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)\ldots(x+11)} = Q[x+\overset{2}{4}]\,[x+\overset{5}{10}]\,[\overset{-11}{x}].$$

La fraction $\frac{1}{4x^2+4x-3}$ appartient au cas qui nous occupe ; car en décomposant son dénominateur en facteurs simples, elle revient à $\frac{1}{(2x-1)(2x+3)}$, et faisant $2x-1 = 2x'+2$, on a

$$\Delta x' = \Delta x = 1, \quad 2x+3 = 2x'+6,$$
$$\frac{1}{4x^2+4x-3} = \frac{1}{(2x'+2)(2x'+6)} = \frac{1}{4(x'+1)(x'+3)} = \frac{x'+2}{4(x'+1)(x'+2)(x'+3)}$$
$$= \tfrac{1}{4}(x'+2)[\overset{-3}{x'}].$$

Prenant donc $n=3$, on obtiendra

$$S\frac{1}{4x^2+4x-3} = -\frac{(x'+2)(x'+1)}{4(x'+3)}[\overset{-1}{1}]\,[\overset{-2}{x'}] - \tfrac{1}{4}[\overset{-2}{0}]\,[x'+\overset{-1}{1}] + const.;$$

puisque $\Delta^2 Q = 0$.

Si l'on repasse à la notation ordinaire, on trouvera

$$S\,\frac{1}{4x^2+4x-3} = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{x'+3} + \frac{1}{x'+2}\right\} + const.$$
$$= -\frac{2x'+5}{8(x'+2)(x'+3)} + const. = -\frac{x+1}{(2x+1)(2x+3)} + const.$$

997. Lorsque a est négatif, et qu'on prend $h=1$, la série, dont le terme général est $a^x y$, a ses termes alternativement positifs et négatifs, si d'ailleurs la fonction y conserve toujours le même signe; Euler profite de cette remarque pour obtenir une formule propre à donner la somme des séries quelconques dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Il suppose $a=-1$; la série proposée de

$$a^x y + a^{x+1} y_1 + a^{x+2} y_2 + \text{etc.},$$

qu'elle était, devient

$$(-1)^x \{y - y_1 + y_2 - \text{etc.}\},$$

et l'équation

$$\left.\begin{array}{l} Sa^x y = \frac{a^x}{a^h-1}\left\{a^h y - \frac{a^h h}{a^h-1}\frac{dy}{dx} + \frac{Aa^h + A_1 a^{2h}}{(a^h-1)^2} h^2 \frac{d^2y}{dx^2}\right. \\ \qquad\qquad - \frac{A'a^h + A'_1 a^{2h} + A'_2 a^{3h}}{(a^h-1)^3} h^3 \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \end{array}\right\} + \textit{const.};$$

donne alors, en prenant $h=1$,

$$\left.\begin{array}{l} S(-1)^x y = \frac{(-1)^x}{-2}\left\{-y - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{A - A_1}{2^2}\frac{d^2y}{dx^2}\right. \\ \qquad\qquad + \frac{A' - A'_1 + A'_2}{2^3}\frac{d^3y}{dx^3} - \text{etc.} \end{array}\right\} + \textit{const.}$$

Les termes affectés des coefficiens différentiels d'un ordre pair disparaissent dans cette formule comme dans celle du n° 975; car en faisant $a=-1$ dans le terme général de l'expression de $\Sigma a^x y$, trouvée n° 977, le facteur indépendant de x se change en

$$\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}\left\{\begin{array}{l} 1 - \{2^{n-1} - n\} + \left\{3^{n-1} - 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{1.2}\right\} \\ - \left\{4^{n-1} - 3^{n-1}n + 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\} + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

et nous avons prouvé, dans le n° 974, que le second facteur de cette dernière quantité s'évanouit toutes les fois que n est impair.

En la comparant avec la valeur de A_n, obtenue dans le numéro 973, on l'exprimera par $(2^n - 1)A_n$; changeant ensuite n en $2p$, mettant à la place de A_{2p}, sa valeur $\frac{B_{2p-1}}{2.3.4\ldots.2p}$, rapportée aux nombres de Bernoulli (975), on aura $\frac{(2^{2p}-1)B_{2p-1}}{2.3.4\ldots.2p}$, et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} S(-1)^x y = (-1)^x\left\{\frac{y}{2} + \frac{(2^2-1)B_1}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{(2^4-1)B_3}{2.3.4}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{(2^6-1)B_5}{2.3.4.5.6}\frac{d^5y}{dx^5}\right. \\ \qquad\qquad + \frac{(2^8-1)B_7}{2.3.4.5.6.7.8}\frac{d^7y}{dx^7} + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

résultat auquel Euler n'est parvenu que par induction et d'une manière assez pénible.

998. Appliquons cette formule à la fonction $(-1)^x x^m$, de laquelle il résulte la série

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m \ldots \mp x^m,$$

en commençant à $x=0$; nous trouverons

$$S(-1)^x x^m = \mp \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x^m + \frac{(2^2-1)B_1}{1.2} m x^{m-1} + \frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4} m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\ + \frac{(2^6-1)B_5}{1.2\ldots.6} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5} + \text{etc.} \end{array} \right\} + const.$$

Si l'on fait successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc., il viendra

$$0 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots \mp x^0 = \mp \tfrac{1}{2}x^0 + C_0,$$
$$0 - 1 + 2 - 3 + 4 \ldots \mp x = \mp\{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\} + C_1,$$
$$0^2 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 \ldots \mp x^2 = \mp\{\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}.2x\} + C_2,$$
$$0^3 - 1^3 + 2^3 - 3^3 + 4^3 \ldots \mp x^3 = \mp\{\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}.3x^2 - \tfrac{1}{48}.6\} + C_3,$$

etc.

Les constantes arbitraires C_0, C_1, C_2, C_3, etc., doivent être déterminées de manière que ces expressions s'évanouissent lorsque $x=0$; et il faut observer que le signe de la première partie du second membre est le même que celui du dernier terme de la série du premier membre; avec cette attention, on obtiendra

$$C_0 = -\tfrac{1}{2}, \quad C_1 = -\tfrac{1}{4}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = +\tfrac{1}{8}, \quad \text{etc.},$$

et l'on verra qu'excepté quand $m=0$, la constante est nulle toutes les fois que l'exposant m est pair.

999. Soit une série quelconque

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots\ldots + A_x,$$

dont le terme général $A_x = u$; si l'on pouvait obtenir séparément la somme des termes affectés d'un indice impair, on arriverait facilement à celle de la série

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_6 - \text{etc.},$$

puisqu'en nommant S la somme de la série complète, et S' celle de la

série des termes dont l'indice est impair, on aurait

$$S-2S'=\begin{cases}A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+\text{etc.}\\ \quad -2A_1 \quad -2A_3 \quad -2A_5 \quad -\text{etc.}\end{cases}$$
$$=A_0-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+A_6-\text{etc.}$$

Si l'on désignait par S'' la somme des termes pris de trois en trois dans les suites proposées, on aurait

$$S-2S''=\begin{cases}A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+\text{etc.}\\ \quad -2A_2 \quad -2A_5 \quad -2A_8-\text{etc.}\end{cases}$$
$$=A_0+A_1-A_2+A_3+A_4-A_5+A_6+A_7-A_8+\text{etc.}$$

On voit assez, par ces combinaisons, le parti que l'on pourrait tirer, pour la sommation des suites, de l'expression des termes pris à des intervalles égaux dans une série quelconque; or, c'est ce que donnent les formules

$$\Sigma'^n u=\left\{e^{h'\frac{d}{dx}}-1\right\}^{-n}u,\qquad \Sigma'^n u=\left\{(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right\}^{-n}u\ (968),$$

en y faisant $n=1$, $h=1$, et $h'=2$, $=3$, $=4$, etc., puis déterminant la constante arbitraire de manière à faire commencer la série partielle à tel terme que l'on voudra de la série complète.

La première formule donne $\Sigma'u=\left(e^{h'\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}u$, et son développement se déduisant de celui de Σu (975), en y changeant seulement h en h', il viendra

$$\Sigma'u=\frac{1}{h'}\int u\mathrm{d}x-\frac{1}{2}u+B_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h'}{2}+B_3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h'^3}{2.3.4}+\text{etc.};$$

ajoutant ensuite le terme général u, pour passer à la somme $S'u$, on aura

$$S'u=\frac{1}{h'}\int u\mathrm{d}x+\frac{1}{2}u+B_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h'}{2}+B_3\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h'^3}{2.3.4}+\text{etc.}+C,$$

C étant la constante arbitraire, et on tirera de là

$$Su-2S'u=\left(1-\frac{2}{h'}\right)\int u\mathrm{d}x-\frac{1}{2}u+\frac{(1-2h')B_1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$+\frac{(1-2h'^3)B_3}{2.3.4}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}+\textit{const.}$$

Quand $h'=2$, le terme $\int u\mathrm{d}x$ disparaît; et on a, comme dans le n° 997,

$$Su-2S'u=-\left\{\frac{1}{2}u+\frac{(2^2-1)B_1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{(2^4-1)B_3}{2.3.4}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}\right\}+\textit{const.},$$

en observant de donner à u le signe du terme où l'on s'arrête.

1000. Parmi les cas où les diverses expressions de Su, rapportées dans le n° 993, ne se terminent point, ceux dans lesquels on obtient une série convergente méritent une attention particulière, car alors on arrive au moins à une valeur approchée de la somme des suites proposées.

La formule

$$Su = \int u dx + \frac{1}{2}u + \frac{B_1}{2}\frac{du}{dx} + \frac{B_3}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.} + const.$$

étant appliquée à la suite

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{x},$$

donne

$$S\frac{1}{x} = 1\,x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_3}{4x^4} - \frac{B_5}{6x^6} - \text{etc.} + const.$$

Cette dernière est d'autant plus convergente, que la valeur de x devient plus grande; mais avant d'en faire usage, il convient de déterminer la constante arbitraire.

On ne peut supposer $x=0$; et si l'on fait $x=1$, ce qui donne $S\frac{1}{x}=1$, on obtient l'équation

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} - \frac{B_3}{4} - \frac{B_5}{6} - \text{etc.} + const.,$$

de laquelle on tire

$$const. = \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2} + \frac{B_3}{4} + \frac{B_5}{6} + \text{etc.},$$

série qui n'est convergente que dans ses premiers termes; car les nombres de Bernoulli croissent très-rapidement, à partir de B_{13} (993). Néanmoins, comme il faut les prendre alternativement avec le signe + et avec le signe —, il s'ensuit que la série ci-dessus, selon que le terme auquel on s'arrête est positif ou négatif, donne des sommes plus grandes ou plus petites que la valeur cherchée, et que par conséquent on approche de cette valeur tant que la différence entre deux sommes consécutives diminue, c'est-à-dire que les termes décroissent.

D'après cette remarque, si l'on arrête successivement la série à chacun des cinq premiers termes, et que l'on convertisse les fractions en décimales, on obtient les valeurs suivantes,

$$const. > 0{,}50000, \quad \text{et} \quad < 0{,}58333,$$
$$0{,}57500, \qquad 0{,}57897,$$
$$0{,}57480;$$

et l'on voit qu'il faut s'arrêter à la deuxième valeur en excès, puisque la suivante en défaut est plus faible que celle qui la précède dans sa colonne.

On peut cependant pousser la convergence plus loin, en prenant pour x un nombre plus grand que 1. Si l'on fait $x=10$, et qu'on désigne par A la quantité

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}= 2{,}928968253968253968,$$

on aura

$$const.=A-1\,10-\frac{1}{20}+\frac{B_1}{200}+\frac{B_3}{40000}+\text{etc.};$$

et poussant cette série jusqu'au 11e terme, on aura exactement

$$const.=0{,}5772156649015328.$$

En suivant cette marche, on parviendrait à des résultats d'autant plus approchés, qu'en donnant à x des valeurs plus considérables, on rendrait décroissans un plus grand nombre de termes de la série proposée, qui est de l'espèce de celles que M. Legendre a nommées *séries demi-convergentes*, et dans lesquelles il faut s'arrêter, lorsque les termes cessent de décroître. La partie qui devient divergente est le développement d'une fonction qu'on peut quelquefois exprimer par une intégrale définie aux différentielles, comme on le verra par la suite, ce qui donne des limites analogues à celles qui ont été trouvées, dans le n° 171, pour la série de Taylor.

Ici, nous ferons remarquer que la constante trouvée plus haut donne la limite de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}+\frac{B_3}{4}+\frac{}{6}+\text{etc.},$$

à laquelle se réduit l'expression de $S\frac{1}{x}$, lorsqu'on fait $x=1$.

1001. Pour faciliter les applications de l'expression de $S\frac{1}{x}$, aux différentes valeurs de x, nous rapportons ici les valeurs des huit premiers nombres de Bernoulli, exprimés en décimales, savoir :

$$B_1=0{,}1666666666666,$$
$$B_3=0{,}0333333333333,$$
$$B_5=0{,}0238095238095,$$
$$B_7=0{,}0333333333333,$$

$$B_9 = 0,0757575757575,$$
$$B_{11} = 0,2531135531135,$$
$$B_{13} = 1,1666666666666,$$
$$B_{15} = 7,0921568627451;$$

mais pour simplifier la notation et nous conformer à l'usage, nous les avons rendus tous positifs, en donnant le signe — aux lettres B, lorsqu'elles sont affectées des indices 3, 7, 11, etc.,.... $4i-1$; et en conséquence, la seconde expression de Su, indiquée dans le n° 993, sera désormais remplacée par

$$Su = \int u\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}u + B_1 \overset{-1}{[1]} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - B_3 \overset{-3}{[1]} \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} + B_5 \overset{-5}{[1]} \frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5} - \text{etc.} + const.$$

1002. Supposons à présent que l'on demande la somme des 1000 premiers termes de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$etc.; on trouvera en faisant $x=1000$, que pour avoir cette somme avec treize décimales, il suffit de calculer les quatre premiers termes de l'expression de $S\frac{1}{x}$; et en observant que le logarithme népérien de 10 est 2,302585092994045 (*Introd.*, 27), on aura

$$\begin{aligned} l'x = l'1000 &= \ 6,9077552789821,\\ +\ \frac{1}{2x} &= +\ 0,0005000000000,\\ -\ \frac{B_1}{2x^2} &= -\ 0,0000000833333,\\ +\ \frac{B_3}{4x^4} &= +\ 0,0000000000000,\\ +\ const. &= +\ 0,5772156649015,\end{aligned}$$

ce qui donnera

$$1+\tfrac{1}{2}\ldots+\tfrac{1}{1000} = \quad 7,4854708605503,$$

résultat qui montre avec quelle lenteur marche la série proposée, quoique cependant la somme totale ou la limite en soit infinie, à cause du terme lx contenu dans l'expression de $S\frac{1}{x}$, et comme on le voit immédiatement aussi, puisque la série proposée n'est autre chose que l'expression de $l(1-1)=l\,0$, prise avec le signe — (*Introd.*, 30).

Si l'on prend pour x un nombre très-grand, le premier terme et la constante suffiront seuls pour donner une valeur très-approchée de la somme entière de la série; on aura donc

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}=\mathrm{l}x+C,$$

et à plus forte raison,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)+C;$$

en retranchant la première série de la seconde, il viendra

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)-\mathrm{l}x=\mathrm{l}\left(\frac{x+y}{x}\right),$$

formule qui peut être utile pour trouver les logarithmes des nombres un peu considérables.

On la rendra plus exacte en introduisant dans la somme des séries ci-dessus quelques-uns des termes qui suivent $\mathrm{l}x$ et $\mathrm{l}(x+y)$: on obtiendra de cette manière

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)-\mathrm{l}x+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2(x+y)}-\frac{1}{2x}\\ -\frac{B_1}{2(x+y)^2}+\frac{B_1}{2x^2}\\ +\frac{B_3}{4(x+y)^4}-\frac{B_3}{4x^4}\\ +\text{etc.}\end{array}\right\};$$

et toutes les fois que l'on pourra négliger les termes divisés par les puissances de $x+y$ et de x, supérieures à la première, on aura

$$\mathrm{l}\left(\frac{x+y}{x}\right)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}\right).$$

1003. On déduit encore de l'expression de $S\frac{1}{x}$ quelques conséquences remarquables. Il est d'abord évident que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}\ldots+\frac{1}{mx}=\frac{1}{m}\left\{\mathrm{l}x+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_3}{4x^4}-\text{etc.}+C\right\};$$

en changeant x en mx, on a d'un autre côté, si m est un nombre entier,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{mx}=\left\{\mathrm{l}mx+\frac{1}{2mx}-\frac{B_1}{2m^2x^2}+\frac{B_3}{4m^4x^4}-\text{etc.}+C\right\};$$

si l'on retranche de cette série la précédente multipliée par m, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\ldots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}\ldots+\frac{1}{mx} \\ \qquad -\frac{m}{m} \qquad\qquad -\frac{m}{2m} \qquad\qquad \ldots-\frac{m}{mx} \end{array}\right\} =$$

$$\mathrm{l}m+\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{m}-1\right)-\frac{B_1}{2x^2}\left(\frac{1}{m^2}-1\right)+\text{etc.},$$

équation dont la limite est $\mathrm{l}m$, lorsque x est infini. En faisant successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc., on tirera de là

$$\mathrm{l}2 = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\text{etc.},$$
$$\mathrm{l}3 = 1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{2}{9}+\text{etc.},$$
$$\mathrm{l}4 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{3}{8}+\text{etc.},$$
$$\mathrm{l}5 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{4}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{4}{10}+\text{etc.};$$

etc.

1004. La série $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}\ldots\ldots+\frac{1}{mx+n}$, qui comprend toutes celles dont le numérateur est constant et dont le dénominateur ne renferme que la première puissance de la variable x, a pour somme

$$S\frac{1}{mx+n}=\frac{1}{m}\mathrm{l}(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{B_1 m}{2(mx+n)^2}+\frac{B_3 m^3}{4(mx+n)^4}$$
$$-\frac{B_5 m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{B_7 m^7}{8(mx+n)^8}-\text{etc.}+C.$$

Si l'on veut déterminer la constante de manière que la somme s'évanouisse lorsque $x=0$, il viendra

$$0=\frac{1}{m}\,\mathrm{l}n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1 m}{2n^2}+\frac{B_3 m^3}{4n^4}-\text{etc.}+C.$$

1005. Si nous considérons en général la série

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\ldots\ldots+\frac{1}{x^m},$$

nous aurons

$$S\frac{1}{x^m}=-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{2x^m}-\frac{mB_1}{2x^{m+1}}+\frac{m(m+1)(m+2)B_3}{2.3.4x^{m+3}}$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)B_5}{2.3.4.5.6x^{m+5}}+\text{etc.}+C,$$

série qui devient très-convergente lorsque x est un peu grand. On peut se servir utilement de cette propriété, pour déterminer la constante C, comme dans le n° 1000; car si l'on fait, par exemple, $m=2$, on aura

$$S\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{B_1}{x^3}+\frac{B_3}{x^5}-\frac{B_5}{x^7}+\text{etc.}+C;$$

et posant $x=10$, on obtiendra

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots+\frac{1}{10^2}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{200}-\frac{1}{6000}+\frac{1}{3000000}-\text{etc.}+C,$$

d'où l'on tirera

$$C=1,644934066848226430,$$

en poussant la série du second membre jusqu'à son dixième terme.

Une circonstance très-digne de remarque, c'est que la valeur de C, à quelque degré d'exactitude que l'on porte l'approximation, se trouve la même que celle de $\frac{\pi^2}{6}$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, ou la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, et que la transcendante π entre aussi dans l'expression de la constante relative aux séries dont les termes généraux sont $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^6}$, etc. En attendant que nous démontrions rigoureusement la vérité de cette assertion, par la considération des produits composés d'un nombre indéfini de facteurs, on peut au moins la vérifier par approximation et de proche en proche, sur les séries indiquées précédemment.

Il suit de ce qui a été dit dans le n° 1000, sur les séries demi-convergentes, que la limite du développement de $S\frac{1}{x^m}$, pour $m>1$, et x infini, est la constante même de cette série; ainsi ce qu'on vient de lire donne la limite des séries $1+\frac{1}{2^m}+\text{etc.}$, lorsque m est un nombre pair.

En calculant aussi les valeurs de la constante dans les séries dont les termes généraux sont $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^5}$, etc., comparant ces valeurs avec les puissances π^3, π^5, etc., l'exactitude étant poussée jusqu'à la seizième décimale, et réunissant ces résultats à ceux qu'on obtiendra pour les puissances paires, on aura

$$1+\frac{1}{2^2}+\text{etc.}=1,6449340668482264=\frac{\pi^2}{6}=\frac{2B_1}{1.2}\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\text{etc.}=1,2020569031595942=\frac{1}{25,79436}\pi^3,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\text{etc.}=1,0823232337111381=\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^3B_3}{1.2.3.4}\pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \text{etc.} = 1,0369277551068632 = \frac{1}{295,1215}\,\pi^5,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \text{etc.} = 1,0173430619844491 = \frac{\pi^6}{945} = \frac{2^5 B_5}{1.2\ldots.6}\,\pi^6,$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \text{etc.} = 1,0083492773866018 = \frac{1}{2995,286}\,\pi^7,$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \text{etc.} = 1,0040773561979443 = \frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^7 B_7}{1.2\ldots.8}\,\pi^8,$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \text{etc.} = 1,0020083928260822 = \frac{1}{29749,35}\,\pi^9,$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \text{etc.} = 1,0009945751278180 = \frac{\pi^{10}}{93555} = \frac{2^9 B_9}{1.2\ldots10}\,\pi^{10},$$

etc.

Si l'on désigne par S_{2p} la limite de la série $1+\frac{1}{2^{2p}}+\text{etc.}$, on aura, d'après la loi précédente,

$$S_{2p} = \frac{2^{2p-1} B_{2p-1}}{1.2\ldots 2p}\,\pi^{2p}, \qquad S_{2p+2} = \frac{2^{2p+1} B_{2p+1}}{1.2\ldots(2p+2)}\,\pi^{2p+2},$$

d'où il suit

$$\frac{S_{2p+2}}{S_{2p}} = \frac{4\pi^2}{(2p+1)(2p+2)}\,\frac{B_{2p+1}}{B_{2p-1}};$$

et comme le premier membre tend continuellement vers l'unité, à mesure que p augmente, on en conclura que le rapport $\frac{B_{2p+1}}{B_{2p-1}}$ a pour limite $\frac{p^2}{\pi^2}$ ce qui fait voir la divergence de la série des nombres de Bernoulli.

1006. Il est bon de remarquer que ces valeurs donnent aussi les limites des séries

$$1+1-\frac{1}{2}+B_1-B_3+B_5-B_7+\text{etc.}=\frac{2B_1}{1.2}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}B_1-\frac{5}{2}B_3+\frac{7}{2}B_5-\frac{9}{2}B_7+\text{etc.}=1,2020\ldots$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3.4}{2.3}B_1-\frac{5.6}{2.3}B_3+\frac{7.8}{2.3}B_5-\frac{9.10}{2.3}B_7+\text{etc.}=\frac{2^3B_3}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3.4.5}{2.3.4}B_1-\frac{5.6.7}{2.3.4}B_3+\frac{7.8.9}{2.3.4}B_5-\frac{9.10.11}{2.3.4}B_7+\text{etc.}=1,0369\ldots$$

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3.4.5.6}{2.3.4.5}B_1-\frac{5.6.7.8}{2.3.4.5}B_3+\frac{7.8.9.10}{2.3.4.5}B_5-\frac{9.10.11.12}{2.3.4.5}B_7+\text{etc.}=\frac{2^5B_5}{1.2\ldots6}\pi^6$$

etc.,

qu'on obtient en faisant $x=1$, et successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, etc., dans l'expression de $S\frac{1}{x^m}$.

Les mêmes valeurs conduisent aussi à insérer un moyen entre chacun des termes de la suite

$$B_1, \quad B_3, \quad B_5, \quad B_7, \quad B_9, \quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire à trouver les expressions des quantités qui seraient représentées par

$$B_2, \quad B_4, \quad B_6, \quad B_8, \quad \text{etc.}$$

En effet, B_1 et B_3 répondant aux séries $1+\frac{1}{2^2}+$ etc. et $1+\frac{1}{2^4}+$ etc., B_2 doit répondre à la série intermédiaire $1+\frac{1}{2^3}+$ etc.; et d'après la loi suivant laquelle sont formées les limites des deux premières, on doit avoir, pour la troisième, $\frac{2^2B_2}{1.2.3}\pi^3$; on conclura de là $\frac{2^2B_2}{1.2.3}\pi^3=\frac{1}{25,79436}\pi^3$, ou $B_2=\frac{3}{2}\frac{1}{25,79436}=0,0581525$; on arriverait de même à B_4, B_6, etc.

1007. Soit encore la série dérivée de $u=\frac{1}{n^2+x^2}$; on aura

$$\int\frac{dx}{n^2+x^2}=\frac{1}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{n}\right) \text{ (374)};$$

et, si l'on prend $y=\operatorname{arc}\left(\cot=\frac{x}{n}\right)$, il viendra

$$\int\frac{dx}{n^2+x^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\pi-y\right),\quad \frac{x}{n}=\cot y=\frac{\cos y}{\sin y},\quad \frac{1}{n^2+x^2}=\frac{\sin y^2}{n^2},$$

$$dx=-n\frac{dy}{\sin y^2},\qquad d\frac{1}{n^2+x^2}=\frac{2dy\sin y\cos y}{n^2}=\frac{dy\sin 2y}{n^2},$$

d'où l'on conclura $\frac{du}{dx}=-\frac{\sin y^2\sin 2y}{n^3}$; on obtiendra ensuite

$$\frac{d^2u}{dx}=-\frac{2dy(\sin y\cos y\sin 2y+\sin y^2\cos 2y)}{n^3},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{2(\sin y^3\cos y\sin 2y+\sin y^4\cos 2y)}{n^4}=\frac{2\sin y^3\sin 3y}{n^4};$$

on trouvera de même

$$\frac{d^3u}{dx^3}=-\frac{2.3\sin y^4\sin 4y}{n^5},\quad \frac{d^4u}{dx^4}=\frac{2.3.4\sin y^5\sin 5y}{n^6}, \text{ etc.},$$

et l'on aura par conséquent

$$S\frac{1}{n^2+x^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\pi-y\right)+\frac{\sin y^2}{2n^2}-\frac{B_1}{2}\frac{\sin y^2\sin 2y}{n^3}+\frac{B_3}{4}\frac{\sin y^4\sin 4y}{n^5}$$
$$-\frac{B_5}{6}\frac{\sin y^6\sin 6y}{n^7}+\text{etc.}+C.$$

Pour appliquer cette série à des cas particuliers, il faut auparavant en déterminer la constante C. Il semble d'abord qu'on peut effectuer cette opération, en partant de la supposition de $x=0$, de laquelle il résulte $y=\frac{1}{2}\pi$, $\sin y=1$, $\sin 2y=0$, $\sin 4y=0$, etc., et par conséquent $\frac{1}{2n^2}+C=0$, ou $C=-\frac{1}{2n^2}$; mais cette valeur de la constante n'est pas complète; car si l'on faisait x infini, ce qui donnerait $y=0$, on trouverait pour la limite de la série proposée $\frac{\pi}{2n}+C$, ou $\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2n^2}$, tandis que nous montrerons dans la suite que la vraie valeur de cette limite est $\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$.

Nous expliquerons alors à quoi tient le paradoxe que nous faisons remarquer ici; et dès à présent nous prendrons, en conséquence, $C=-\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$; par ce changement, l'expression de $S\frac{1}{n^2+x^2}$ deviendra applicable à tous les cas.

1008. Occupons-nous maintenant des séries dont le terme général est une fonction transcendante. Soit $u=\mathrm{l}x$; nous aurons

$$S\mathrm{l}x=x\mathrm{l}x-x+\frac{1}{2}\mathrm{l}x+\frac{B_1}{1.2x}-\frac{B_3}{3.4x^3}+\frac{B_5}{5.6x^5}-\text{etc.}+C\ (1001),$$

en observant que $\int dx\,\mathrm{l}x=x\,\mathrm{l}x-x$ (428).

On ne saurait encore ici déterminer la constante en faisant $x=1$, parce que le second membre a trop peu de termes convergens; mais en faisant $x=10$, calculant la somme des dix premiers termes de ce membre, et l'égalant à celle que donnent les logarithmes népériens des dix premiers nombres, on trouvera

$$C=0{,}9189385332047,$$

à moins d'une unité décimale du treizième ordre, valeur qui sera par conséquent la limite de la série

$$1-\frac{B_1}{1.2}+\frac{B_3}{3.4}-\frac{B_5}{5.6}+\text{etc.}$$

L'expression

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12 \text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11 \text{ etc.}} \quad (989),$$

que l'on doit à Wallis, et que nous déduirons dans la suite, d'une manière bien simple, de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, conduit à la vraie valeur de la constante C. Pour cela il faut observer qu'en passant aux logarithmes, et s'arrêtant, dans le numérateur, au nombre pair $2x$, on obtient

$$l\pi-l2=\begin{cases} 2l2+2l4+2l6+2l8+2l10\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -l1-2l3-2l5-2l7-2l9\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1), \end{cases}$$

et qu'en prenant les limites dans la supposition de x infini, on trouvera, par le moyen de l'expression précédente de Slx,

$$l1+l2+l3+l4+l5\ldots+lx=C+(x+\tfrac{1}{2})lx-x,$$
$$l1+l2+l3+l4+l5\ldots+l2x=C+(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x,$$
$$l2+l4+l6+l8+l10\ldots+l2x=Slx+xl2=C+(x+\tfrac{1}{2})lx+xl2-x.$$

Retranchant la troisième série de la seconde, il vient

$$l1+l3+l5+l7\ldots+l(2x-1)=xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x,$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{matrix} 2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l5\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1)\end{matrix}\right\}=\begin{cases}2C+2(x+\tfrac{1}{2})lx+2xl2-2x-l2x \\ -2xlx-2(x+\tfrac{1}{2})l2+2x;\end{cases}$$

et comme le premier membre de cette équation est égal à $l\pi-l2$, on obtient, après la réduction du second, $l\pi-l2=2C-2l2$, d'où

$$C=\tfrac{1}{2}(l\pi+l2)=\tfrac{1}{2}l2\pi=l\sqrt{2\pi},$$

résultat bien remarquable, et d'après lequel on a

$$Slx=\tfrac{1}{2}l2\pi+xlx-x+\tfrac{1}{2}lx+\frac{B_1}{1.2x}-\frac{B_3}{3.4x^3}+\frac{B_5}{5.6x^5}-\text{etc.}$$

On rendra cette équation propre à un système quelconque de logarithmes, en multipliant par le module les termes $-x$, $\frac{B_1}{1.2x}$, $-\frac{B_3}{3.4x^3}$, etc., dans lesquels il n'entre point de logarithmes.

1009. Proposons-nous pour exemple de trouver la somme des logarithmes des 1000 premiers nombres des tables, c'est-à-dire la valeur de $\mathrm{l}\,1+\mathrm{l}\,2+\mathrm{l}\,3\ldots+\mathrm{l}\,1000$, la caractérisque l désignant ici des logarithmes ordinaires, dont le module sera, pour abréger, représenté par M. On aura $x=1000$; d'où on conclura

$$\begin{array}{rlr} x\,\mathrm{l}\,x = & & 3000{,}0000000000000 \\ +\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\,x = & & 1{,}5000000000000 \\ +\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\,2\pi = & & 0{,}3990899341790 \\ -Mx = & - & 434{,}2944819032518 \\ +\frac{MB_1}{1.2x} = & + & 0{,}0000361912068 \\ -\frac{MB_3}{3.4x^3} = & - & 0{,}0000000000012 \\ \hline \text{résultat}\ldots\ldots\ldots\ldots & & 2567{,}6046442221328\,; \end{array}$$

mais

$$\mathrm{l}\,1+\mathrm{l}\,2+\mathrm{l}\,3\ldots\ldots+\mathrm{l}\,1000=\mathrm{l}.1.2.3\ldots1000=\mathrm{l}[1000]^{1000};$$

il s'ensuit que

$$\mathrm{l}[1000]^{1000}=2567{,}6046442221328.$$

On apprend par là que le nombre $[1000]^{1000}$, dont le calcul est presque impraticable, doit avoir 2568 chiffres, et que les dix premiers chiffres sur la gauche sont 4023872600, en sorte qu'il est compris entre les nombres qui résultent de 4023872600 et de 4023872601, suivis chacun de 2558 zéros. Cette connaissance suffit dans beaucoup de recherches où l'on ne demande que les rapports des produits de grands nombres; et dans ce cas, la valeur approchée de ces rapports devient précieuse, par l'impossibilité où l'on est d'effectuer les calculs nécessaires pour arriver à la valeur exacte; la longueur de ces calculs étant alors un obstacle aussi insurmontable que la difficulté d'exprimer rigoureusement une fonction transcendante. M. Laplace a beaucoup étendu cette recherche, dont les applications sont très-fréquentes dans le Calcul des probabilités; mais comme il s'appuie sur des considérations différentes de celles qui nous occupent maintenant, c'est plus loin que nous rendrons compte de ses travaux sur ce sujet.

1010. En suivant Euler, nous allons montrer comment on parvient à trouver le coefficient quelconque d'une très-haute puissance du bi-

nome et le rapport que l'un quelconque des termes de cette puissance a avec la somme de tous ceux qui la composent.

Le terme général du développement de $(a+b)^m$ étant $[m]^{n}\overset{-n}{[o]}a^{m-n}b^n$, son coefficient $[m]^{n}\overset{-n}{[o]}$ peut être changé en

$$[m]^{n}\overset{-n}{[o]}\overset{-(m-n)}{[o]}=\frac{[m]^{m}}{[n]^{n}[m-n]^{m-n}}\ (982),$$

et passant aux logarithmes, il vient

$$\mathrm{l}[m]^{n}\overset{-n}{[o]}=\mathrm{l}[m]^{m}-\mathrm{l}[n]^{n}-\mathrm{l}[m-n]^{m-n};$$

or on a, par le n° 1008,

$$\mathrm{l}[m]^{m}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(m+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}\,m-m+\frac{B_1}{1.2m}-\frac{B_3}{3.4m^3}+\frac{B_5}{5.6m^5}-\text{etc.},$$

$$\mathrm{l}[n]^{n}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}\,n-n+\frac{B_1}{1.2n}-\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_5}{5.6n^5}-\text{etc.},$$

$$\mathrm{l}[m-n]^{m-n}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(m-n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}(m-n)-m+n+\frac{B_1}{1.2(m-n)}-\frac{B_3}{3.4(m-n)^3}+\text{etc.},$$

ce qui donne

$$\mathrm{l}\frac{[m]^{m}}{[n]^{n}[m-n]^{m-n}}=\left.\begin{cases}-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(m+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}m-(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}n-(m-n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}(m-n)\\ +\frac{B_1}{1.2m}-\frac{B_1}{1.2n}-\frac{B_1}{1.2(m-n)}\\ -\frac{B_3}{3.4m^3}+\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_3}{3.4(m-n)^3}\\ +\text{etc.}\end{cases}\right\}.$$

Lorsque l'on fait $n=\frac{m}{2}$, m étant paire, on tombe sur le terme qui occupe le milieu du développement de la puissance de $a+b$, et qui est affecté de $a^n b^n$; son coefficient est exprimé par $\frac{[2n]^{2n}}{([n]^{n})^2}$; la formule ci-dessus donne pour son logarithme

$$\mathrm{l}\frac{[2n]^{2n}}{([n]^{n})^2}=\left.\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\pi-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}n+2n\mathrm{l}2+\frac{B_1}{1.2.2n}-\frac{B_3}{3.4.2^3n^3}+\frac{B_5}{5.6.2^5n^5}-\text{etc.}\\ -\frac{2B_1}{1.2n}+\frac{2B_3}{3.4n^3}-\frac{2B_5}{5.6n^5}+\text{etc.}\end{matrix}\right\},$$

expression que l'on peut changer en

$$\mathrm{l}\frac{[2n]^{2n}}{([n]^{n})^{2}}=\mathrm{l}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}-\frac{3B_1}{1.2.2n}+\frac{15B_3}{3.4.2^3n^3}-\frac{63B_5}{5.6.2^5n^5}+\text{etc.};$$

et si l'on passe des logarithmes aux nombres, on aura

$$\frac{[2n]^{2n}}{([n]^{n})^{2}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.e^{-\frac{3B_1}{1.2.2n}}.e^{\frac{15B_3}{3.4.2^3n^3}}.e^{-\frac{63B_5}{5.6.2^5n^5}}.\text{etc.}$$

Il est facile maintenant de développer cette série suivant les puissances de n, en substituant à chaque quantité exponentielle la série qui lui est égale; mais nous n'effectuerons point ce calcul, parce que la forme logarithmique est la plus commode pour les applications.

Si l'on se proposait, par exemple, d'obtenir le rapport du coefficient moyen de la puissance $2n$ du binome à la somme de tous les autres, on ferait a et $b=1$, d'où $(a+b)^{2n}=2^{2n}$; le logarithme du rapport cherché aurait pour expression

$$\mathrm{l}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}-\frac{3B_1}{1.2.2n}+\frac{15B_3}{3.4.2^3n^3}-\frac{63B_5}{5.6.2^5n^5}+\text{etc.}$$

En prenant, par exemple, $2n=100$, on trouvera par cette formule le rapport de 1 à 0,0795892.

1011. Soit $u=a^x$; la formule $Su=\int u dx+\frac{1}{2}u+\text{etc.}$ (1001) donnera

$$Sa^x=a^x\left\{\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}\mathrm{l}a-\frac{B_3}{2.3.4}(\mathrm{l}a)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(\mathrm{l}a)^5-\text{etc.}\right\}+C.$$

En faisant $Sa^x=0$, lorsque $x=0$, on trouvera

$$C=-\left\{\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}\mathrm{l}a-\frac{B_3}{2.3.4}(\mathrm{l}a)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(\mathrm{l}a)^5-\text{etc.}\right\},$$

et on aura par conséquent

$$Sa^x=(a^x-1)\left\{\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}\mathrm{l}a-\frac{B_3}{2.3.4}(\mathrm{l}a)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(\mathrm{l}a)^5-\text{etc.}\right\};$$

mais on sait d'ailleurs que $Sa^x=\frac{(a^x-1)a}{a-1}$ (994) : on conclura donc de ce qui précède, que

$$\frac{a}{a-1}=\frac{1}{\mathrm{l}a}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}\mathrm{l}a-\frac{B_3}{2.3.4}(\mathrm{l}a)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(\mathrm{l}a)^5-\text{etc.},$$

d'où on tirera

$$\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{2}\right)la = 1 + \frac{B_1}{2}(la)^2 - \frac{B_3}{2.3.4}(la)^4 + \frac{B_5}{2.3.4.5.6}(la)^6 - \text{etc.},$$

équation dont le premier membre se réduit à $\frac{(a+1)la}{2(a-1)}$, et donne, comme on voit, la limite d'une série très-remarquable.

1012. Si l'on prend $u = \sin ax$, on obtiendra, par la formule citée dans le numéro précédent,

$$\left.\begin{array}{l} S\sin ax = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{2}\sin ax + \frac{B_1 a}{2}\cos ax + \frac{B_3 a^3}{2.3.4}\cos ax \\ \qquad + \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6}\cos ax + \text{etc.} + C \end{array}\right\}$$

Dans le cas où $x=0$, on a $S\sin ax = 0$, d'où il suit

$$C = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2.3.4} - \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6} - \text{etc.},$$

et par conséquent

$$S\sin ax = \frac{1}{2}\sin ax + (1-\cos ax)\left\{\frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2.3.4} - \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}\right\}.$$

De la formule $\Sigma\sin ax = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a} + \textit{const.}$ (957), on tire aussi

$$\begin{aligned} S\sin ax &= -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a} + \sin ax + \textit{const.} \\ &= -\frac{\cos ax\cos\frac{1}{2}a - \sin ax\sin\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a} + \frac{\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a} \\ &= \frac{1}{2}\sin ax + \frac{\cos\frac{1}{2}a(1-\cos ax)}{2\sin\frac{1}{2}a}, \end{aligned}$$

en déterminant la constante pour que cette dernière expression de $S\sin ax$ s'évanouisse, ainsi que la première, lorsque $x=0$.

La comparaison de l'une avec l'autre donne

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2.3.4} - \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

On parviendrait au même résultat, en partant de $S\cos ax$.

1013. En général, si dans les formules

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.,$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.,$$

on change x en $x+h$, et qu'on détermine ensuite la constante arbitraire, de manière que les résultats soient respectivement $\sin p$ et $\cos p$, lorsque $x=0$, on aura

$$S\sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx+\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh},$$

$$S\cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx+\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} - \frac{\sin(p-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh}.$$

La formule

$$SPQ = Q(P+\Sigma P) - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \text{etc.}\ (993),$$

conduit au même résultat que celui qu'on déduirait des expressions du n° 958, et donne la somme de toutes les séries dont le terme général est le produit de $\sin(p+qx)$, ou de $\cos(p+qx)$, par une fonction rationnelle et entière de x; et pour étendre ce procédé aussi loin qu'il peut aller, il ne faut pas oublier que toute fonction rationnelle et entière de sinus et de cosinus se ramène à des sinus et à des cosinus d'arcs multiples.

1014. Il paraît difficile, au premier coup-d'œil, de trouver ce que deviennent les expressions de $S\sin(p+qx)$, et de $S\cos(p+qx)$, lorsqu'on y suppose x infini; car on ne voit pas quelles peuvent être, dans cette hypothèse, les valeurs des fonctions $\cos(p+qx+\frac{1}{2}qh)$ et $\sin(p+qx+\frac{1}{2}qh)$, qui sont alternativement croissantes et décroissantes et ne peuvent jamais surpasser le rayon. Cette difficulté, agitée d'abord entre Daniel Bernoulli et Euler, paraît avoir été suffisamment éclaircie par Lexell (*Novi Comment. Acad. Petrop.*, t. XVIII).

Il faut observer premièrement, que dans une infinité de cas, la série

$$\sin p + \sin(p+q) + \sin(p+2q) \ldots + \sin(p+qx)$$

est périodique, c'est-à-dire que ses termes redeviennent successivement les mêmes, et qu'en conséquence les diverses sommes partielles deviennent nulles, à la fin de chacune de ces périodes. En effet, l'expression de $S\sin(p+qx)$, qui se réduit à

$$S\sin(p+qx) = -\frac{\cos[p+(x+\frac{1}{2})q]}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q},$$

lorsqu'on prend $h=1$, s'évanouit pour toutes les valeurs de x données par l'équation

$$p+(x+\tfrac{1}{2})q=2m\pi+p-\tfrac{1}{2}q, \quad \text{ou} \quad (x+1)q=2m\pi,$$

dans laquelle $2m\pi$ désigne un multiple quelconque de la circonférence du cercle dont le rayon $=1$. Si le rapport de π à q est celui de deux nombres rationnels, on aura évidemment une infinité de valeurs de x, pour chacune desquelles l'expression de $S\sin(p+qx)$ s'évanouira.

Cette expression étant ainsi susceptible d'un nombre indéfini de périodes, ne saurait avoir de limites déterminées; mais il est important de remarquer que si l'on prend le milieu entre les différens résultats que l'on en déduit pour toutes les valeurs de x, on tombera sur une expression dont le développement en série sera identique avec la proposée. Pour cela, on fera successivement

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \ldots x=n,$$

dans $S\sin(p+qx)$, et on obtiendra

$$\begin{array}{l}
-\dfrac{\cos(p+\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}+\dfrac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}\\
-\dfrac{\cos(p+\frac{3}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}+\dfrac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}\\
-\dfrac{\cos(p+\frac{5}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}+\dfrac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-\dfrac{\cos\left(p+\frac{2n+1}{2}q\right)}{2\sin\frac{1}{2}q}+\dfrac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q};
\end{array}$$

la valeur moyenne résultante de ces valeurs particulières, dont le nombre est $n+1$, sera exprimée par la série

$$\frac{(n+1)\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}-\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}\left\{\cos(p+\tfrac{1}{2}q)+\cos(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\cos\left(p+\frac{2n+1}{2}q\right)\right\}.$$

La somme de la série renfermée entre les accolades s'obtient en écrivant $p+\frac{1}{2}q$, à la place de p, dans l'expression de $S\cos(p+qx)$, et en y faisant $x=n$ et $h=1$, ce qui donne

$$\frac{\sin[p+(n+1)q]}{2\sin\frac{1}{2}q}-\frac{\sin p}{2\sin\frac{1}{2}q}=\frac{\cos[p+\frac{1}{2}(n+1)q]\sin\frac{1}{2}(n+1)q}{\sin\frac{1}{2}q},$$

quantité nulle dans l'hypothèse actuelle, puisque $\frac{1}{2}(n+1)q$ est un mul-

tiple de la demi-circonférence : le résultat précédent se réduit donc à $\frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$. Telle est l'expression que Daniel Bernoulli regardait comme la somme ou la limite de la série

$$\sin p + \sin(p+q) + \sin(p+2q) + \text{etc.},$$

continuée indéfiniment, mais qui n'en est, à proprement parler, que la fraction génératrice (*Int.* 4), ainsi que l'on peut s'en convaincre, en formant l'équation

$$\frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} = \sin p + \sin(p+q) + \sin(p+2q) + \text{etc.},$$

de laquelle on tire d'abord

$$\cos(p-\tfrac{1}{2}q) = 2\sin p\sin\tfrac{1}{2}q + 2\sin(p+q)\sin\tfrac{1}{2}q + 2\sin(p+2q)\sin\tfrac{1}{2}q + \text{etc.},$$

puis

$$\cos(p-\tfrac{1}{2}q) = \cos(p-\tfrac{1}{2}q) + \cos(p+\tfrac{1}{2}q) + \cos(p+\tfrac{3}{2}q) + \cos(p+\tfrac{5}{2}q) + \text{etc.}$$
$$-\cos(p+\tfrac{1}{2}q) - \cos(p+\tfrac{3}{2}q) - \text{etc.},$$

en mettant pour les produits de sinus leurs expressions connues; les deux membres de ce résultat deviennent identiques, abstraction faite du dernier terme, ainsi que cela arrive dans le développement des fonctions en séries divergentes (*Int.* 4) (*).

(*) Leibnitz avait remarqué (t. III, p. 409 de ses *Œuvres*) que le milieu $\frac{1}{2}$ des sommes 1 et 0, données par la série $1-1+1-1+1-1+$ etc., suivant qu'on en ajoute un nombre impair ou pair de termes, est la valeur que prend, lorsqu'on fait $x=1$, la fraction $\frac{1}{1+x}$, qui, par son développement, produit la série ci-dessus. Mais Callet montra que la même série pouvait résulter d'une infinité de fractions auxquelles ne répondait plus la valeur moyenne $\frac{1}{2}$, contradiction que Lagrange a levée d'une manière fort simple, dans le rapport qu'il a fait sur le Mémoire de Callet (t. III des *Mém. de la Classe des Sciences Math. et Phys. de l'Institut*).

Si, par exemple, dans le second membre de l'équation

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - \text{etc.},$$

qui devient $1-1+1-1+$ etc., quand $x=1$, on introduit toutes les puissances de x qui y manquent, en lui donnant la forme

$$1 + 0.x - x^2 + x^3 + 0.x^4 - x^5 + x^6 + 0.x^7 - x^8 + \text{etc.},$$

Cette dernière transformation donne un moyen aussi élégant que facile de parvenir à l'expression de $S\sin(p+qx)$. En effet, si on multiplie par $2\sin\frac{1}{2}q$ les deux membres de l'équation

$$S\sin(p+qx)=\sin p+\sin(p+q)+\sin(p+2q)\ldots\ldots+\sin(p+qx),$$

elle devient

$$2\sin\tfrac{1}{2}q S\sin(p+qx)=$$
$$2\sin p\sin\tfrac{1}{2}q+2\sin(p+q)\sin\tfrac{1}{2}q+2\sin(p+2q)\sin\tfrac{1}{2}q\ldots\ldots+2\sin(p+qx)\sin\tfrac{1}{2}q,$$

et se transforme en

$$2\sin\tfrac{1}{2}q S\sin(p+qx)=$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos(p-\frac{1}{2}q)+\cos(p+\frac{1}{2}q)\ldots\ldots+\cos[p+(x-\frac{1}{2})q]\\ \quad-\cos(p+\frac{1}{2}q)\ldots\ldots-\cos[p+(x-\frac{1}{2})q]-\cos[p+(x+\frac{1}{2})q]\end{array}\right\},$$

d'où l'on conclut

$$S\sin(p+qx)=\frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)-\cos[p+(x+\frac{1}{2})q]}{2\sin\frac{1}{2}q}.$$

1015. En appliquant à l'expression de $S\cos(p+qx)$ et à la série

$$\cos p+\cos(p+q)+\cos(p+2q)+\cos(p+3q)+\text{etc.}$$

les raisonnemens et les opérations du numéro précédent, on parvient à des conclusions analogues. On trouve d'abord que la valeur moyenne de toutes les sommes particulières déduites de

$$S\cos(p+qx)=\frac{\sin[p+(x+\frac{1}{2})q]}{2\sin\frac{1}{2}q}-\frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$$

---

et qu'on y fasse ensuite $x=1$, on aura la série

$$1+0-1+1+0-1+1+0-\text{etc.},$$

dont les sommes sont 1, 1, ou 0, selon qu'on s'arrête au premier, au deuxième ou au troisième terme, dans chacune des périodes de trois termes dont elle est composée. Le milieu entre ces sommes est alors $\frac{2}{3}$, valeur que prend la fraction génératrice lorsque $x=1$.

Il n'est pas difficile d'appliquer ce procédé à la formule générale

$$\frac{1+x+x^2\ldots\ldots+x^{m-1}}{1+x+x^2\ldots\ldots+x^{n-1}}=1-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{2n}-x^{m+2n}+\text{etc.},$$

et de trouver que la moyenne entre toutes les sommes de la série, quand $x=1$, est $\frac{m}{n}$, comme la fraction génératrice; mais on voit aussi par là que la série..... $1-1+1-1+\text{etc.}$ prenant des valeurs diverses, suivant la fraction dont on la fait dériver, ne donne un résultat exact qu'autant qu'on tient compte du reste de la division, correspondant au terme où l'on s'arrête.

donne la quantité

$$-\frac{(n+1)\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}+\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}\left\{\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\sin\left(p+\frac{2n+1}{2}q\right)\right\}.$$

La somme de la série comprise entre les accolades se tire de l'expression de $S\sin(p+qx)$, en y changeant p en $p+\frac{1}{2}q$, en y faisant $h=1$, $x=n$; et le résultat

$$\frac{\cos p}{2\sin\frac{1}{2}q}-\frac{\cos[p+(n+1)q]}{2\sin\frac{1}{2}q}=\frac{\sin[p+\frac{1}{2}(n+1)q]\sin\frac{1}{2}(n+1)q}{\sin\frac{1}{2}q},$$

s'évanouit nécessairement lorsque l'équation $(n+1)q=2m\pi$ a lieu. On a donc encore, dans cette circonstance, $-\frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$; et on prouve que le développement de cette fonction reproduit en effet la série proposée, en multipliant par $2\sin\frac{1}{2}q$ les deux membres de l'équation

$$-\frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}=\cos p+\cos(p+q)+\cos(p+2q)+\text{etc.},$$

qui devient alors

$$-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)=2\sin\tfrac{1}{2}q\cos p+2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+q)+2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+2q)+\text{etc.},$$

se change en

$$\begin{aligned}-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)=-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)&+\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)+\sin(p+\tfrac{5}{2}q)+\text{etc.}\\&-\sin(p+\tfrac{1}{2}q)-\sin(p+\tfrac{3}{2}q)-\text{etc.},\end{aligned}$$

lorsqu'on y met pour les produits de sinus et de cosinus leurs valeurs, et devient par conséquent identique si on la considère comme indéfinie.

On arrive aussi à l'expression de $S\cos(p+qx)$, en multipliant par $2\sin\frac{1}{2}q$ les deux membres de l'équation

$$S\cos(p+qx)=\cos p+\cos(p+q)+\cos(p+2q)\ldots+\cos(p+qx);$$

on forme de cette manière l'équation

$$\begin{aligned}&2\sin\tfrac{1}{2}qS\cos(p+qx)=\\&2\sin\tfrac{1}{2}q\cos p+2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+q)+2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+2q)\ldots+2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+qx),\end{aligned}$$

équivalente à cette autre :

$$\begin{aligned}&2\sin\tfrac{1}{2}qS\cos(p+qx)=\\-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)&+\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\sin[p+(x-\tfrac{1}{2})q]+\sin[p+(x+\tfrac{1}{2})q]\\&-\sin(p+\tfrac{1}{2}q)-\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots-\sin[p+(x-\tfrac{1}{2})q],\end{aligned}$$

de laquelle on tire

$$S\cos(p+qx)=\frac{-\sin(p-\frac{1}{2}q)+\sin[p+(x+\frac{1}{2})q]}{2\sin\frac{1}{2}q},$$

résultat conforme à celui du n° 1013.

1016. La sommation des suites a conduit Euler à des interpolations très-élégantes, dont nous allons donner une idée. Il faut d'abord observer que certaines suites représentent des fonctions que l'on ne saurait exprimer d'aucune autre manière, et dont on n'a pas même les différentielles; Euler les appelle *functiones inexplicabiles*. La première recherche à faire est celle de leurs différentielles, dont on obtient les valeurs approchées par le moyen des formules du n° 993.

Application de la sommation des suites à l'interpolation.

Supposons, par exemple, que l'on demande les différentielles de la fonction qui exprime la somme de la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{x},$$

fonction dont on ne saurait avoir une expression finie, mais dont la valeur approchée est

$$\mathrm{l}x+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_3}{4x^4}-\frac{B_5}{6x^6}+\text{etc.}+C\ (1002);$$

en désignant cette fonction par U, on aura

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{B_1}{x^3}-\frac{B_3}{x^5}+\frac{B_5}{x^7}-\text{etc.},$$

série qui donnera avec d'autant plus d'exactitude la valeur du coefficient différentiel, que celle de x sera plus grande (1000).

En général, la formule du n° 1001,

$$Su=\int u\mathrm{d}x+\frac{1}{2}u+\frac{B_1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{B_3}{2.3.4}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}-\text{etc.}+\textit{const.},$$

donnera

$$\frac{dU}{dx}=u+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{B_1}{2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{B_3}{2.3.4}\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}\frac{\mathrm{d}^6u}{\mathrm{d}x^6}-\text{etc.},$$

si l'on fait $Su=U$.

On appliquera de même à cette recherche les autres formules du n° 993, et par leur moyen, on obtiendra le développement de la valeur que prend U, lorsque x se change en $x+\omega$, ordonné suivant les puissances de ω.

1017. Euler est aussi parvenu au même développement, sans le secours des formules citées, et par des considérations qu'il est bon de connaître.

Soit S la somme de la série

$$A,\ B,\ C,\ D,\ldots\ldots\ldots\ldots X,$$

correspondante aux indices

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots\ldots\ldots x,$$

S_ω et X_ω, ce que deviennent cette somme et le terme général, lorsque x se change en $x+\omega$, et désignons, comme à l'ordinaire, par S_1, S_2, etc., X_1, X_2, etc., les valeurs de S et de X, correspondantes à $x+1$, $x+2$, etc.; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} S_1=S+X_1, \\ S_2=S+X_1+X_2, \\ S_3=S+X_1+X_2+X_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n=S+X_1+X_2\ldots\ldots+X_n, \end{array}\right\}\begin{array}{l} S_{\omega+1}=S_\omega+X_{\omega+1}, \\ S_{\omega+2}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}, \\ S_{\omega+3}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}+X_{\omega+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{\omega+n}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}\ldots+X_{\omega+n}. \end{array}$$

Maintenant, il faut examiner la forme que prend la série dans les termes très-éloignés du premier, afin de connaître la limite vers laquelle elle tend sans cesse. Si, par exemple, ses termes consécutifs approchaient de plus en plus de l'égalité, de manière qu'en supposant l'indice n très-grand, on eût, avec une exactitude toujours croissante, $X_n=X_{n+1}$, $X_{n+1}=X_{n+2}$, etc., on en conclurait

$$S_{n+p}=S_n+X_{n+1}+X_{n+2}\ldots+X_{n+p}=S_n+pX_{n+1},$$

et par conséquent $S_{n+\omega}=S_n+\omega X_{n+1}$. En égalant cette expression de $S_{\omega+n}$ à celle qu'on trouve dans le tableau ci-dessus, on obtiendra

$$S_n+\omega X_{n+1}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}\ldots+X_{\omega+n};$$

mettant pour S_n son développement, et tirant la valeur de S_ω, on aura

$$\begin{array}{l} S_\omega=S+X_1\ +X_2\ +X_3\ +X_4\ldots\ldots+X_n+\omega X_{n+1} \\ \qquad -X_{\omega+1}-X_{\omega+2}-X_{\omega+3}-X_{\omega+4}\ldots-X_{\omega+n}. \end{array}$$

Cette formule étant appliquée à la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}$, donne

$$S_\omega = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \ldots + \frac{1}{x+n} + \frac{\omega}{x+n+1}$$
$$- \frac{1}{x+\omega+1} - \frac{1}{x+\omega+2} - \frac{1}{x+\omega+3} \ldots - \frac{1}{x+\omega+n},$$

ou

$$S_\omega = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{etc.},$$

en négligeant le terme correspondant à ωX_{x+1}; ce résultat sera d'autant plus exact que x sera plus grand et ω plus petit.

Pour le développer suivant les puissances de ω, on observera que

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \text{etc.},$$
etc.,

et on aura ensuite

$$S_\omega = S + \omega\left\{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{etc.}\right\}$$
$$- \omega^2\left\{\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \omega^3\left\{\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{etc.}\right\}$$
$$- \text{etc.};$$

comparant cette formule avec la série

$$S_\omega = S + \frac{dS}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3S}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

qui résulte du théorème de Taylor, on en conclura

$$\frac{dS}{dx} = + \quad 1\left\{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{etc.}\right\};$$
$$\frac{d^2S}{dx^2} = - \quad 1.2\left\{\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{etc.}\right\},$$
$$\frac{d^3S}{dx^3} = + \; 1.2.3\left\{\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{etc.}\right\},$$
etc.

Considérons encore la série

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \ldots\ldots + \frac{1}{x^n};$$

nous obtiendrons, par les formules précédentes,

$$X_1 - X_{n+1} = \frac{1}{(x+1)^m} - \frac{1}{(x+1+\omega)^m}$$
$$= \frac{m\omega}{(x+1)^{m+1}} - \frac{m(m+1)\omega^2}{2(x+1)^{m+2}} + \frac{m(m+1)(m+2)\omega^3}{2.3(x+1)^{m+3}} - \text{etc.},$$
$$X_2 - X_{n+2} = \frac{1}{(x+2)^m} - \frac{1}{(x+2+\omega)^m}$$
$$= \frac{m\omega}{(x+2)^{m+1}} - \frac{m(m+1)\omega^2}{2(x+2)^{m+2}} + \frac{m(m+1)(m+2)\omega^3}{2.3(x+2)^{m+3}} - \text{etc.},$$

etc.,

et l'équation

$$S_\omega - S = m\omega\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+1}} + \frac{1}{(x+2)^{m+1}} + \frac{1}{(x+3)^{m+1}} + \text{etc.}\right\}$$
$$- \frac{m(m+1)\omega^2}{1.2}\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+2}} + \frac{1}{(x+2)^{m+2}} + \frac{1}{(x+3)^{m+2}} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)\omega^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+3}} + \frac{1}{(x+2)^{m+3}} + \frac{1}{(x+3)^{m+3}} + \text{etc.}\right\}$$
$$- \text{etc.},$$

de laquelle nous déduirons comme ci-dessus les valeurs de

$$\frac{dS}{dx}, \quad \frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^3S}{dx^3}, \quad \text{etc.}$$

1018. En général, on a

$$X_\omega = X + \frac{dX}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$X_{\omega+1} = X_1 + \frac{dX_1}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

etc.,

d'où l'on tire

$$S_\omega = S + \omega X_{n+1} - \frac{\omega}{1}\,\frac{d\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \text{etc.}\}}{dx}$$
$$- \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \text{etc.}\}}{dx^2}$$
$$- \frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \text{etc.}\}}{dx^3},$$

etc.

Si le terme X_{n+1} ne s'évanouit pas, comme dans les exemples du numéro précédent, lorsqu'on fait n infini, on observera que

$$X_{n+1} = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_4 - X_3) + \text{etc.},$$

et l'on substituera, au lieu de X_{n+1}, le second membre de cette équation, qui forme une série convergente, puisque les termes X_1, X_2, X_3, etc., sont supposés tendre vers l'égalité.

En prenant $x=0$, il vient

$$X_1 = A, \quad X_2 = B, \quad X_3 = C, \quad \text{etc.};$$

si l'on représente par D', D'', etc., ce que deviennent dans la même hypothèse les séries

$$\frac{d\{X_1+X_2+X_3+\text{etc.}\}}{dx}, \quad \frac{d^2\{X_1+X_2+X_3+\text{etc.}\}}{dx^2}, \quad \text{etc.},$$

que l'on écrive S_x au lieu de S, $S_{x+\omega}$ au lieu de S_ω, et qu'on pose ensuite $S_x=0$, lorsque $x=0$, afin de faire partir la formule de $\omega=0$, on aura

$$S_\omega = \{A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.}\}\omega - \frac{D'\omega}{1} - \frac{D''\omega^2}{1.2} - \frac{D'''\omega^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Il est visible que l'on peut changer ω en x dans cette dernière expression, qui, devenant par là

$$S_x = \{A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.}\}x - \frac{D'x}{1} - \frac{D''x^2}{1.2} - \frac{D'''x^3}{1.2.3} - \text{etc.},$$

donnera

$$\frac{dS_x}{dx} = \begin{cases} A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.} \\ -D' - \frac{D''x}{1} - \frac{D'''x^2}{1.2} - \text{etc.}, \end{cases}$$

$$\frac{d^2S_x}{dx^2} = \qquad -D'' - \frac{D'''x}{1} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^3S_x}{dx^3} = \qquad -D''' - \text{etc.},$$

etc.

1019. La méthode précédente s'étend au cas où les différences d'un ordre quelconque des termes de la série A, B, C, D, ... X, tendent sans cesse vers l'égalité; et l'application que nous allons en faire, au cas où les différences premières de X deviennent constantes, suffira pour montrer comment on doit se conduire dans tous les autres.

Désignons trois sommes successives par S_n, S_{n+1}, S_{n+2};
leurs différences premières seront X_{n+1}, X_{n+2},
leur différence seconde sera donc $X_{n+2} - X_{n+1}$,

et l'on aura, par la formule du n° 882,

$$S_{x+\omega} = S_x + \omega X_{x+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{x+2} - X_{x+1});$$

mettant dans cette équation, au lieu de $S_{x+\omega}$ et de S_x, leurs développemens respectifs, on obtiendra la suivante :

$$\begin{aligned} &S_\omega + X_{\omega+1} + X_{\omega+2} + X_{\omega+3} \ldots + X_{\omega+x} \\ &= S + X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots + X_x + \omega X_{x+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{x+2} - X_{x+1}), \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} S_\omega = S &+ (X_1 - X_{\omega+1}) + (X_2 - X_{\omega+2}) \ldots\ldots + (X_x - X_{\omega+x}) \\ &+ \omega X_{x+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{x+2} - X_{x+1}). \end{aligned}$$

Les quantités X_{x+1} et $X_{x+2} - X_{x+1}$ étant équivalentes aux séries

$$\begin{gathered} X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \text{etc.}, \\ (X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.}, \end{gathered}$$

on pourra donner à l'expression de S_ω cette forme :

$$\begin{aligned} S_\omega = S &+ (X_1 - X_{\omega+1}) + (X_2 - X_{\omega+2}) + (X_3 - X_{\omega+3}) + \text{etc.} \\ &+ \frac{\omega}{1}\{X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \text{etc.}\} \\ &+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\{(X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.}\}; \end{aligned}$$

et en l'ordonnant par rapport aux puissances de ω, on en déduira, de même que ci-dessus, les coefficiens différentiels de la fonction S.

Le théorème de Taylor fournit encore ici le moyen de chasser $X_{\omega+1}$, $X_{\omega+2}$, etc., en substituant à ces quantités les séries

$$\begin{aligned} &X_1 + \frac{dX_1}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \\ &X_2 + \frac{dX_2}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_2}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_2}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

et on aura ensuite

$$S_\omega = S + \omega\{X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \text{etc.}\}$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{2}\{(X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.}\}$$
$$- \frac{\omega}{1}\,\frac{d\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx}$$
$$- \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx^2}$$
$$- \frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx^3}$$
$$- \text{etc.}$$

Si les termes de la série A, B, C, D,...X, tendent à s'évanouir, on pourra effacer de l'expression précédente les séries qui multiplient ω et $\frac{\omega(\omega-1)}{2}$, dans la première et dans la seconde ligne; mais on ne supprimera que la seconde seulement, si ce sont les différences premières qui s'évanouissent, et dans ce cas on retombera sur l'expression complète du numéro précédent. La comparaison de cette dernière, avec celle que nous venons d'obtenir, fera voir évidemment comment doit être composée la valeur de S_ω pour un ordre quelconque de différences constantes.

Il est bon de remarquer que si l'on change S en S_x, S_ω en $S_{x+\omega}$, comme dans le numéro précédent, on passera de $S_{x+\omega}$ à S_ω, et par suite à S_x, en écrivant dans les deux premières lignes, A, B, C, D, etc., à la place des quantités X_1, X_2, X_3, X_4, etc., et D', D'', D''', etc., à celle des coefficiens différentiels qui multiplient respectivement $\frac{\omega}{1}$, $\frac{\omega^2}{1.2}$, $\frac{\omega^3}{1.2.3}$, etc. dans les suivantes.

1020. Ce qui précède s'applique, par le moyen des logarithmes, aux fonctions de la forme

$$S = ABCD\ldots.X;$$

car l'équation

$$lS = lA + lB + lC + lD\ldots.+ lX,$$

conduit à

$$lS_\omega = lS + lX_1 - lX_{\omega+1} + lX_2 - lX_{\omega+2} + lX_3 - lX_{\omega+3} + \text{etc.},$$

en supposant que les logarithmes lX, lX_1, lX_2, etc., tendent à s'évanouir; et repassant aux nombres, il vient

$$S_\omega = S\,\frac{X_1}{X_{\omega+1}}\cdot\frac{X_2}{X_{\omega+2}}\cdot\frac{X_3}{X_{\omega+3}}\cdot\frac{X_4}{X_{\omega+4}}\cdot\text{etc.}$$

Il est visible que cette hypothèse répond au cas où les valeurs X_1, X_2, etc., tendent vers l'unité.

Dans le cas où les valeurs X_1, X_2, etc., tendraient vers l'égalité, ce seraient les différences premières des logarithmes qui tendraient à s'évanouir; il faudrait alors ajouter à l'expression précédente de lS_ω, la série

$$\omega\{lX_1+(lX_2-lX_1)+(lX_3-lX_2)+(lX_4-lX_3)+\text{etc.}\},$$

qui revient à

$$\omega\left\{lX_1+l\frac{X_2}{X_1}+l\frac{X_3}{X_2}+l\frac{X_4}{X_3}+\text{etc.}\right\},$$

et donnerait, en passant aux nombres, le produit indéfini

$$X_1^\omega.\frac{X_2^\omega}{X_1^\omega}.\frac{X_3^\omega}{X_2^\omega}.\frac{X_4^\omega}{X_3^\omega}.\text{etc.};$$

d'où il résulterait

$$S_\omega=SX_{1\omega}.\frac{X_2{}^\omega X_1{}^{1-\omega}}{X_{\omega+1}}.\frac{X_3{}^\omega X_2{}^{1-\omega}}{X_{\omega+2}}.\frac{X_4{}^\omega X_3{}^{1-\omega}}{X_{\omega+3}}.\text{etc.}$$

L'équation

$$lS_\omega=lS+lX_1-lX_{\omega+1}+lX_2-lX_{\omega+2}+lX_3-lX_{\omega+3}+\text{etc.}$$

se transforme, comme celle du n° 1017, par le moyen des coefficiens différentiels, en mettant pour $lX_{\omega+1}$, etc., les séries

$$lX_1+\frac{dlX_1}{dx}\frac{\omega}{1}+\frac{d^2lX_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2}+\frac{d^3lX_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

etc.,

et donne

$$\begin{aligned}lS_\omega-lS=&-\frac{\omega}{1}\,\frac{d\{lX_1+lX_2+lX_3+\text{etc.}\}}{dx}\\&-\frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2\{lX_1+lX_2+lX_3+\text{etc}\}}{dx^2}\\&-\frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\{lX_1+lX_2+lX_3+\text{etc.}\}}{dx^3}\\&-\text{etc.},\end{aligned}$$

résultat duquel on déduira les coefficiens différentiels de S, en observant que

$$lS_\omega-lS=\frac{dlS}{dx}\frac{\omega}{1}+\frac{d^2lS}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2}+\frac{d^3lS}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on peut faire partir de $x=0$, les quantités S, X_1, X_2, etc.; ce qui a été dit à cet

égard dans le n° 1018, suffit pour quelque formule que ce soit; il ne serait pas plus difficile de donner au cas qui nous occupe toute l'extension de celui du numéro précédent : il ne nous reste donc qu'à faire quelques applications.

1021. Soit $S = 1.2.3.4\ldots x = [\overset{x}{x}]$. Dans cet exemple, les logarithmes des facteurs tendent sans cesse à devenir égaux, et leurs différences premières à s'évanouir; car on a

$$\mathrm{l}(n+1) - \mathrm{l}n = \mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.},$$

équation dont le second membre tend sans cesse vers 0, à mesure que n augmente : il faudra pour cette raison ajouter au développement de $\mathrm{l}S_\omega - \mathrm{l}S$, rapporté plus haut, la série

$$\omega\{\mathrm{l}X_1 + (\mathrm{l}X_2 - \mathrm{l}X_1) + (\mathrm{l}X_3 - \mathrm{l}X_2) + (\mathrm{l}X_4 - \mathrm{l}X_3) + \text{etc.}\}\ (1020).$$

Substituant, au lieu de $\mathrm{l}X_1$, $\mathrm{d}\,\mathrm{l}X_1$, $\mathrm{d}^2\mathrm{l}X_1$, etc., leurs valeurs $\mathrm{l}(x+1)$, $\frac{dx}{x+1}$, $-\frac{dx^2}{(x+1)^2}$, etc., on trouvera

$$\begin{aligned}\mathrm{l}S_\omega - \mathrm{l}S = &+\omega\left\{\mathrm{l}(x+1) + \mathrm{l}\frac{x+2}{x+1} + \mathrm{l}\frac{x+3}{x+2} + \mathrm{l}\frac{x+4}{x+3} + \text{etc.}\right\}\\ &-\frac{\omega}{1}\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \text{etc.}\right\}\\ &+\frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{etc.}\right\}\\ &-\frac{\omega^3}{3}\left\{\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{etc.}\right\}\\ &+\text{etc.},\end{aligned}$$

résultat dans lequel on pourra, si l'on veut, convertir en séries les quantités $\mathrm{l}\frac{x+2}{x+1}$, $\mathrm{l}\frac{x+3}{x+2}$, etc.

Si l'on fait $x = 0$, ce qui donnera $S = [\overset{\circ}{0}] = 1$ (982), et qu'on change ensuite ω en x, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{l}S_x = \mathrm{l}[\overset{x}{x}] = &+x\left\{\mathrm{l}\frac{2}{1} + \mathrm{l}\frac{3}{2} + \mathrm{l}\frac{4}{3} + \mathrm{l}\frac{5}{4} + \text{etc.}\right\}\\ &-\frac{x}{1}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\right\}\\ &+\frac{x^2}{2}\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right\}\\ &-\frac{x^3}{3}\left\{1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right\}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

Les deux séries qui multiplient la première puissance de x, n'ont chacune pour limite que l'infini, mais leur différence a une valeur finie. La première, poussée jusqu'au $n^{ième}$ terme, se réduit à $\mathrm{l}(n+1)$; et quant à la seconde, on a, par le n° 1002,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{n}=C+\mathrm{l}n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1}{2n^2}+\text{ etc.};$$

soustrayant le dernier membre de cette équation, de $\mathrm{l}(n+1)$, on aura pour la différence des séries proposées,

$$\mathrm{l}(n+1)-\mathrm{l}n-C-\frac{1}{2n}+\frac{B_1}{2n^2}-\text{ etc.},$$

quantité dont la limite est $-C$, en supposant n infini; or........ $C=0{,}5772156649015328$ (1000) : il viendra donc

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\,[x]^{x} = &-x.0{,}5772156649015328\\ &+\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ etc.}\right)\\ &-\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{ etc.}\right)\\ &+\frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ etc.}\right)\\ &-\text{ etc.};\end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned}\mathrm{dl}\,[x]^{x} = \frac{\mathrm{d}[x]^{x}}{[x]^{x}} = &-\mathrm{d}x.0{,}5772156649015328\\ &+\ x\mathrm{d}x\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ etc.}\right)\\ &-x^2\mathrm{d}x\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{ etc.}\right)\\ &+x^3\mathrm{d}x\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ etc.}\right)\\ &-\text{ etc.}\end{aligned}$$

Toutes les séries de cette équation peuvent se réunir en une seule, si l'on observe que

$$\begin{aligned}&x-x^2+x^3-x^4+\text{ etc.}=\frac{x}{1+x},\\ &\frac{x}{2^2}-\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}-\frac{x^4}{2^5}+\text{ etc.}=\frac{x}{2(2+x)},\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

et il viendra ensuite

$$\frac{d[x]^{x}}{[x]^{x}} = - dx.0,5772156649015328$$
$$+ dx\left\{\frac{1}{1(1+x)} + \frac{1}{2(2+x)} + \frac{1}{3(3+x)} + \frac{1}{4(4+x)} + \text{etc.}\right\}.$$

1022. Pouvant ainsi trouver ce que devient la fonction S, lorsque x se change en $x+\omega$, on obtiendra sans peine la vraie valeur des expressions composées de ces fonctions, et qui se présentent sous la forme de $\frac{0}{0}$: telle est

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(2x-1)},$$

lorsqu'on y fait $x=1$.

Si l'on pose $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{x}=S$, qu'on fasse subir à la troisième expression de S_{ω}, rapportée sur la page 165, le changement d'indice et d'origine, indiqué sur la page 167, et qu'on écrive ensuite S pour S_{x}, on aura

$$\begin{aligned} S = x&\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)\\ -x^2&\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)\\ +x^3&\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)\\ -\text{etc.}&, \end{aligned}$$

ce qu'il est facile de convertir en

$$\begin{aligned} S &= \left.\begin{aligned} &1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}\\ &-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\text{etc.}\end{aligned}\right\}\\ &= 1+\frac{x-1}{2(1+x)}+\frac{x-1}{3(2+x)}+\frac{x-1}{4(3+x)}+\text{etc.} \end{aligned}$$

La substitution de $1+\omega$, à la place de x, dans ce dernier résultat, donnera

$$S_{\omega} = 1+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+\text{etc.},$$

ou

$$S_{\omega} = 1 + D_1\omega + D_2\omega^2 + D_3\omega^3 + \text{etc.},$$

en développant par rapport aux puissances de ω; par ces opérations, la fonction proposée deviendra

$$\frac{1+D_1\omega+D_2\omega^2+D_3\omega^3+\text{etc.}}{\omega(1+\omega)}-\frac{1}{\omega(1+2\omega)}$$
$$=\frac{(1+2\omega)(1+D_1\omega+D_2\omega^2+D_3\omega^3+\text{etc.})-(1+\omega)}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)}$$
$$=\frac{D_1\omega+D_2\omega^2+\text{etc.}+\omega+2\omega(D_1\omega+D_2\omega^2+\text{etc.})}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)};$$

divisant enfin les deux termes de cette fraction par ω, et supposant ensuite $\omega=0$, on aura D_1+1 pour la vraie valeur de la fonction proposée, dans le cas où $x=1$; or il est facile de voir que....... $D_1=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}$, et que par conséquent

$$D_1+1=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{6}\ (1005).$$

1023. Venons maintenant à quelques exemples d'interpolation : soit la suite

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+b},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b},\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\ldots\ldots+\frac{1}{a+(x-1)b}.$$

En désignant par S le terme général de cette suite, on aura

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\ldots\ldots+\frac{1}{a+(x-1)b};$$

et comme les parties qui le composent tendent à s'évanouir, on trouvera, par le n° 1017,

$$X_1=\frac{1}{a+bx},\qquad X_{\omega+1}=\frac{1}{a+bx+b\omega},$$
$$X_2=\frac{1}{a+b+bx},\qquad X_{\omega+2}=\frac{1}{a+b+bx+b\omega},$$

etc.,

$$S_\omega=S+\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a+b+bx}+\frac{1}{a+2b+bx}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{a+bx+b\omega}-\frac{1}{a+b+bx+b\omega}-\frac{1}{a+2b+bx+b\omega}-\text{etc.},$$

ou bien

$$S_\omega = S + b\omega\left\{\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{(a+b+bx)^2}+\frac{1}{(a+2b+bx)^2}+\text{etc.}\right\}$$
$$-b^2\omega^2\left\{\frac{1}{(a+bx)^3}+\frac{1}{(a+b+bx)^3}+\frac{1}{(a+2b+bx)^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$+b^3\omega^3\left\{\frac{1}{(a+bx)^4}+\frac{1}{(a+b+bx)^4}+\frac{1}{(a+2b+bx)^4}+\text{etc.}\right\}$$
$$-\text{etc.},$$

en employant la valeur de S_ω, exprimée par les coefficiens différentiels.

Appliquons ces formules à la série

$$1,\quad 1+\tfrac{1}{2},\quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4},\quad \text{etc.};$$

nous aurons

$$a=1,\quad b=1,\quad S=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots\ldots+\tfrac{1}{x},$$

$$S_\omega = S+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}+\frac{1}{4+x}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{1+x+\omega}-\frac{1}{2+x+\omega}-\frac{1}{3+x+\omega}-\frac{1}{4+x+\omega}-\text{etc.}$$

Il est évident, par la forme de la série, que si T désigne le terme qui répond à l'indice fractionnaire ω, les termes T_1, T_2, etc., correspondans aux indices $1+\omega$, $2+\omega$, etc., seront

$$T+\frac{1}{1+\omega},\quad T+\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{2+\omega},\qquad \text{etc.};$$

or, en faisant $x=0$, dans S_ω, on aura $S=0$, et

$$T = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{3+\omega}-\frac{1}{4+\omega}-\frac{1}{5+\omega}-\text{etc.},$$

et l'expression de S_ω, rapportée au commencement de cette page, deviendra, par les mêmes hypothèses,

$$T = +\omega\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

Lorsque $\omega=\frac{1}{2}$, il vient, par la première de ces valeurs de T,

$$T = 1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9}+\text{etc.}$$
$$=2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{9}+\text{etc.}\right);$$

et comme

$$l2=l(1+1)= 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\text{etc.},$$

il est visible que $T=2-2l2$; on a donc dans ce cas T sous une forme finie, de laquelle il résulte qu'aux indices

$$\tfrac{1}{2},\qquad \tfrac{3}{2},\qquad \tfrac{5}{2},\qquad \text{etc.},$$

répondent les termes

$$2-2l2,\quad 2+\tfrac{2}{3}-2l2,\quad 2+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-2l2,\quad \text{etc.}$$

Prenons pour second exemple la série

$$1,\quad 1+\frac{1}{2^n},\quad 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n},\quad 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n},\quad \text{etc.},$$

nous aurons $X=\frac{1}{x^n}$, $X_\omega=\frac{1}{(x+\omega)^n}$; et en faisant $x=0$, il viendra, pour le terme correspondant à l'indice ω,

$$S_\omega= 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{(1+\omega)^n}-\frac{1}{(2+\omega)^n}-\frac{1}{(3+\omega)^n}-\frac{1}{(4+\omega)^n}-\text{etc.}$$

Si l'on prend $\omega=\frac{1}{2}$, on trouvera

$$S_{\frac{1}{2}}= 1-\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{2^n}{5^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{2^n}{7^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{2^n}{9^n}+\text{etc.},$$

ce qui revient à

$$S_{\frac{1}{2}}=2^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}+\text{etc.}\right);$$

et si l'on représente par Δ la série

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\text{etc.},$$

on obtiendra $S_{\frac{1}{2}} = 2^n - 2^n A$, d'où l'on conclura, pour les indices

$$\tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{3}{2}, \qquad \tfrac{5}{2}, \qquad \text{etc.},$$

les termes

$$2^n - 2^n A, \quad 2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n A, \quad 2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n A, \quad \text{etc.}$$

1024. Occupons-nous encore de quelques séries de la forme

$$A, \quad AB, \quad ABC, \quad ABCD, \quad \text{etc.},$$

et prenons pour premier cas particulier la suivante :

$$\frac{a}{b}, \ \frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c}, \ \frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c}\cdot\frac{a+2c}{b+2c}, \ldots \frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c}\cdots\frac{a+(x-1)c}{b+(x-1)c}.$$

S devenant 1, quand $x = 0$ (982), nous aurons, par le n° 1020,

$$S_\omega = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)}\cdot\frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)}\cdot\frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(a+2c+c\omega)}.\text{etc.},$$

en supposant que les logarithmes des facteurs tendent à s'évanouir, et en faisant $x = 0$, dans X_1, X_2, X_3, etc., et dans $X_{\omega+1}$, $X_{\omega+2}$, etc.

Si l'on prend $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, on aura la série

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1.3}{2.4}, \quad \frac{1.3.5}{2.4.6}, \quad \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}, \quad \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}, \quad \text{etc.},$$

pour laquelle on trouvera

$$S_\omega = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)}\cdot\frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)}\cdot\frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)}\cdot\frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)}\cdot\text{etc.};$$

et les termes qui répondent aux indices $\omega+1$, $\omega+2$, etc., seront nécessairement

$$S_{\omega+1} = \frac{1+2\omega}{2+2\omega}S_\omega,$$

$$S_{\omega+2} = \frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}S_\omega,$$

$$S_{\omega+3} = \frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}\cdot\frac{5+2\omega}{6+2\omega}S_\omega;$$

etc.,

Soit $\omega = \frac{1}{2}$; il viendra

$$S_\omega = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \text{etc.};$$

résultat qui se change en $\frac{2}{\pi}$, d'après l'expression

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{10.10}{9.11} \cdot \text{etc.},$$

obtenue dans le n° 989; on aura donc pour les indices

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \quad \text{etc.},$$

les termes

$$\frac{2}{\pi}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}, \quad \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{2}{\pi}, \quad \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdot \frac{2}{\pi}, \quad \text{etc.}$$

Proposons-nous encore la série

$$a, \quad a(a+b), \quad a(a+b)(a+2b), \ldots a(a+b) \ldots [a+(x-1)b], \quad \text{etc.};$$

dans laquelle ce sont les différences des logarithmes qui tendent à s'évanouir; la seconde formule du n° 1020, nous donnera pour ce cas,

$$S_\omega = a^\omega \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^\omega}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^\omega}{a+b+b\omega} \cdot \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^\omega}{a+2b+b\omega}, \text{etc.},$$

d'où nous conclurons ensuite

$$S_{\omega+1} = (a+b\omega)S_\omega,$$
$$S_{\omega+2} = (a+b\omega)(a+b+b\omega)S_\omega,$$
$$S_{\omega+3} = (a+b\omega)(a+b+b\omega)(a+2b+b\omega)S_\omega,$$
etc.

Soit pour exemple, $a = 1$, $b = 1$, ou

$$1, \quad 1.2, \quad 1.2.3, \quad 1.2.3.4, \quad \text{etc.},$$

et faisons $\omega = \frac{1}{2}$; nous obtiendrons

$$S_{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}4^{\frac{1}{2}}}{3+\frac{1}{2}} \cdot \frac{4^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}}{4+\frac{1}{2}} \cdot \text{etc.};$$

passant aux quarrés, nous aurons

$$S^2_{\frac{1}{2}} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \text{etc.}$$

En rapprochant cette expression de celle de $\frac{\pi}{2}$, on verra que $S^{\circ}_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$, d'où on conclura qu'aux indices

$$\tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{3}{2}, \qquad \tfrac{5}{2}, \qquad \tfrac{7}{2}, \qquad \text{etc.},$$

répondent les termes

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{3.5}{2.2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{3.5.7}{2.2.2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{etc.},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans le n° 989.

Formules pour obtenir les valeurs approchées des intégrales aux différentielles.

1025. Le calcul direct et inverse des différences s'applique utilement à l'évaluation numérique des intégrales définies aux différentielles, ou, ce qui est la même chose, à la quadrature des courbes; et il en résulte les formules annoncées à la fin du n° 476, parmi lesquelles se trouve celle qui a été obtenue dans le n° 967. La première idée qui se présente sur ce sujet, est de substituer à la courbe proposée une courbe parabolique passant par un nombre plus ou moins considérable de points de la première, et déterminée par les formules du n° 898.

En prenant d'abord la seconde formule, plus commode que la première pour l'intégration, on trouve

$$\int u_x dx = u\frac{x}{1} + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^4}{4} \ldots\ldots + \frac{\nu x^{n+1}}{n+1} + const.,$$

résultat où les coefficiens α, β, γ, ... ν, ne dépendent que des valeurs successives de u_x, et peuvent s'exprimer par les différences, en comparant ensemble les deux valeurs de cette fonction, rapportées dans le numéro cité, après avoir, dans la première, développé les factorielles suivant les puissances de x.

Si l'on désigne par $A_m^{(n-1)}$ la somme des produits des nombres -1, -2, -3, ... $-(n-1)$, combinés m à m (985), on aura

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) = x^n + A_1^{(n-1)}x^{n-1} + A_2^{(n-1)}x^{n-2}\ldots + A_{n-1}^{(n-1)}x;$$

et avec cette notation, on trouvera

$$\alpha = \frac{\Delta u}{1} + \frac{A_1^{(1)}\Delta^2 u}{1.2} + \frac{A_2^{(2)}\Delta^3 u}{1.2.3} + \frac{A_3^{(3)}\Delta^4 u}{1.2.3.4}\ldots + \frac{A_{n-1}^{(n-1)}\Delta^n u}{1.2.3\ldots n};$$

$$\beta = \frac{\Delta^2 u}{1.2} + \frac{A_1^{(2)}\Delta^3 u}{1.2.3} + \frac{A_2^{(3)}\Delta^4 u}{1.2.3.4}\ldots + \frac{A_{n-2}^{(n-1)}\Delta^n u}{1.2.3\ldots n};$$

$$\gamma = \frac{\Delta^3 u}{1.2.3} + \frac{A_1^{(1)}\Delta^4 u}{1.2.3.4} \ldots + \frac{A_{n-1}^{(n-1)}\Delta^n u}{1.2.3\ldots n}$$

....

$$\nu = \frac{\Delta^n u}{1.2.3\ldots n} \text{ (*)}.$$

1026. Comme c'est presque toujours du décroissement des différences Δu, $\Delta^2 u$, etc., que la formule ci-dessus tire sa convergence, il est plus simple de l'ordonner suivant ces quantités, que suivant les puissances de la variable x, ce que l'on peut faire aisément, au moyen des équations précédentes, ou bien en mettant d'abord la première expression de u_x sous la forme

$$u_x = u + x\frac{\Delta u}{1} + \left\{x^2 + A_1^{(1)}x\right\}\frac{\Delta^2 u}{1.2} + \left\{x^3 + A_1^{(2)}x^2 + A_2^{(2)}x\right\}\frac{\Delta^3 u}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \left\{x^n + A_1^{(n-1)}x^{n-1} + A_2^{(n-1)}x^{n-2} \ldots + A_{(n-1)}^{(n-1)}x\right\}\frac{\Delta^n u}{1.2.3\ldots n},$$

d'où l'on conclut

$$\int u_x \mathrm{d}x = \frac{x}{1}u + \frac{x^2}{2}\frac{\Delta u}{1} + \left\{\frac{x^3}{3} + \frac{A_1^{(1)}x^2}{2}\right\}\frac{\Delta^2 u}{1.2} + \left\{\frac{x^4}{4} + \frac{A_1^{(2)}x^3}{3} + \frac{A_2^{(2)}x^2}{2}\right\}\frac{\Delta^3 u}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left\{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{A_1^{(n-1)}x^n}{n} + \frac{A_2^{(n-1)}x^{n-1}}{n-1} \ldots + \frac{A_{n-1}^{(n-1)}x^2}{2}\right\}\frac{\Delta^n u}{1.2.3\ldots n}$$

$$+ \mathit{const.},$$

expression dont la loi est bien évidente.

(*) On pourrait obtenir aussi des relations entre les coefficiens α, β, ..., ν, et les nombres $\Delta^n.0^i$ (932); car en prenant les différences successives de

$$u_x = u + \alpha x + \beta x^2 \ldots\ldots + \mu x^{n-1} + \nu x^n,$$

et faisant ensuite $x = 0$, il viendra

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \alpha\Delta.0 + \beta\Delta.0^2 \ldots + \mu\Delta.0^{n-1} + \nu\Delta.0^n, \\
\Delta^2 u &= \beta\Delta^2.0^2 \ldots + \mu\Delta^2.0^{n-1} + \nu\Delta^2.0^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^{n-1}u &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mu\Delta^{n-1}.0^{n-1} + \nu\Delta^{n-1}.0^n, \\
\Delta^n u &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \nu\Delta^n.0^n,
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera aisément les valeurs des coefficiens α, β, ... μ, ν, en commençant par le dernier.

Il reste maintenant à considérer les limites entre lesquelles doit être prise l'intégrale précédente. L'expression de u_x que nous venons d'employer, suppose que ses valeurs successives sont équidistantes, et que la différence de x est égale à l'unité. Cette dernière condition peut toujours être remplie; car si la différence de x était h, il suffirait de prendre ce nombre pour l'unité de tous les autres. Cela posé, la courbe dont l'ordonnée est u_x étant assujétie à passer par $n+1$ points de la courbe proposée, on peut prendre l'intégrale indiquée ci-dessus, depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$. On voit d'abord que la constante est nulle et qu'il suffit de changer x en n pour avoir l'intégrale complète.

1027. Si l'on faisait, par exemple, $n=2$, on aurait

$$u_x = u + x\frac{\Delta u}{1} + x(x-1)\frac{\Delta^2 u}{1.2},$$

$$\int u_x \mathrm{d}x = 2u + 2\Delta u + \left(\tfrac{8}{3}-2\right)\frac{\Delta^2 u}{2} = 2\left(u+\Delta u+\tfrac{1}{6}\Delta^2 u\right);$$

u_x serait l'ordonnée d'une parabole QR, *fig.* 2, passant par trois points FIG. 2.
de la courbe proposée DE, et $\int u_x \mathrm{d}x$, l'aire du segment de cette parabole, compris entre la première ordonnée PM et la troisième P_2M_2.

En général, cette parabole QR sera alternativement intérieure et extérieure à la courbe proposée, ou *vice versâ;* en sorte que l'aire de son segment différera, dans une partie par défaut, et dans l'autre par excès, de l'aire du segment correspondant de la courbe proposée DE; et alors il pourra s'opérer dans le résultat total, une compensation plus ou moins approchée entre ces différences.

La formule précédente devient plus symétrique, quand on remplace les différences Δu et $\Delta^2 u$ par leurs valeurs

$$u_1 - u \quad \text{et} \quad u_2 - 2u_1 + u;$$

on obtient, après les réductions,

$$\int u_x \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}(u+4u_1+u_2).$$

Si l'on conçoit de même qu'il passe une nouvelle parabole par les points M_2, M_3, M_4, et ainsi de suite, et que l'on réunisse les aires de chacun de leurs segmens, on pourra embrasser une portion aussi grande que l'on voudra de la courbe proposée; et si la dernière ordonnée est représentée par u_m, m étant un nombre pair, on aura

$$\tfrac{1}{3}(u + 4u_1 + u_2) + \tfrac{1}{3}(u_2 + 4u_3 + u_4)\ldots + \tfrac{1}{3}(u_{m-2} + 4u_{m-1} + u_m)$$
$$= \tfrac{1}{3}(u + u_m) + \tfrac{2}{3}(u_2 + u_4 \ldots + u_{m-2}) + \tfrac{4}{3}(u_1 + u_3 \ldots + u_{m-1}),$$

résultat d'une forme assez élégante, et qui, ne comprenant que des lignes qu'on peut mesurer sur la figure, n'exige pas que l'on connaisse l'équation de la courbe *DE*.

On construirait aisément des formules où l'on embrasserait quatre, cinq, etc. ordonnées; mais il faut surtout resserrer les intervalles de ces ordonnées, afin de rapprocher le plus qu'il est possible, de la courbe proposée, les paraboles que l'on emploie, et d'éviter par ce FIG. 1. moyen les serpentemens indiqués sur la figure première (898). Pour cela, on doit calculer à part chaque portion comprise entre deux points singuliers, et multiplier davantage les ordonnées, dans celles où la variation de courbure est plus considérable.

1028. On pourrait aussi ne prendre l'intégrale $\int u_x dx$ que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$: alors on ne calculerait à chaque opération partielle, qu'un segment, soit intérieur, soit extérieur à la courbe proposée, ce qu'on reconnaîtrait facilement par la comparaison des ordonnées intermédiaires de la courbe proposée et de la parabole; et l'on prendrait pour une portion quelconque de la première courbe, une suite FIG. 3. de segmens PNP', $P'N'P''$, etc., *fig.* 3, dont la base serait égale à l'unité. C'est à cela que revient la formule donnée par M. Laplace, dans le tome IV de la *Mécanique céleste*, page 206.

En poussant le calcul des coefficiens de la dernière formule du n° 1026, jusqu'à $n = 6$, et faisant $x = 1$, la valeur générale de $\int u_x dx$ devient

$$u + \tfrac{1}{2}\Delta u - \tfrac{1}{12}\Delta^2 u + \tfrac{1}{24}\Delta^3 u - \tfrac{19}{720}\Delta^4 u + \tfrac{3}{160}\Delta^5 u - \tfrac{863}{60480}\Delta^6 u,$$

pour le premier segment; si l'on y ajoute celles des deuxième, troisième, etc. segmens, qui se déduisent de la précédente, en augmentant l'indice de u de 1, 2, etc. unités, on aura, pour la somme de n segmens,

$$\left.\begin{aligned} & u + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} \\ & + \tfrac{1}{2}\{\Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1}\} \\ & - \tfrac{1}{12}\{\Delta^2 u + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}\right\};$$

et si l'on observe que

$$\Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} = u_n - u \quad (881),$$
$$\Delta^2 u + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u,$$

et ainsi du reste, on changera la somme précédente en

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}u + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2}u_n \\ - \frac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u) + \frac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u) \\ + \frac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u) \end{array}\right\},$$

formule assez simple, mais dans laquelle on emploie plus de n ordonnées, puisque Δu_n dépend de u_{n+1} et de u_n; $\Delta^2 u_n$, de u_{n+2}, u_{n+1}, u_n, et ainsi de suite.

On en obtient une autre, exempte de cet inconvénient, au moyen de la formule générale du n° 925, de laquelle, en faisant $r=1, =2, =3$, etc., on tire des valeurs de Δu_n, $\Delta^2 u_n$, $\Delta^3 u_n$, etc., qui, mises dans la somme précédente, donnent

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}u + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2}u_n \\ - \frac{1}{12}(\Delta u_{n-1} - \Delta u) - \frac{1}{24}(\Delta^2 u_{n-2} + \Delta^2 u) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_{n-3} - \Delta^3 u) \\ - \frac{3}{160}(\Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_{n-5} - \Delta^5 u) \end{array}\right\}.$$

Nous ferons observer que la première ligne de cette formule équivaut à $\Sigma u + \frac{1}{2}(u_n - u)$ (943).

Il est évident que toutes les formules d'interpolation, traitées comme celles du n° 898 l'ont été ci-dessus, peuvent servir à calculer les valeurs des intégrales, que la difficulté ne consiste qu'à choisir celles dont les variations s'accordent le mieux avec la marche de la fonction à intégrer, et qu'il y a lieu d'appliquer à ce sujet les remarques qui ont été faites par rapport à l'interpolation. C'est aussi à ce genre de formules qu'il faut rapporter celles qu'on trouve dans les tomes VI, VII et VIII des *Annales de Mathématiques pures et appliquées*.

1029. On tire du n° 967, en faisant $n=1$ et $h=1$,

$$\int u dx = \{l(1+\Delta)\}^{-1} u = \Sigma u + C_1 u + C_2 \Delta u + C_3 \Delta^2 u + \text{etc.},$$

C_1, C_2, C_3, etc., étant les coefficiens des puissances de Δ, dans le développement de

$$\{\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 + \text{etc.}\}^{-1};$$

et par ce moyen l'intégrale aux différentielles est ramenée à une intégrale aux différences, qui s'obtient en prenant la somme d'un nombre donné des valeurs successives de u.

Si, dans la première formule du n° 898, on change u, en Σu, on en tirera une expression au moyen de laquelle on chassera Σu de la valeur de $\int u\mathrm{d}x$; et en se servant de la notation de Vandermonde, il viendra

$$\int u\mathrm{d}x = (C + \overset{-1}{[0]}\overset{1}{[x]})u + (C_2 + \overset{-2}{[0]}\overset{2}{[x]})\Delta u + (C_3 + \overset{-3}{[0]}\overset{3}{[x]})\Delta^2 u$$
$$+ (C_4 + \overset{-4}{[0]}\overset{4}{[x]})\Delta^3 u + \text{etc.} + \textit{const.},$$

formule remarquée en premier lieu par Lorgna.

1030. On construit encore des formules où les différentielles sont combinées avec les sommes. Il s'en présente une de ce genre, lorsque l'on égale entre elles la deuxième et la troisième expression de Su, rapportées dans le n° 993; et si l'on en prend les lettres B alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$, comme on l'a indiqué dans le n° 1001, il viendra

$$\int u\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} (Sx^0 + \frac{1}{2})u - \frac{(Sx + \frac{1}{2}B_1)}{1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{(Sx^3 - \frac{1}{4}B_3)}{1.2.3}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} - \frac{(Sx^5 + \frac{1}{6}B_5)}{1.2.3.4.5}\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5} \\ \quad + \frac{Sx^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{Sx^4}{1.2.3.4}\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

1031. Dans les *Exercices de Calcul intégral* (page 308 du premier volume), M. Legendre a donné une formule où il fait entrer l'intégrale

$$\Sigma\, \mathrm{f}(x + \tfrac{1}{2}h) = \mathrm{f}(\tfrac{1}{2}h) + \mathrm{f}(\tfrac{3}{2}h) + \mathrm{f}(\tfrac{5}{2}h) \ldots\ldots + \mathrm{f}(x - \tfrac{1}{2}h),$$

$\mathrm{f}(x)$ étant ici ce que j'ai représenté par u, et la différence de la variable x demeurant toujours h. Il n'est pas difficile de voir que cela revient à prendre les ordonnées au milieu de l'intervalle des abscisses

$$0,\ h,\ 2h,\ 3h,\ \text{etc.},$$

au lieu de les prendre au commencement. Or si, dans la formule

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\mathrm{d}x - \frac{1}{2}u + A''\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h + \text{etc. (972)},$$

on change x en $x+\frac{1}{2}h$, et qu'on développe, en conséquence, par le théorème de Taylor, tous les termes du second membre, on verra que le terme $-\frac{1}{2}u$ doit disparaître, qu'on pourra poser

$$\Sigma\,\mathrm{f}(x+\tfrac{1}{2}h)=\frac{1}{h}\int u\mathrm{d}x+\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h+\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}h^2+\gamma\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}h^3+\text{etc.};$$

et par conséquent

$$\int u\mathrm{d}x=h\Sigma\,\mathrm{f}(x+\tfrac{1}{2}h)-\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h^2-\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}h^3-\gamma\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}h^4-\text{etc.}$$

Pour déterminer les coefficiens α, β, γ, etc., de cette dernière formule, M. Legendre fait aussi

$$u=e^x,\ \text{d'où}\ \Sigma e^{x+\frac{1}{2}h}=e^{\frac{1}{2}h}\Sigma e^x=\frac{e^{\frac{1}{2}h}e^x}{e^h-1}=\frac{e^x}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}}\ (955).$$

Au moyen de ces valeurs, l'expression précédente de $\int u\mathrm{d}x$ fournit une équation dont tous les termes sont divisibles par e^x, ce qui donne

$$1=\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}}-\alpha h^2-\beta h^3-\gamma h^4-\text{etc.},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}}=1+\alpha h^2+\beta h^3+\gamma h^4+\text{etc.};$$

mais par le développement de son dénominateur, le premier membre de cette dernière équation revient à

$$\frac{1}{1+\frac{h^2}{2.3.2^2}+\frac{h^4}{2.3.4.5.2^4}+\frac{h^6}{2.3.4.5.6.7.2^6}+\text{etc.}};$$

le second ne peut donc contenir que des puissances paires de h; et en lui donnant la forme

$$1-Ah^2+Bh^4-Ch^6+Dh^8-\text{etc.},$$

on trouve les équations

$$A=\frac{1}{2.3.2^2};$$
$$B=\frac{1}{2.3.2^2}A-\frac{1}{2.3.4.5.2^4};$$
$$C=\frac{1}{2.3.2^2}B-\frac{1}{2.3.4.5.2^4}A+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6};$$

etc.

M. Legendre donne aussi des expressions immédiates de ces coefficiens, par la limite des séries de la forme $1 + \frac{1}{2^{2m}} + \text{etc.}$; nous y parviendrons dans la suite, en cherchant les formules analogues pour les nombres de Bernoulli.

On a donc, d'après ce qui précède, la formule

$$\int u\,\mathrm{d}x = h\Sigma\,\mathrm{f}(x+\tfrac{1}{2}h) + A\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}(x)}{\mathrm{d}x}h^2 - B\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{f}(x)}{\mathrm{d}x^3}h^4 + C\frac{\mathrm{d}^5\mathrm{f}(x)}{\mathrm{d}x^5}h^6 - \text{etc.};$$

qu'il faut assujétir aux limites de l'intégrale cherchée, et dans laquelle M. Legendre conseille de prendre h assez petit pour qu'on puisse négliger le terme affecté de h^4 et les suivans.

Digression sur l'élimination dans les équations algébriques.

1032. On connaît les inconvéniens de l'élimination successive des inconnues entre plusieurs équations (*voyez* le *Complém. des Élém. d'Algèbre*). Pour les éviter, en faisant concourir de la même manière chacune des équations proposées à la formation de l'équation finale, Bezout a proposé un moyen que l'on trouve appliqué dans les élémens, aux équations du premier degré, et qui consiste à les multiplier par des facteurs indéterminés, puis à les ajouter entr'elles, et à égaler à zéro les quantités qui multiplient les inconnues que l'on veut faire disparaître.

Si l'on avait, par exemple, les trois équations

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f &= 0, \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' &= 0, \\ a''x^2 + b''y^2 + c''xy + d''x + e''y + f'' &= 0, \end{aligned}$$

et qu'on les multipliât respectivement par trois polynomes de leur degré, savoir, par

$$\begin{aligned} &Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F, \\ &A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F', \\ &A''x^2 + B''y^2 + C''xy + D''x + E''y + F'', \end{aligned}$$

en réunissant les produits, qui seraient du quatrième degré, et en les ordonnant par rapport à x et y, on aurait une *équation-somme*, qui contiendrait quinze termes, respectivement affectés de

$$\begin{array}{lllll} x^4, & x^3, & x^2, & x, & x^0, \\ & x^3y, & x^2y, & xy, & y, \\ & & x^2y^2, & xy^2, & y^2, \\ & & & xy^3, & y^3, \\ & & & & y^4; \end{array}$$

mais comme on aurait introduit dix-huit coefficiens indéterminés, on pourrait égaler à zéro les coefficiens des quatorze termes qui contiennent x et y, et ne conserver que celui qui en est indépendant ou qui est multiplié par x^0 : on obtiendrait ainsi l'équation

$$Ff + F'f' + F''f'' = 0.$$

Il est facile de voir que les coefficiens $A, B, \ldots A', B', \ldots A'', B'', \ldots$ se détermineraient par des équations du premier degré; mais leur nombre total étant 18, il en resterait quatre d'arbitraires.

Pour appliquer cette méthode à des équations plus élevées, ou qui soient en plus grand nombre, il faut avoir préalablement résolu les questions suivantes, 1°. *déterminer quel est le nombre des termes que doit renfermer un polynome complet d'un degré quelconque et comprenant un nombre quelconque d'inconnues;* 2°. *déterminer parmi ces termes le nombre de ceux qui contiennent telle de ces inconnues que l'on voudra, et le nombre de ceux où elle n'entre pas;* car ce n'est que d'après la solution de ces questions, qu'on pourra prévoir à quel degré doit monter l'équation finale, choisir en conséquence les polynomes qui doivent multiplier les équations proposées, et s'assurer qu'ils contiendront un nombre de coefficiens indéterminés suffisant pour qu'il soit permis d'égaler à zéro tous les termes dans lesquels entrent les inconnues que l'on veut éliminer.

1033. Occupons-nous d'abord de la première question. Lorsque le polynome ne renferme qu'une inconnue, il est visible que son degré étant désigné par m, le nombre des termes qui le composent, s'il est complet, sera $m+1$, car il contiendra les termes

$$t^m, \quad t^{m-1}, \quad t^{m-2}, \quad t^{m-3} \ldots t, \quad t^0;$$

et si l'on rend ces termes homogènes par l'introduction d'une nouvelle inconnue u, on aura précisément tous ceux qui composent la puissance m du binome $t+u$, dont le nombre est encore $m+1$. Réciproquement, si l'on fait $u=1$, on reviendra de la puissance du binome $t+u$ au polynome à une seule inconnue; on passera de la même manière, de $(t+u+x)^m$, au polynome complet à deux inconnues t et u, en faisant $x=1$: il suffit donc de trouver le nombre des termes que doit contenir $(t+u+x)^m$. Or, en mettant cette expression sous la forme $\{(t+u)+x\}^m$, et en la développant seulement par rapport à x, on obtient $m+1$ termes dont l'expression générale sera affectée de $(t+u)^{m-n}x^n$. Si maintenant on développe la puissance du binome $t+u$, elle four-

nira $m-n+1$ termes, d'où il suit que le nombre total de ceux du polynome proposé sera la somme de la quantité $m-n+1$, prise en faisant varier n depuis o jusqu'à m, c'est-à-dire la somme de la série

$$m+1, \quad m, \quad m-1, \quad m-2, \ldots\ldots 1,$$

dont le terme général est $[m+1]^{1}$, et qui revient à $\frac{1}{1.2}[m+2]^{2}$, ou à... $\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}$ (991).

En mettant le quadrinome $(t+u+x+y)^m$ sous la forme...... $\{(t+u+x)+y\}^m$, et en le développant par rapport à y seulement, on trouvera $m+1$ termes dont l'expression générale sera affectée de $(t+u+x)^{m-p}y^p$; et le développement de la puissance du trinome en fournira, d'après ce qui précède, un nombre $\frac{(m-p+2)(m-p+1)}{1.2}$. La somme de cette expression, prise depuis $p=0$ jusqu'à $p=m$, c'est-à-dire celle de $\frac{1}{1.2}[m+2]^{2}$, donnera le nombre des termes contenus dans le développement de la puissance m du quadrinome, ou dans le polynome complet à trois inconnues : on aura donc, pour ce nombre de termes, $\frac{1}{1.2.3}[m+3]^{3}$, ou $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3}$.

De même, puisque le terme $(t+u+x+y)^{m-q}z^q$ du développement de $\{(t+u+x+y)+z\}^m$, en fournit $\frac{(m-q+3)(m-q+2)(m-q+1)}{1.2.3}$, et que la somme de cette expression, prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=m$, revient à celle de $\frac{1}{1.2.3}[m+3]^{3}$, on aura $\frac{1}{1.2.3.4}[m+4]^{4}$, ou...... $\frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3.4}$, pour le nombre de termes du développement de la puissance m du quintinome, ou celui des termes du polynome complet à quatre inconnues.

En général, le développement de la puissance m du polynome formé de $\mu+1$ termes $t, u, x, y, z, \ldots$ en contiendra un nombre exprimé par

$\frac{[m+\mu]^{\mu}}{1.2.3\ldots\mu}$, ou par

$$\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)(m+\mu-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots\mu},$$

et ce nombre sera aussi celui des termes du polynome complet du degré m, contenant μ inconnues. Passons maintenant à la seconde question.

1034. Pour envisager cette question dans toute son étendue, nous l'énoncerons ainsi : *Trouver dans un polynome complet du degré* m, *et renfermant un nombre quelconque d'inconnues* t, u, x, y, *etc.*, *combien il y a de termes divisibles par* t^n; *combien, outre ceux-là, il y en a de divisibles par* u^p; *combien, outre les précédens, il y en a de divisibles par* x^q, *etc.*, *en supposant d'ailleurs* $n+p+q+$ etc. $< m$.

On voit aisément que si l'on rassemble tous les termes divisibles par t^n, et qu'on supprime ce facteur, le quotient sera un polynome complet du degré $m-n$. Si l'on avait, par exemple, le polynome complet du sixième degré et à trois inconnues t, u et x, dont les termes seraient

t^6,	t^5u,	t^5x,	t^4u^2,	t^4ux,	t^4x^2,		t^3u^3,	t^3u^2x,	t^3ux^2,	t^3x^3,
t^2u^4,	t^2u^3x,	$t^2u^2x^2$,	t^2ux^3,	t^2x^4,						
tu^5,	tu^4x,	tu^3x^2,	tu^2x^3,	tux^4,	tx^5,					
u^6,	u^5x,	u^4x^2,	u^3x^3,	u^2x^4,	ux^5,	x^6,				
t^5,	t^4u,	t^4x,	t^3u^2,	t^3ux,	t^3x^2,		t^2u^3,	t^2u^2x,	t^2ux^2,	t^2x^3,
tu^4,	tu^3x,	tu^2x^2,	tux^3,	tx^4,						
u^5,	u^4x,	u^3x^2,	u^2x^3,	ux^4,	x^5,					
t^4,	t^3u,	t^3x,	t^2u^2,	t^2ux,	t^2x^2,		tu^3,	tu^2x,	tux^2,	tx^3,
u^4,	u^3x,	u^2x^2,	ux^3,	x^4,						
t^3,	t^2u,	t^2x,	tu^2,	tux,	tx^2,		u^3,	u^2x,	ux^2,	x^3,
t^2,	tu,	tx,	u^2,	ux,	x^2,					
t,	u,	x,								

en réunissant ceux qui peuvent être divisés par t^3, savoir, tous ceux qui sont multipliés par des puissances de t supérieures à la seconde, et en effectuant la division, on formerait le polynome du troisième degré, dont le nombre des termes serait par conséquent

$$\frac{(3+3)(3+2)(3+1)}{1.2.3}=20.$$

En général, dans le polynome du degré m à μ inconnues, que nous désignerons ainsi $(t\ldots,\mu)^m$, le nombre des termes divisibles par t^n sera égal au nombre des termes du polynome $(t\ldots,\mu)^{m-n}$, ou à ....
$[m-n+\mu]^{\mu}\,[0]^{-\mu}$.

Après qu'on aura effacé du polynome du sixième degré, qui nous sert d'exemple, les termes divisibles par t^3, si l'on se propose de trouver ceux qui sont divisibles par u^2, il faut, du nombre de ceux qui l'étaient

avant l'exclusion des termes divisibles par t^3, retrancher celui des termes divisibles par u^2, contenus dans le polynome dont t^3 est le facteur commun; or, les termes divisibles par u^2 dans le polynome total, sont au nombre de $\frac{(4+3)(4+2)(4+1)}{1.2.3}=35$, et celui des termes divisibles par u^2, dans le polynome du troisième degré formé des termes divisibles par t^3, étant le même que celui des termes du polynome du degré 3—2, ou du degré 1, est égal à 4; la différence 35 — 4, ou 31, sera donc le nombre des termes divisibles par u^2, après l'exclusion de ceux qui le sont par t^3.

En général, $[m-p+\mu]^{\mu}\,[o]^{-\mu}$ étant le nombre des termes divisibles par u^p dans le polynome proposé, et $[m-n-p+\mu]^{\mu}\,[o]^{-\mu}$, celui des mêmes termes dans le polynome du degré $m-n$, formé des termes divisibles par t^n; la différence $[m-p+\mu]^{\mu}\,[o]^{-\mu}-[m-n-p+\mu]^{\mu}\,[o]^{-\mu}$ sera le nombre des termes divisibles par u^p, après l'exclusion de ceux qui le sont par t^n.

Il est facile de voir que le nombre de ceux qui le sont ensuite par x^q s'obtiendra, en retranchant du nombre total des termes de cette espèce contenus dans le polynome complet, le nombre de ceux que renferme le polynome divisible par t^n, et le nombre de ceux qui sont en outre divisibles par u^p, et que l'on aura

$$[m-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}$$
$$=[o]^{-\mu}\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}.$$

On trouverait de la même manière, que le nombre des termes divisibles ensuite par y^r est égal à celui des termes de cette espèce que contient le polynome complet, moins le nombre de ceux que contient le polynome divisible par t^n, moins le nombre de ceux qui sont en outre divisibles par w^p et moins le nombre de ceux qui sont en outre divisibles par x^q, ce qui revient à

$$[o]^{-\mu}\left\{\begin{array}{l}[m-r+\mu]^{\mu}-[m-n-r+\mu]^{\mu}-[m-p-r+\mu]^{\mu}+[m-n-p-r+\mu]^{\mu}\\ -[m-q-r+\mu]^{\mu}+[m-n-q-r+\mu]^{\mu}+[m-p-q-r+\mu]^{\mu}-[m-n-p-r+\mu]^{\mu}\end{array}\right\},$$

et ainsi de suite.

En examinant de près les résultats que nous venons d'obtenir, on reconnait, 1°. que

$$[o]^{-\mu}\{[m-p+\mu]^{\mu}-[m-n-p+\mu]^{\mu}\}=\Delta_n[o]^{-\mu}[m-p+\mu]^{\mu},$$

Δ_n marquant que la quantité $m-p+\mu$ varie de $-n$; 2°. que

$$[o]^{-\mu}\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}$$
$$=[o]^{-\mu}\{\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}\}-\{[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}\}$$
$$=\Delta_p[o]^{-\mu}[m-q+\mu]^{\mu}-\Delta_p[o]^{-\mu}[m-n-q+\mu]^{\mu}$$
$$=\Delta^2_{p,n}[o]^{-\mu}[m-q+\mu]^{\mu},$$

$\Delta^2_{p,n}$ marquant une différence du second ordre, dans laquelle la quantité $m-q+\mu$ varie successivement de $-p$ et de $-n$; et d'après ces considérations, on voit que le nombre des termes divisibles par y^r, après l'exclusion des termes divisibles par t^n, u^p, x^q, est exprimé par $\Delta^3_{q,p,n}[o]^{-\mu}[m-r+\mu]^{\mu}$, $\Delta^3_{p,q,n}$ marquant que la quantité $m-r+\mu$ varie successivement de $-q$, $-p$, $-n$, et enfin que $\Delta^4_{r,q,p,n}[o]^{-\mu}[m-s+\mu]^{\mu}$, exprime le nombre des termes divisibles par z^s, après l'exclusion des termes divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r.

Quant au nombre des termes restans après l'exclusion de tous ceux qu'on vient de désigner, il s'obtiendra en observant que le nombre de ceux qui restent après l'exclusion des termes divisibles par t^n, est

$$[o]^{-\mu}\{[m+\mu]^{\mu}-[m-n+\mu]^{\mu}\}=\Delta_n[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu};$$

et si l'on en retranche ceux qui restent divisibles par u^p, et dont le nombre est $\Delta_n[o]^{-\mu}[m-p+\mu]^{\mu}$, il viendra

$$\Delta_n[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu}-\Delta_n[o]^{-\mu}[m-p+\mu]^{\mu}=\Delta^2_{n,p}[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu};$$

retranchant encore de ce résultat le nombre des termes divisibles par x^q, après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n et u^p, on aura

$$\Delta^2_{n,p}[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu}-\Delta^2_{p,n}[o]^{-\mu}[m-q+\mu]^{\mu}=\Delta^3_{n,p,q}[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu},$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, et on arrivera à

$$\Delta^3_{n,p,q}[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu}-\Delta^3_{q,p,n}[o]^{-\mu}[m-r+\mu]^{\mu}=\Delta^4_{n,p,q,r}[o]^{-\mu}[m+\mu]^{\mu},$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r; enfin à

$$\Delta^4_{n,p,q,r}\overline{[o]}^{-\mu}[m+\mu]^{\mu} - \Delta^4_{n,p,q,r}\overline{[o]}^{-\mu}[m-s+\mu]^{\mu} = \Delta^5_{n,p,q,r,s}\overline{[o]}^{-\mu}[m+\mu]^{\mu}$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r, z^s.

1035. Maintenant, pour procéder à l'élimination entre un nombre quelconque μ d'équations, renfermant un pareil nombre d'inconnues et représentées par

$$(t\ldots\mu)^m = 0, \quad (t\ldots\mu)^n = 0, \quad (t\ldots\mu)^p = 0, \quad \text{etc.};$$

concevons qu'on multiplie la première par un polynome complet, contenant aussi les μ inconnues, mais d'un degré indéterminé m', et désignons le résultat ou l'*équation-produit* par $(t\ldots\ldots\mu)^{m+m'} = 0$; les autres équations pourraient donner immédiatement les valeurs de u^n, x^p, y^q, etc., considérées comme des inconnues au premier degré, et serviraient par conséquent à chasser ces quantités de l'équation-produit, après quoi il n'y resterait plus aucun des termes divisibles par u^n, x^p, y^q, etc. Si donc l'on ne veut conserver que l'inconnue t, dans l'équation-produit, qui deviendra dans ce cas l'équation finale résultante de l'élimination des inconnues u, x, y, etc., il faudra faire évanouir tous les termes qui en demeurent affectés, en disposant pour cela des coefficiens introduits par le polynome multiplicateur.

Pour ne pas embarrasser le calcul de termes inutiles, il convient d'abord de faire disparaître du polynome multiplicateur tous ceux qui sont divisibles par u^n, x^p, y^q, etc., afin de connaître ensuite le nombre de ceux qu'il faudra faire évanouir; et le nombre des termes restans après cette opération sera exprimé par

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}\overline{[o]}^{-\mu}[m'+\mu]^{\mu} \quad (1034),$$

puisque $\mu - 1$ désigne le nombre des inconnues que l'on élimine. Les mêmes substitutions réduiront l'équation-produit à un nombre de termes marqué par

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}\overline{[o]}^{-\mu}[m+m'+\mu]^{\mu}.$$

Si donc D représente le degré de l'équation finale en t, le nombre de ses termes sera $D+1$, et par conséquent le nombre de ceux qui

resteront affectés des inconnues u, x, y, etc. dans l'équation-produit, après les substitutions que nous venons d'indiquer, aura pour expression

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[o]^{-\mu}[m+m'+\mu]^{\mu} - D - 1,$$

tandis que le nombre des coefficiens indéterminés introduits par le polynome multiplicateur, sera

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[o]^{-\mu}[m'+\mu]^{\mu}.$$

Parmi ces coefficiens, il en doit rester un qui soit arbitraire, puisque l'on peut toujours réduire à l'unité le coefficient de l'un des termes de l'équation-produit; d'après ces considérations, on a, pour déterminer m', l'équation

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[o]^{-\mu}[m'+\mu]^{\mu} - 1 = \Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[o]^{-\mu}[m+m'+\mu]^{\mu} - D - 1,$$

qui donne

$$D = [o]^{-\mu}\{\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu} - \Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[m'+\mu]^{\mu}\}$$
$$= [o]^{-\mu}\Delta^{\mu}_{m,n,p,q\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu},$$

en passant hors de la caractéristique Δ, le facteur constant $[o]^{-\mu}$, et en réduisant les deux termes du second membre à un seul. Il ne reste plus qu'à développer la différence indiquée, en observant que les variations de la quantité $m+m'+\mu$ sont successivement $-m$, $-n$, $-p$, $-q\ldots$.

Pour y parvenir, il suffit de remarquer que la fonction $[m+m'+\mu]^{\mu}$, étant développée, par rapport aux puissances de $m+m'$, sera de la forme

$$(m+m')^{\mu} + A(m+m')^{\mu-1} + B(m+m')^{\mu-2} \ldots + M(m+m') + N,$$

et que l'on aura par conséquent

$$\Delta_{m}[m+m'+\mu]^{\mu} = \mu m(m+m')^{\mu-1} + (\mu-1)mA(m+m')^{\mu-2} \ldots + Mm, + \text{etc.},$$
$$\Delta^{2}_{m,n}[m+m'+\mu]^{\mu} = \mu(\mu-1)mn(m+m')^{\mu-2} + (\mu-1)(\mu-2)mnA(m+m')^{\mu-3} + \text{etc.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{\mu}_{m,n,p,q\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1 . mnpq\ldots$$

Substituant cette valeur dans celle de D, on aura seulement

$$D = mnpq\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire que *le degré de l'équation finale, résultante de l'élimination d'un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues et de degrés quelconques, est égal au produit des exposans de ces équations.* Ce théorème important, démontré pour la première fois par Bezout, à peu près comme ci-dessus, l'a été depuis d'une manière plus simple et plus élémentaire, par M. Poisson, ainsi qu'on le peut voir dans le *Compl. des Élém. d'Algèbre.*

CHAPITRE III.

De l'intégration des équations aux différences.

Des équations aux différences, à deux variables et du premier degré (ou linéaires).

1036. Jusqu'ici nous avons supposé que la différence de la fonction cherchée était donnée explicitement par les variables indépendantes; nous allons maintenant nous occuper des cas où l'on a seulement une équation contenant la fonction cherchée, ses différences, les variables indépendantes et leurs accroissemens. Si la fonction cherchée y ne dépend que de la seule variable x, dont l'accroissement soit constant, l'équation proposée sera comprise dans la formule générale

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{etc.}) = 0.$$

Il est à propos d'observer que l'on peut en faire disparaître les différences Δy, $\Delta^2 y$, etc., en les remplaçant par les valeurs consécutives de y, puisqu'on a

$$\Delta y = y_1 - y, \qquad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y, \quad \text{etc.};$$

et le résultat prendra la forme

$$F(x, y, y_1, y_2, \text{etc.}) = 0,$$

d'après laquelle on voit que toute équation aux différences fait connaître la valeur de la fonction cherchée, par le moyen d'un certain nombre de valeurs antécédentes.

Si l'équation était du premier ordre, par exemple, on aurait y_1, par le moyen de y; si elle était du second, on en tirerait y_2, exprimé par y_1 et par y, et ainsi de suite.

Il est facile de reconnaître qu'une équation quelconque aux différences équivaut à une série, dans laquelle on obtient chaque terme par le moyen de sa relation avec ceux qui le précèdent et avec l'indice qui marque le rang qu'il occupe. En effet, lorsqu'on a, par exemple, $y_2 = f(x, y, y_1)$, et qu'on représente par h, l'accroissement de x, on en déduit

$$y_3 = f(x+h, y_1, y_2), \qquad y_4 = f(x+2h, y_2, y_3), \quad \text{etc.},$$

et l'on forme ainsi la série

$$y, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4, \; \text{etc.};$$

au moyen de ses deux premiers termes.

Ce cas particulier suffit pour montrer que *dans la série déduite d'une équation quelconque aux différences, il y aura toujours autant de termes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de cette équation.*

1037. On peut changer toute équation aux différences en une équation différentielle d'un ordre indéfini, en substituant, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc., leurs développemens d'après le n° 930, et il n'est pas moins évident que l'on convertirait aussi toute équation différentielle en une équation aux différences d'un ordre indéfini, en remplaçant les coefficiens différentiels par leurs développemens tirés de la formule du n° 937.

Il ne paraît pas que ces transformations, qui ont l'inconvénient d'introduire un nombre infini de termes, puissent être, en général, fort utiles pour l'intégration des équations; mais elles sont très-propres à faire sentir la différence qui existe entre le Calcul différentiel et le Calcul aux différences. Elles prouvent que par la nature de ce dernier, les différences de la variable indépendante doivent avoir nécessairement une valeur déterminée; car si l'on avait une équation entre $x, y, \Delta x$, Δy, $\Delta^2 y$, etc., dans laquelle Δx demeurât indéterminé, qu'on la développât suivant les puissances de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc., ce qui lui donnerait la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

on y pourrait substituer, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc., leurs développemens; et comme Δx y resterait encore indéterminé, il faudrait que les coefficiens des diverses puissances de cet accroissement s'évanouissent d'eux-mêmes. On obtiendrait ainsi, entre les variables x, y, et leurs différentielles, un nombre infini d'équations qui devraient s'accorder entre elles pour que la proposée signifiât quelque chose; et dans ce cas elle ne serait équivalente qu'à la première de ces équations, dont les autres deviendraient les différentielles successives.

En ne supposant l'équation aux différences que du premier ordre, ce qui la réduit à

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc.} = 0,$$

et prenant

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

il vient

$$\left.\begin{matrix} B\frac{dy}{dx} \\ + A \end{matrix}\right\} \Delta x + \left.\begin{matrix} E\frac{dy^2}{dx^2} \\ \\ + D\frac{dy}{dx} \\ + C \\ + \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} \end{matrix}\right\} \Delta x^2 + \text{etc.} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} = 0,$$

d'où l'on tire

$$B\frac{dy}{dx} + A = 0, \quad E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C + \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ etc.};$$

et si cette suite d'équations ne peut avoir lieu, la proposée ne pourra se vérifier qu'en assignant à Δx une valeur particulière.

1038. Ces préliminaires posés, entrons en matière par l'intégration de l'équation générale du premier degré et du premier ordre; et supposons que, l'accroissement de x étant 1, on ait l'équation

$$\Delta y + Py = Q,$$

analogue à l'équation différentielle que nous avons traitée dans le n° 562 : un procédé semblable à celui du numéro cité, va nous conduire à son intégrale. Faisons $y = uz$, et nous aurons $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$, ce qui changera l'équation proposée en

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q;$$

et en posant séparément

$$z\Delta u + Puz = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta u + Pu = 0,$$

il restera, $u\Delta z + \Delta u\Delta z = Q$, d'où l'on tirera

$$\Delta z = \frac{Q}{u + \Delta u} \quad \text{et} \quad z = \Sigma\, \frac{Q}{u + \Delta u}.$$

La question se réduit donc à intégrer l'équation $\Delta u + Pu = 0$, dans laquelle on peut séparer les variables, en lui donnant la forme..... $\frac{\Delta u}{u} = -P$, puisque P est supposé ne contenir que x. Prenons $u = e^{t}$,

il en résultera

$$\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -P,$$

d'où nous tirerons

$$e^{\Delta t} = 1 - P, \quad \Delta t = l(1-P) \quad \text{et} \quad t = \Sigma l(1-P).$$

Mais la somme des logarithmes de la fonction $1-P$ répondant au produit continuel des valeurs successives que reçoit $1-P$, entre les limites de l'intégrale, si l'on désigne ce produit par $[1-P_{x-1}]^{x}$, on aura

$$t = l[1 - P_{x-1}]^{x},$$

d'où l'on conclura

$$u = e^t = [1 - P_{x-1}]^{x}.$$

Le sens de la notation que nous venons d'introduire est facile à saisir, d'après celle du n° 981, car il est visible que

$$[1 - P_{x-1}]^{x} = (1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3})\ldots\ldots(1-P_0);$$

et si l'on fait attention que $u + \Delta u = u_1$, on obtiendra

$$u + \Delta u = [1 - P_x]^{x+1} \quad \text{et} \quad z = \Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

ce qui donnera enfin

$$y = [1 - P_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indiquée.

C'est à peu près ainsi que Lagrange, qui le premier fit voir l'analogie que les équations du premier degré, aux différences, ont avec les équations différentielles du même degré, a intégré, en 1761, l'équation traitée ci-dessus; il applique ensuite son résultat à l'équation

$$y_1 = Ry + Q,$$

qui revient à

$$y + \Delta y = Ry + Q.$$

En comparant cette dernière avec $\Delta y + Py = Q$, il vient $P = 1 - R$, $1 - P = R$; et l'on a par conséquent

$$y = [R_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q}{[R_x]^{x+1}}.$$

Dans le développement du produit $[1-P_{x-1}]^{x}$, nous avons supposé, pour plus de simplicité, la différence de x égale à l'unité; on pourrait conserver la même expression, en concevant qu'elle répond à...... $(1-P_{x-h})(1-P_{x-2h})(1-P_{x-3h})$ etc., lorsque $\Delta x=h$, ou bien transformer l'équation proposée en une autre, en faisant $x=hx'$, ce qui donnerait $\Delta x=h\Delta x'$ et $\Delta x'=1$.

Lorsque le coefficient R est constant, on a

$$y=R^{x}\Sigma\frac{Q}{R^{x+1}};$$

s'il en est de même de Q, l'intégration indiquée s'effectue facilement : on obtient dans ce cas

$$\Sigma\frac{Q}{R^{x+1}}=Q\Sigma R^{-x-1}=\frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1}=\frac{Q}{R^{x}(1-R)}\ (955),$$

et

$$y=R^{x}\left\{\frac{Q}{R^{x}(1-R)}+const.\right\}.$$

En général, on obtiendra la valeur de y, délivrée du signe d'intégration, toutes les fois que Q sera une fonction rationnelle et entière de x (960).

1039. Dans les recherches citées numéro précédent, Lagrange applique aux équations du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences, la méthode que d'Alembert a donnée pour les équations différentielles du premier degré, et dont nous avons fait connaître l'esprit, n° 623; mais il est revenu sur ce sujet, en 1775, par une méthode encore plus simple, que nous allons faire connaître.

Représentons par

$$y_{x+n}+P_{x}y_{x+n-1}+Q_{x}y_{x+n-2}\ldots+U_{x}y_{x}=V_{x}\qquad (A),$$

une équation d'un ordre quelconque et du premier degré, par rapport à la fonction y_{x}; on prouve, comme dans le n° 610, que son intégration se ramène à celle de

$$z_{x+n}+P_{x}z_{x+n-1}+Q_{x}z_{x+n-2}\ldots+U_{x}z_{x}=0\qquad (B);$$

et l'on obtient la valeur complète de z_{x}, lorsqu'on en connaît un nombre n de valeurs particulières.



Cette dernière proposition est évidente par elle-même; car il est clair que si

$$z'_x, \quad z''_x, \quad z'''_x, \ldots\ldots$$

sont des fonctions de x qui satisfassent à l'équation (B), l'expression

$$z_x = C'z'_x + C''z''_x + C'''z'''_x + \text{etc.}$$

y satisfera pareillement; et quand le nombre de ses termes, supposés absolument irréductibles entre eux, sera n, elle sera l'intégrale complète de cette équation, puisqu'elle renfermera n constantes arbitraires, C', C'', C''', etc.

Cela posé, si l'on regarde ces constantes comme des fonctions de x, et que dans cette hypothèse on change z_x en y_x, ou que l'on fasse

$$y_x = C'_x z'_x + C''_x z''_x + C'''_x z'''_x + \text{etc.},$$

on en déduira d'abord

$$y_{x+1} = C'_{x+1}z'_{x+1} + C''_{x+1}z''_{x+1} + C'''_{x+1}z'''_{x+1} + \text{etc.};$$

résultat qui se transforme en

$$\begin{aligned} y_{x+1} = {} & C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+1}\Delta C'_x + z''_{x+1}\Delta C''_x + z'''_{x+1}\Delta C'''_x + \text{etc.}; \end{aligned}$$

en mettant pour C'_{x+1}, C''_{x+1}, etc., leurs valeurs $C'_x + \Delta C'_x$, $C''_x + \Delta C''_x$, etc., et se réduit à

$$y_{x+1} = C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.},$$

lorsqu'on fait

$$z'_{x+1}\Delta C'_x + z''_{x+1}\Delta C''_x + z'''_{x+1}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \qquad (1),$$

de même que si les quantités C'_x, C''_x, C'''_x, etc., fussent demeurées constantes. En faisant de nouveau varier x, on obtiendra

$$\begin{aligned} y_{x+2} & = C'_{x+1}z'_{x+2} + C''_{x+1}z''_{x+2} + C'''_{x+1}z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & = C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+2}\Delta C'_x + z''_{x+2}\Delta C''_x + z'''_{x+2}\Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat que l'on réduira à

$$y_{x+2} = C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.},$$

par la supposition de

$$z'_{x+2}\Delta C'_x + z''_{x+2}\Delta C''_x + z'''_{x+2}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \qquad (2).$$

Faisant varier x une troisième fois, on aura

$$y_{x+3} = C'_x z'_{x+3} + C''_x z''_{x+3} + C'''_x z'''_{x+3} + \text{etc.};$$

en posant

$$z'_{x+3}\Delta C'_x + z''_{x+3}\Delta C''_x + z'''_{x+3}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \qquad (3),$$

et l'on continuera ainsi jusqu'aux équations

$$y_{x+n-1} = C'_x z'_{x+n-1} + C''_x z''_{x+n-1} + C'''_x z'''_{x+n-1} + \text{etc.},$$
$$z'_{x+n-1}\Delta C'_x + z''_{x+n-1}\Delta C''_x + z'''_{x+n-1}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (n-1).$$

Maintenant, si dans la valeur de y_{x+n-1} on change x en $x+1$, on trouvera

$$y_{x+n} = C'_x z'_{x+n} + C''_x z''_{x+n} + C'''_x z'''_{x+n} + \text{etc.}$$
$$+ z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.};$$

mettant dans l'équation (A) les valeurs de y_x, $y_{x+1}, \ldots y_{x+n-1}$, y_{x+n}, en observant que, par l'hypothèse et d'après l'équation (B),

$$z'_{x+n} + P_x z'_{x+n-1} + Q_x z'_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z'_x = 0;$$
$$z''_{x+n} + P_x z''_{x+n-1} + Q_x z''_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z''_x = 0,$$
$$z'''_{x+n} + P_x z'''_{x+n-1} + Q_x z'''_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z'''_x = 0,$$
etc.,

il restera

$$z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.} = V_x \ldots\ldots\ldots (n).$$

On conçoit facilement qu'avec le secours des équations (1), (2), (3), ...$(n-1)$, (n), on déterminera en fonction de x, les différences $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, etc., ce qui réduira la recherche des quantités C', C'', C''', etc., à l'intégration des fonctions d'une seule variable.

1040. Il faut à présent nous occuper de l'équation

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} + R_x z_{x+n-3} \ldots + U_x z_x = 0 \ldots\ldots\ldots (B).$$

Lorsque les coefficiens de cette équation, au lieu d'être des fonctions de x, sont des constantes, on a seulement

$$z_{x+n} + P z_{x+n-1} + Q z_{x+n-2} + R z_{x+n-3} \ldots + U z_x = 0 \ldots\ldots (C),$$

et l'on y satisfait en posant $z_x = m^x$, d'où il résulte

$$z_{x+1} = m^{x+1}, \qquad z_{x+2} = m^{x+2}, \ldots\ldots\ldots z_{x+n} = m^{x+n};$$

puis

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + Rm^{n-3} \ldots\ldots + U = 0 \ldots\ldots\ldots (D);$$

équation qui sert à déterminer m. Si donc on désigne par m', m'', m''', etc., les racines de celle-ci, on aura (1039)

$$z_x = C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x + \ldots\ldots$$

Cette expression présente, par rapport aux quantités m', m'', m''', etc., les mêmes circonstances que l'intégrale de l'équation différentielle

$$d^nz + Pdxd^{n-1}z + Qdx^2d^{n-2}z + Rdx^3d^{n-3}z \ldots + Uzdx^n = 0 \text{ (604)}.$$

1041. D'abord il peut arriver que l'équation (D) ait des racines imaginaires. Une couple de ces racines, étant de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

fournira, dans l'expression de z_x (1040), la partie

$$C'(\alpha + \beta\sqrt{-1})^x + C''(\alpha - \beta\sqrt{-1})^x,$$

que l'on transformera facilement en

$$C'\gamma^x(\cos\delta x + \sqrt{-1}\sin\delta x) + C''\gamma^x(\cos\delta x - \sqrt{-1}\sin\delta x)$$
$$= E'\cos\delta x + E''\sin\delta x,$$

en posant

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \gamma, \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\delta, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sin\delta \text{ (*Introd.* 79)},$$

et en changeant les constantes C' et C'', comme dans le n° 605.

Cet exemple est suffisant pour montrer que l'expression de z_x pourra toujours être mise sous une forme réelle; tirant donc de cette forme les n valeurs particulières de z_x, comme dans le n° 612, on parviendra sans peine à l'expression réelle de y_x.

1042. Si l'équation (D) avait des racines égales, l'expression de z_x cesserait d'être complète; et il faudrait alors recourir à des artifices d'ana-

lyse, semblables à ceux que nous avons employés pour l'équation différentielle (606); mais nous présenterons cette recherche sous un point de vue un peu différent, en la ramenant à une détermination particulière des constantes arbitraires, qui peut encore avoir d'autres applications.

L'équation (C), considérée comme exprimant la nature d'une série dont un terme quelconque, représenté par z_{x+n}, dépend des n termes qui le précèdent (1036), suppose nécessairement que les n premiers termes de cette série, désignés par

$$z_0,\quad z_1,\quad z_2,\quad z_3, \ldots z_{n-1},$$

sont arbitraires; et ce sont ces termes que nous allons introduire à la place des constantes C', C'', C''', etc. Pour cela, nous poserons les équations

$$\left.\begin{array}{llllll}
z_0 & = C' & + C'' & + C''' & + \text{etc.} \\
z_1 & = C'm' & + C''m'' & + C'''m''' & + \text{etc.} \\
z_2 & = C'm'^2 & + C''m''^2 & + C'''m'''^2 & + \text{etc.} \\
z_3 & = C'm'^3 & + C''m''^3 & + C'''m'''^3 & + \text{etc.} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_{n-1} & = C'm'^{n-1} & + C''m''^{n-1} & + C'''m'''^{n-1} & + \text{etc.}
\end{array}\right\} (E),$$

dont le nombre est égal à celui des quantités C', C'', C''', etc., qui n'y montent d'ailleurs qu'au premier degré; et en prenant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., nous obtiendrons les résultats particuliers

$$C' = z_0,$$

$$C' = \frac{z_1 - m''z_0}{m' - m''},\qquad C'' = \frac{z_1 - m'z_0}{m'' - m'},$$

$$\left.\begin{array}{l}
C' = \dfrac{z_2 - (m''+m''')z_1 + m''m'''z_0}{(m'-m'')(m'-m''')} \\
C'' = \dfrac{z_2 - (m'+m''')z_1 + m'm'''z_0}{(m''-m')(m''-m''')} \\
C''' = \dfrac{z_2 - (m'+m'')z_1 + m'm''z_0}{(m'''-m')(m'''-m'')}
\end{array}\right\},$$

etc.

La loi de ces résultats est déjà assez évidente pour qu'on puisse les pousser aussi loin qu'il sera nécessaire; mais on peut en découvrir la forme générale sans recourir à l'induction, en faisant usage du procédé d'élimination donné à la fin du n° 611.

En effet, si l'on représente par

$$t^{n-1} + P't^{n-2} + Q't^{n-3} \ldots + U' = 0,$$

l'équation dont les racines sont m'', m''', etc., que l'on multiplie l'avant-dernière des équations (E) par P', la précédente par Q', et ainsi de suite jusqu'à la première, qui sera multipliée par U', et qu'on ajoute les produits à la dernière, on aura

$$\begin{aligned} & z_{n-1} + P'z_{n-2} + Q'z_{n-3} \ldots\ldots + U'z_0 \\ = & \left.\begin{aligned} & C'(m'^{n-1} + P'm'^{n-2} + Q'm'^{n-3} \ldots\ldots + U') \\ + & C''(m''^{n-1} + P'm''^{n-2} + Q'm''^{n-3} \ldots\ldots + U') \\ + & C'''(m'''^{n-1} + P'm'''^{n-2} + Q'm'''^{n-3} \ldots\ldots + U') \\ + & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}; \end{aligned}$$

où toutes les lignes du second membre, excepté la première, sont nécessairement nulles, comme n'offrant que les résultats de la substitution des quantités m'', m''', etc., à la place de t: il viendra donc

$$C' = \frac{z_{n-1} + P'z_{n-2} + Q'z_{n-3} \ldots + U'z_0}{m'^{n-1} + P'm'^{n-2} + Q'm'^{n-3} \ldots + U'},$$

ce qui s'accorde avec les valeurs rapportées plus haut.

On trouverait de la même manière C'', C''', etc., en substituant successivement les racines m'', m''', etc., à la place de m', et en formant l'équation t avec les racines m', m''', m'''', etc., m', m'', m'''', etc.

Nous avons déjà fait voir, dans le numéro cité, que

$$\begin{aligned} & m'^{n-1} + P'm'^{n-2} + Q'm'^{n-3} \ldots\ldots\ldots + U' = (m'-m'')(m'-m''') \text{ etc.} \\ = & \; nm'^{n-1} + (n-1)Pm'^{n-2} + (n-2)Qm'^{n-3} \ldots + T, \end{aligned}$$

résultat équivalent à

$$\frac{\mathrm{d}\{m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots + Tm + U\}}{\mathrm{d}m};$$

pourvu qu'après la différentiation on change m en m'. Pour former les quantités P', Q', R', ... U', il faut multiplier l'équation

$$t^{n-1} + P't^{n-2} + Q't^{n-3} \ldots + U' = 0,$$

par $t - m'$, ce qui doit la rendre identique avec

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots + Tm + U = 0,$$

en changeant t en m; et on aura, par la comparaison des termes semblables,

$$\begin{aligned} P'-\ \ m' &= P, \\ Q'-P'm' &= Q, \\ R'-Q'm' &= R, \\ S'-R'm' &= S, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} P' &= P + m', \\ Q' &= Q + Pm' + m'^2, \\ R' &= R + Qm' + Pm'^2 + m'^3, \\ S' &= S + Rm' + Qm'^2 + Pm'^3 + m'^4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

1043. Cela posé, en observant que

$$\begin{aligned} m'^{n-1} + P'm'^{n-2} + Q'm'^{n-3} \ldots + U' &= (m'-m'')(m'-m''')(m'-m'''')\ldots, \\ m''^{n-1} + P''m''^{n-2} + Q''m''^{n-3} \ldots + U'' &= (m''-m')(m''-m''')(m''-m'''')\ldots, \\ m'''^{n-1} + P'''m'''^{n-2} + Q'''m'''^{n-3} \ldots + U''' &= (m'''-m')(m'''-m'')(m'''-m'''')\ldots, \end{aligned}$$

etc.,

on peut écrire les deux premiers termes de la valeur de z, ainsi qu'il suit,

$$\frac{1}{m'-m''}\left\{\begin{aligned} &\frac{z_{n-1} + P'z_{n-2} + Q'z_{n-3} \ldots + U'z_0}{(m'-m''')(m'-m'''')\ldots}\, m'^x \\ -&\frac{z_{n-1} + P''z_{n-2} + Q''z_{n-3} \ldots + U''z_0}{(m''-m''')(m''-m'''')\ldots}\, m''^x \end{aligned}\right\},$$

et l'on voit qu'ils se réduisent à $\frac{0}{0}$ lorsque $m' = m''$.

Les trois premiers termes, étant écrits de cette manière,

$$\frac{1}{(m'-m'')(m'-m''')(m''-m''')}\left\{\begin{aligned} &\frac{(m''-m''')(z_{n-1} + P'z_{n-2} + Q'z_{n-3} \ldots + U'z_0)\, m'^x}{(m'-m'''')\ldots\ldots} \\ -&\frac{(m'-m''')(z_{n-1} + P''z_{n-2} + Q''z_{n-3} \ldots + U''z_0)\, m''^x}{(m''-m'''')\ldots\ldots} \\ +&\frac{(m'-m'')(z_{n-1} + P'''z_{n-2} + Q'''z_{n-3} \ldots + U'''z_0)\, m'''^x}{(m'''-m'''')\ldots\ldots} \end{aligned}\right\},$$

deviennent visiblement $\frac{0}{0}$, lorsque l'on a en même temps $m'=m''=m'''$, et ainsi de suite, à mesure que le nombre des racines égales augmente. Il faut, pour trouver alors la vraie forme de l'intégrale, recourir à la méthode du nº 147, quand il n'y a que deux racines égales, et à celle du nº 153, lorsque le nombre de ces racines surpasse deux. L'usage que

nous avons déjà fait de ces méthodes, dans un cas absolument semblable à celui qui nous occupe (613), nous dispense d'entrer dans aucun détail; et nous nous bornerons, en conséquence, à donner la forme des résultats. Il faudra substituer aux deux premiers termes de la valeur de z la quantité

$$c'm'^{x} + c''xm'^{x-1},$$

lorsque $m' = m''$; aux trois premiers, la quantité

$$c'm'^{x} + c''xm'^{x-1} + c''' \frac{x(x-1)}{2} m'^{x-2},$$

lorsque $m' = m'' = m'''$, et ainsi de suite : dans ces expressions, c', c'', c''', etc., remplacent les constantes arbitraires C', C'', C''', etc.

1044. Nous indiquerons succinctement ici la route qu'il faut suivre pour déterminer les quantités C', C'', C''', etc., par le moyen des équations (1), (2),...$(n-1)$, (n), du nº 1039, afin de parvenir à l'intégrale de l'équation (A), dans le cas où les coefficiens P, Q, R,...U, sont constans, et V_x est une fonction quelconque de x. Les équations (1), (2)....$(n-1)$, (n), deviennent alors

$$\begin{aligned}
&m'^{x+1}\,\Delta C'_x + m''^{x+1}\,\Delta C''_x + m'''^{x+1}\,\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0,\\
&m'^{x+2}\,\Delta C'_x + m''^{x+2}\,\Delta C''_x + m'''^{x+2}\,\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m'^{x+n-1}\,\Delta C'_x + m''^{x+n-1}\,\Delta C''_x + m'''^{x+n-1}\,\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0,\\
&m'^{x+n}\,\Delta C'_x + m''^{x+n}\,\Delta C''_x + m'''^{x+n}\,\Delta C'''_x + \text{etc.} = V_x,
\end{aligned}$$

en y substituant pour z'_{x+1}, z'_{x+2},....z''_{x+1}, etc.,

$$m'^{x+1},\ m'^{x+2},\ldots m''^{x+1},\ \text{etc.};$$

ensuite, si l'on fait

$$m'^{x+1}\Delta C' = A'V_x, \quad m''^{x+1}\Delta C'' = A''V_x, \quad m'''^{x+1}\Delta C''' = A'''V_x, \quad \text{etc.},$$

on arrivera aux équations

$$\begin{aligned}
&A' + A'' + A''' + \text{etc.} = 0,\\
&m'A' + m''A'' + m'''A''' + \text{etc.} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m'^{n-2}A' + m''^{n-2}A'' + m'''^{n-2}A''' + \text{etc.} = 0,\\
&m'^{n-1}A' + m''^{n-1}A'' + m'''^{n-1}A''' + \text{etc.} = 1,
\end{aligned}$$

traitées dans le nº 611, et l'on terminera l'opération comme dans le

n° 1041. Si parmi les valeurs de m il s'en trouve d'imaginaires ou d'égales entr'elles, on aura égard à chacune de ces circonstances, par des procédés absolument semblables à ceux qui sont développés dans le n° 613.

1045. L'on n'a fait que peu de tentatives pour intégrer l'équation

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} \dots + U_x z_x = 0,$$

dans le cas où les coefficiens $P_x, Q_x, \dots U_x$, sont des fonctions de x; c'est M. Laplace qui, dans ce genre, a porté le plus loin ses recherches; et afin d'en présenter l'ensemble, nous commencerons par donner la méthode qu'il emploie pour intégrer l'équation du premier degré et du premier ordre.

Soit
$$y_{x+1} = P_x y_x + Q_x;$$
on tire successivement de cette équation

$$\begin{aligned} y_1 &= P_0 y_0 + Q_0, \\ y_2 &= P_1 y_1 + Q_1, \\ y_3 &= P_2 y_2 + Q_2, \\ y_4 &= P_3 y_3 + Q_3, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

substituant la valeur de y_1 dans celle de y_2, puis cette dernière dans celle de y_3, et ainsi de suite, il viendra

$$\begin{aligned} y_1 &= P_0 y_0 + Q_0, \\ y_2 &= P_1 P_0 y_0 + P_1 Q_0 + Q_1, \\ y_3 &= P_2 P_1 P_0 y_0 + P_2 P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + Q_2, \\ y_4 &= P_3 P_2 P_1 P_0 y_0 + P_3 P_2 P_1 Q_0 + P_3 P_2 Q_1 + P_3 Q_2 + Q_3, \end{aligned}$$

et en général,

$$\begin{aligned} y_x = P_{x-1} P_{x-2} P_{x-3} \dots P_0 y_0 &+ P_{x-1} P_{x-2} \dots P_1 Q_0 \\ &+ P_{x-1} P_{x-2} \dots P_2 Q_1 \\ &+ P_{x-1} P_{x-2} \dots P_3 Q_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ Q_{x-1}, \end{aligned}$$

expression que, d'après la convention faite dans le n° 1038, l'on peut encore écrire comme il suit :

$$y_x = [P_{x-1}]^{x} y_0 + [P_{x-1}]^{x-1} Q_0 + [P_{x-1}]^{x-2} Q_1 + [P_{x-1}]^{x-3} Q_2 \dots + [P_{x-1}]^{0} Q_{x-1}.$$

On a, dans cette formule, la valeur de y_x, exprimée par le moyen de y_0, et par conséquent le terme général de la série correspondante à l'équation

$$y_{x+1} = P_x y_x + Q_x.$$

Si l'on représente y_0 par une quantité arbitraire C, et que l'on observe en même temps que la série

$$\overset{x-1}{[P_{x-1}]}Q_0 + \overset{x-2}{[P_{x-1}]}Q_1 + \overset{x-3}{[P_{x-1}]}Q_2 \ldots\ldots + \overset{0}{[P_{x-1}]}Q_{x-1},$$

étant mise sous la forme

$$\overset{x}{[P_{x-1}]}\left\{\frac{Q_0}{\overset{1}{[P_0]}} + \frac{Q_1}{\overset{1}{[P_1]}} + \frac{Q_2}{\overset{1}{[P_2]}} \ldots\ldots + \frac{Q_{x-1}}{\overset{x}{[P_{x-1}]}}\right\},$$

que l'on peut vérifier par le développement ou par les analogies de la notation actuelle avec celle du n° 981, revient à $\overset{x}{[P_{x-1}]}\Sigma \frac{Q_x}{\overset{x+1}{[P_x]}}$ (943), on aura, de même que dans le n° 1038,

$$y_x = \overset{x}{[P_{x-1}]}\left\{C + \Sigma \frac{Q_x}{\overset{x+1}{[P_x]}}\right\}.$$

Ce procédé doit être remarqué, parce qu'il conduit directement à l'intégrale, et qu'il montre le parti que l'on peut tirer de la formation des valeurs successives de la fonction cherchée, pour en obtenir l'expression générale.

1046. Passons aux ordres supérieurs : soit

$$y_{x+n} = P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \ldots + T_x y_{x+1} + U_x y_x + V_x,$$

et faisons

$$\begin{aligned}
y_{x+1} &= p_x y_x + q_x,\\
y_{x+2} &= p_{x+1} y_{x+1} + q_{x+1},\\
y_{x+3} &= p_{x+2} y_{x+2} + q_{x+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{x+n} &= p_{x+n-1} y_{x+n-1} + q_{x+n-1};
\end{aligned}$$

en multipliant successivement les $n-1$ premières de ces équations, par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$, et ajoutant les résultats avec la dernière, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
y_{x+n} = {} & (p_{x+n-1} - \alpha_{n-1}) y_{x+n-1} + (\alpha_{n-1} p_{x+n-2} - \alpha_{n-2}) y_{x+n-2}\\
& + (\alpha_{n-2} p_{x+n-3} - \alpha_{n-3}) y_{x+n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 p_x y_x\\
& + q_{x+n-1} + \alpha_{n-1} q_{x+n-2} + \alpha_{n-2} q_{x+n-3} \ldots\ldots\ldots + \alpha_1 q_x;
\end{aligned}$$

comparant celle-ci avec la proposée, nous en déduirons les suivantes,

$$\begin{aligned}
P_x &= p_{x+n-1} - \alpha_{n-1},\\
Q_x &= \alpha_{n-1}p_{x+n-2} - \alpha_{n-2},\\
R_x &= \alpha_{n-2}p_{x+n-3} - \alpha_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
T_x &= \alpha_2 p_{x+1} - \alpha_1,\\
U_x &= \alpha_1 p_x,\\
V_x &= q_{x+n-1} + \alpha_{n-1}q_{x+n-2} + \alpha_{n-2}q_{x+n-3}\ldots + \alpha_1 q_x,
\end{aligned}$$

dont le nombre est évidemment égal à $n+1$. On tire successivement des $n-1$ premières,

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1} &= p_{x+n-1} - P_x,\\
\alpha_{n-2} &= p_{x+n-2}p_{x+n-1} - p_{x+n-2}P_x - Q_x,\\
\alpha_{n-3} &= p_{x+n-3}p_{x+n-2}p_{x+n-1} - p_{x+n-3}p_{x+n-2}P_x - p_{x+n-3}Q_x - R_x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_1 &= [p_{x+n-1}]^{n-1} - [p_{x+n-2}]^{n-2}P_x - [p_{x+n-3}]^{n-3}Q_x \ldots - T_x;
\end{aligned}$$

et à cause que $U_x = \alpha_1 p_x$, il viendra

$$U_x = [p_{x+n-1}]^{n} - [p_{x+n-2}]^{n-1}P_x - [p_{x+n-3}]^{n-2}Q_x \ldots - [p_x]^{1}T_x,$$

équation qui n'est que de l'ordre $n-1$, par rapport à la fonction inconnue p_x, puisqu'elle ne comprend que les valeurs $p_x, p_{x+1}, \ldots p_{x+n-1}$, mais qui n'est plus du premier degré. Il n'est pas nécessaire de l'intégrer complètement; il suffit de trouver une seule valeur qui y satisfasse; on substituera cette valeur, ainsi que celle de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots \alpha_1$, dans l'équation

$$V_x = q_{x+n-1} + \alpha_{n-1}q_{x+n-2} + \alpha_{n-2}q_{x+n-3}\ldots + \alpha_1 q_x,$$

qui ne renfermera plus alors de fonction inconnue que q_x, et qui ne sera que de l'ordre $n-1$ et du premier degré, par rapport à cette fonction. Cette dernière étant intégrée, donnera une expression de q_x, avec $n-1$ constantes arbitraires; et l'intégrale de l'équation du premier ordre et du premier degré $y_{x+1} = p_x y_x + q_x$ deviendra celle de la proposée: on aura ainsi, par le n° 1038,

$$y_x = [p_{x-1}]^{x}\left\{C + \Sigma \frac{q_x}{[p_x]^{x+1}}\right\}.$$

1047. En poursuivant les conséquences de cette méthode, M. Laplace était parvenu, de son côté, au théorème que nous avons démontré dans le n° 1039; nous renvoyons, pour cet objet, à son Mémoire, mais nous intégrerons avec lui, l'équation très-étendue

$$y_{x+n} = A[X_{x+m}]^{1} y_{x+n-1} + B[X_{x+m}]^{2} y_{x+n-2} + C[X_{x+m}]^{3} y_{x+n-3} \ldots + L[X_{x+m}]^{n} y_x,$$

dans laquelle les coefficiens A, B, $C, \ldots L$, sont constans, mais où X désigne une fonction quelconque de x. L'équation qui donne p_x devient alors

$$[p_{x+n-1}]^{n} - A[X_{x+m}]^{1}[p_{x+n-2}]^{n-1} - B[X_{x+m}]^{2}[p_{x+n-3}]^{n-2} \ldots - K[X_{x+m}]^{n-1}[p_x]^{1} - L[X_{x+m}]^{n} = 0;$$

et si l'on prend $p_x = aX_{x+m-n+1}$, a étant une quantité constante, il viendra

$$[p_{x+n-1}]^{n} = a^n[X_{x+m}]^{n}, \qquad [p_{x+n-2}]^{n-1} = a^{n-1}[X_{x+m-1}]^{n-1}, \qquad \text{etc.}$$

La substitution de ces valeurs fait disparaître X, et il ne reste que l'équation algébrique

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots - Ka - L = 0.$$

Si, pour simplifier, on prend $m = n - 1$, et que l'on représente par a', a'', a''', etc., les valeurs de a, celles de p_x seront

$$a'X_x, \qquad a''X_x, \qquad a'''X_x, \qquad \text{etc.}$$

Il est visible que l'on doit supprimer dans ce cas la quantité q_x, et que l'on a seulement $y_x = C[p_{x-1}]^{x}$ pour l'intégrale première de l'équation proposée; mais à cause des diverses valeurs de p_x, on en déduira, par la théorie des équations du premier degré,

$$y_x = C'a'^x[X_{x-1}]^{x} + C''a''^x[X_{x-1}]^{x} + C'''a'''^x[X_{x-1}]^{x} + \text{etc.}\ldots,$$

intégrale complète de la proposée, et qui revient à

$$y_x = [X_{x-1}]^{x}\{C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.}\ldots\}.$$

1048. Les résultats précédens peuvent être changés en d'autres d'une forme plus simple à quelques égards, en écrivant x à la place de $x + n$ dans l'indice de y; l'équation proposée dans le n° 1046, deviendra

par là

$$y_x = P_x y_{x-1} + Q_x y_{x-2} \ldots + T_x y_{x-n+1} + U_x y_{x-n} + V_x.$$

On la traitera encore suivant le procédé du numéro cité, en observant d'écrire p_{x+1} et q_{x+1}, au lieu de p_x et de q_x, dans les premières équations de ce numéro, avant d'y changer $x+n$ en x, et en les prenant ensuite dans un ordre inverse.

L'équation du numéro précédent se changera, de cette manière, en

$$y_x = A[X_x]^{1} y_{x-1} + B[X_x]^{2} y_{x-2} \ldots + L[X_x]^{n} y_{x-n},$$

si l'on fait $m = n$, et dépendra alors de l'équation

$$[p_x]^{n} - A[X_x]^{1}[p_{x-1}]^{n-1} - B[X_x]^{2}[p_{x-2}]^{n-2} \ldots - K[X_x]^{n-1}[p_{x-n+1}]^{1} - L[X_x]^{n} = 0,$$

qu'on transformera encore en

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots - Ka - L = 0;$$

en prenant $p_x = aX_x$, et la valeur complète de y_x sera

$$y_x = [X_x]^{x}\{C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.}\}.$$

1049. Passons à l'application, et supposons, pour particulariser les résultats, que l'équation proposée ne monte qu'au second ordre et qu'on ait $X = x$; nous aurons seulement

$$y_x = A[x]^{1} y_{x-1} + B[x]^{2} y_{x-2},$$

d'où nous tirerons

$$a^2 - Aa - B = 0,$$
$$a = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 + B},$$
$$y_x = [x]^{x}\{C'a'^x + C''a''^x\}.$$

Si les racines a' et a'' étaient imaginaires, on changerait d'abord

$$y_x = [x]^{x}\{C'a'^x + C''a''^x\}$$

en

$$y_x = [x]^{x}\gamma^x\{E'\cos\delta x + E''\sin\delta x\} \text{ (1042)};$$

et pour déterminer les nouvelles constantes arbitraires E' et E'', on au-

rait les équations

$$y_0 = E',$$
$$y_1 = \gamma\{E'\cos\delta + E''\sin\delta\} = E'\alpha + E''\beta,$$

au moyen desquelles on trouverait

$$y_x = \overset{x}{[x]}\gamma^x\left\{y_0\cos\delta x + \frac{y_1 - \alpha y_0}{\beta}\sin\delta x\right\}.$$

Si l'on veut déterminer C' et C'', par le moyen des termes y_0 et y_1, on aura, à cause de $\overset{0}{[0]} = 1$ (982), les équations

$$y_0 = C' + C'',$$
$$y_1 = C'a' + C''a'';$$

lesquelles donneront

$$C' = \frac{a''y_0 - y_1}{a'' - a'},$$
$$C'' = \frac{a'y_0 - y_1}{a' - a''},$$

et il viendra pour résultat final

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{\frac{a''y_0 - y_1}{a'' - a'}a'^x + \frac{a'y_0 - y_1}{a' - a''}a''^x\right\}.$$

Quand les deux racines a' et a'' seront égales, on fera $a'' = a' + k$; il viendra

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{\frac{(a'+k)y_0 - y_1}{k}a'^x + \frac{a'y_0 - y_1}{-k}(a'+k)^x\right\};$$

en développant et réduisant, on trouvera

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{y_0a'^x - \frac{a'y_0 - y_1}{k}\left(xa'^{x-1}k + \frac{x(x-1)}{2}a'^{x-2}k^2 + \text{etc.}\right)\right\}$$
$$= \overset{x}{[x]}\left\{y_0a'^x - (a'y_0 - y_1)\left(xa'^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}a'^{x-2}k + \text{etc.}\right)\right\};$$

posant ensuite $k = 0$, on aura seulement

$$y_x = \overset{x}{[x]}a'^{x-1}\{a'y_0 - (a'y_0 - y_1)x\}.$$

Prenons enfin un exemple en nombres; soit l'équation

$$y_x = 2[x]^{1} y_{x-1} + 3[x]^{2} y_{x-2},$$

ou

$$y_x = 2x y_{x-1} + 3x(x-1) y_{x-2},$$

qui, lorsqu'on fait $y_0 = 1$, $y_1 = 4$, engendre la série

1, 4, 22, 204, 2424, etc.;

nous aurons, pour déterminer a, l'équation

$$a^2 - 2a - 3 = 0,$$

de laquelle nous tirerons $a' = 3$, $a'' = -1$; puis, avec ces valeurs, nous obtiendrons

$$C' = \frac{y_0 + y_1}{4} = \frac{5}{4}, \qquad C'' = \frac{3y_0 - y_1}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$y_x = [x]^{x} \{ \tfrac{5}{4} . 3^x - \tfrac{1}{4}(-1)^x \}.$$

Si l'on prend, par exemple, $x = 3$, on déduira de ce résultat $y_3 = 204$, de même que ci-dessus.

L'équation générale

$$y_x = A[x]^{1} y_{x-1} + B[x]^{2} y_{x-2} \ldots + L[x]^{n} y_{x-n}$$

se traiterait absolument comme la précédente, et son intégrale serait de la forme

$$y_x = [x]^{x} \{ C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.} \},$$

a', a'', a''', etc., étant les racines de l'équation

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots\ldots - L = 0.$$

Si l'on voulait déterminer les constantes C', C'', C''', etc., par le moyen des n premiers termes de la série engendrée par l'équation proposée, on aurait ces équations

$$y_0 = C' + C'' + C''' + \text{etc.},$$

$$\frac{y_1}{1} = C'a' + C''a'' + C'''a''' + \text{etc.},$$

$$\frac{y_2}{1.2} = C'a'^2 + C''a''^2 + C'''a'''^2 + \text{etc.},$$

etc.,

qui rentrent dans celles du n° 1041, et dont on tirerait les valeurs de C', C'', C''', etc., par le procédé de ce numéro.

Si l'équation en a contenait des racines imaginaires ou des racines égales, l'emploi des méthodes indiquées nos 1041, 1042, conduirait aux résultats relatifs à chacun de ces cas; et l'exemple du second ordre, auquel nous nous sommes arrêtés, joint à ceux que nous avons donnés pour les équations différentielles, doit lever toutes les difficultés à cet égard.

1050. Il est bon de remarquer que si l'on prend

$$z_x = C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.},$$

la fonction z_x dépendra de l'équation

$$z_x = Az_{x-1} + Bz_{x-2} \ldots + Lz_{x-n},$$

dont l'expression ci-dessus offrira par conséquent l'intégrale complète (1040), et que y_x étant donné par l'équation

$$y_x = A[X_x]^{1} y_{x-1} + B[X_x]^{2} y_{x-2} \ldots + L[X_x]^{n} y_{x-n};$$

on aura $y_x = [X_x]^{x} z_x$, d'où il suit que le terme général de la série

$$y_x, \quad y_{x+1}, \quad y_{x+2}, \ldots$$

sera donné par le moyen de celui de la série beaucoup plus simple

$$z_x, \quad z_{x+1}, \quad z_{x+2}, \quad \text{etc.},$$

dont un terme quelconque se forme d'un nombre n des précédens, multipliés chacun par une quantité constante.

Nous observerons que cette dernière est le type général de celles que les analystes ont nommées *séries récurrentes*. Elles jouissent d'un très-grand nombre de belles propriétés; on a déjà vu, dans le *Complément des Élémens d'Algèbre,* qu'elles tirent leur origine du développement en série des fractions rationnelles, et nous reviendrons encore sur ce sujet dans la suite.

L'équation $y_x = [X_x]^{x} z_x$ fait voir que l'on satisferait à

$$y_x = A[X_x]^{1} y_{x-1} + B[X_x]^{2} y_{x-2} \ldots + L[X_x]^{n} y_{x-n},$$

en prenant $y_x = [X_x]^{x} a^x$; il peut être utile de se rappeler cette circonstance, facile à reconnaître d'ailleurs lorsqu'on est exercé dans l'Analyse, parce qu'elle conduit immédiatement à l'intégrale par le moyen de la méthode du n° 1040.

Nous avons supprimé le dernier terme V_x dans l'équation proposée; si on voulait restituer cette fonction, on arriverait à l'intégrale, au moyen de la valeur de y_x trouvée ci-dessus, que l'on substituerait à z_x dans les formules du n° 1043.

1051. On peut encore déduire de l'équation en p_x du n° 1046, d'autres cas d'intégrabilité pour les équations du premier degré aux différences. En s'arrêtant, par exemple, au deuxième ordre, on a

$$[p_{x+1}]^{1}-P_x[p_x]^{1}-Q_x=0, \quad \text{ou} \quad p_{x+1}p_x-P_xp_x-Q_x=0,$$

équation de laquelle on tire

$$P_x=p_{x+1}-\frac{Q_x}{p_x},$$

et qui change par conséquent la proposée en

$$y_{x+2}=\left(p_{x+1}-\frac{Q_x}{p_x}\right)y_{x+1}+Q_xy_x+V_x,$$

équation intégrable, quelles que soient les fonctions p_x et Q_x. Si l'on fait $p_x=m$, m désignant une constante, il viendra

$$y_{x+2}=\left(m-\frac{Q_x}{m}\right)y_{x+1}+Q_xy_x+V_x.$$

Il est visible que toute équation de la forme

$$Y_xy_x=A[X_x]^{1}Y_{x-1}y_{x-1}+B[X_x]^{2}Y_{x-2}y_{x-2}\ldots+L[X_x]^{n}Y_{x-n}y_{x-n}+V_x$$

rentre dans celle que nous avons considérée numéro précédent, en y faisant $Y_xy_x=y'_x$.

Voici une équation qui semble indéfinie, ou dont l'ordre dépend de la valeur de la variable x, et qui pourtant se ramène à la forme de celles du n° 1039; cette équation est

$$\begin{aligned}y_x = {} & P_{x-1}y_{x-1}+Q_{x-2}y_{x-2}+R_{x-3}y_{x-3}+V_x\\ & +P_{x-4}y_{x-4}+Q_{x-5}y_{x-5}+R_{x-6}y_{x-6}\\ & +P_{x-7}y_{x-7}+Q_{x-8}y_{x-8}+R_{x-9}y_{x-9}\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +P_3\,y_3\quad+Q_2\,y_2\quad+R_1\,y_1:\end{aligned}$$

un terme quelconque y_x s'y trouve rapporté à tous ceux qui le précèdent, mais avec cette condition, que les fonctions P, Q, R, qui mul-

tiplient ces termes, reviennent les mêmes de trois en trois. On tire de là cette équation :

$$\begin{aligned} y_{x-3} = {} & P_{x-4}y_{x-4} + Q_{x-5}y_{x-5} + R_{x-6}y_{x-6} + V_{x-3} \\ & + P_{x-7}y_{x-7} + Q_{x-8}y_{x-8} + R_{x-9}y_{x-9} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + P_3\ y_3 \quad + Q_2\ y_2 \quad + R_1\ y_1; \end{aligned}$$

en la retranchant de la proposée, on a

$$y_x - y_{x-3} = P_{x-1}y_{x-1} + Q_{x-2}y_{x-2} + R_{x-3}y_{x-3} + V_x - V_{x-3},$$

ou

$$y_x \quad = P_{x-1}y_{x-1} + Q_{x-2}y_{x-2} + (R_{x-3}+1)y_{x-3} + V_x - V_{x-3}.$$

Cet exemple suffit pour montrer comment il faut traiter les équations du genre de la précédente, que l'on pourrait nommer *équations périodiques*.

Nous terminerons cet article en faisant observer que les équations de la forme

$$y_x = V_x y^{\alpha}_{x-1} y^{\beta}_{x-2} y^{\gamma}_{x-3} \dots\dots y^{\nu}_{x-n},$$

se ramènent, par le moyen des logarithmes, à une équation du premier degré; on en tire, en effet,

$$\mathrm{l}y_x = \mathrm{l}V_x + \alpha\,\mathrm{l}y_{x-1} + \beta\,\mathrm{l}y_{x-2} + \gamma\,\mathrm{l}y_{x-3} \dots\dots + \nu\,\mathrm{l}y_{x-n};$$

et faisant $\mathrm{l}y_x = y'_x$, il vient

$$y'_x = \alpha y'_{x-1} + \beta y'_{x-2} + \gamma y'_{x-3} \dots\dots + \nu y'_{x-n} + \mathrm{l}\,V_x.$$

En intègrant cette équation, on aura donc le terme général des séries dont chaque terme se forme du produit d'un certain nombre de ceux qui le précèdent.

1052. On intègre aussi les équations aux différences, par la méthode des coefficiens indéterminés, lorsqu'on peut découvrir au moins quelques parties de la loi que suivent les valeurs successives de la fonction cherchée. Soit l'équation aux différences

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{n-1}(\alpha_n u \quad + \beta_n) \\ & + y_{n-2}(\alpha'_n u^2 + \beta'_n u \quad + \gamma'_n) \\ & + y_{n-3}(\alpha''_n u^3 + \beta''_n u^2 + \gamma''_n u + \delta''_n) \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

dans laquelle u est une constante, et α_n, β_n, α'_n, etc., sont des fonctions de la variable indépendante n; si l'on en déduit successivement

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0,\\
y_1 &= A_1 u + B_1,\\
y_2 &= A_2 u^2 + B_2 u + C_2,\\
y_3 &= A_3 u^3 + B_3 u^2 + C_3 u + D_3,
\end{aligned}$$

on supposera en général,

$$y_n = A_n u^n + B_n u^{n-1} + C_n u^{n-2} + \text{etc.};$$

et substituant cette expression dans l'équation proposée, on aura

$$\begin{aligned}
& A_n\ u^n + B_n\ u^{n-1} + C_n\ u^{n-2} + \text{etc.}\\
= & (A_{n-1}u^{n-1} + B_{n-1}u^{n-2} + C_{n-1}u^{n-3} + \text{etc.})(\alpha_n u + \beta_n)\\
+ & (A_{n-2}u^{n-2} + B_{n-2}u^{n-3} + C_{n-2}u^{n-4} + \text{etc.})(\alpha'_n u^2 + \beta'_n u + \gamma'_n)\\
+ & (A_{n-3}u^{n-3} + B_{n-3}u^{n-4} + C_{n-3}u^{n-5} + \text{etc.})(\alpha''_n u^3 + \beta''_n u^2 + \gamma''_n u + \delta''_n)\\
+ & \text{etc.};
\end{aligned}$$

comparant entr'eux les termes affectés des mêmes puissances de u, on obtiendra

$$\begin{aligned}
A_n = {} & \alpha_n A_{n-1} + \alpha'_n A_{n-2} + \alpha''_n A_{n-3} + \text{etc.},\\
B_n = {} & \alpha_n B_{n-1} + \alpha'_n B_{n-2} + \alpha''_n B_{n-3} + \text{etc.}\\
& + \beta_n A_{n-1} + \beta'_n A_{n-2} + \beta''_n A_{n-3} + \text{etc.},\\
C_n = {} & \alpha_n C_{n-1} + \alpha'_n C_{n-2} + \alpha''_n C_{n-3} + \text{etc.}\\
& + \beta_n B_{n-1} + \beta'_n B_{n-2} + \beta''_n B_{n-3} + \text{etc.}\\
& + \gamma'_n A_{n-2} + \gamma''_n A_{n-3} + \text{etc.},\\
& \text{etc.};
\end{aligned}$$

et lorsqu'on pourra intégrer chacune de ces équations, on aura l'expression générale de y_n. Voici deux exemples qui feront bien connaître le parti que l'on peut tirer de cette méthode.

On a

$$\sin(n+1)x = 2\cos x \sin nx - \sin(n-1)x \quad (\textit{Introd. } 49);$$

changeant n en $n-1$, il viendra

$$\sin nx = 2\cos x \sin(n-1)x - \sin(n-2)x;$$

et faisant $\sin nx = y_n$ et $\cos x = u$, on formera l'équation

$$y_n = 2uy_{n-1} - y_{n-2},$$

de laquelle on tirera successivement

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1(\ 2u), \\ y_3 &= y_1(\ 4u^2 - 1), \\ y_4 &= y_1(\ 8u^3 - 4u), \\ y_5 &= y_1(16u^4 - 12u^2 + 1), \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

on donnera donc à la valeur de y_n cette forme :

$$y_n = y_1(A_n u^{n-1} + B_n u^{n-3} + C_n u^{n-5} + \text{etc}).$$

Substituant pour y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, leurs valeurs, et comparant entr'eux, dans l'équation résultante, les termes affectés de la même puissance de u, on obtiendra les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_n &= 2A_{n-1}, \\ B_n &= 2B_{n-1} - A_{n-2}, \\ C_n &= 2C_{n-1} - B_{n-2}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

qui ne sont que du premier ordre, et qui conduisent très-simplement aux valeurs des coefficiens A_n, B_n, C_n, etc. ; mais pour en faire usage, il faut observer qu'elles ne commencent à exister que successivement, parce que l'équation proposée laissant arbitraires les valeurs de y_0 et de y_1, l'équation qui détermine les A ne peut commencer qu'à $n=2$, ce qui fait que l'indice de A ne peut être au-dessous de 1. Par cette raison, l'équation qui détermine les B ne commence qu'à $n=3$, et le plus petit indice de cette lettre est 2. De même, l'équation qui détermine les C ne commence qu'à $n=4$, et ainsi de suite.

Cela posé, en intégrant la première, il vient $A_n = 2^n C'$, C' étant la constante arbitraire; et comme on doit avoir $A_1 = 1$, il en résulte $C' = \frac{1}{2}$, d'où $A_n = 2^{n-1}$, ce qui donne $A_{n-2} = 2^{n-3}$. Par cette valeur, l'équation en B devient $B_n = 2B_{n-1} - 2^{n-3}$, et son intégrale sera

$$B_n = 2^n(C'' - \tfrac{1}{8}\Sigma 1) = 2^n(C'' - \tfrac{1}{8}n) \text{ (1038 et 1048)},$$

ou $B_n = -2^{n-3}(C'' + n)$, en changeant la constante arbitraire C'' en $-\frac{1}{8}C''$. Pour déterminer la constante C'', il faut faire $n=2$ et $B_2=0$, puisque l'équation en B ne commence que lorsque $n=3$, et on trouve $\frac{1}{2}(C''+2)=0$, ou $C''=-2$, d'où il résulte $B_n = -2^{n-3}(n-2)$.

Cette détermination donne $B_{n-2} = -2^{n-5}(n-4)$; et si l'on substitue cette valeur dans celle de C_n, on aura l'équation

$$C_n = 2C_{n-1} + 2^{n-5}(n-4),$$

dont l'intégrale sera

$$\begin{aligned} C_n &= 2^n\left(C''' + \Sigma\,\frac{2^{n-4}(n-3)}{2^{n+1}}\right) = 2^n\left[C''' + \tfrac{1}{2^5}\Sigma(n-3)\right] \\ &= 2^n\left(C''' + \tfrac{1}{2^5}\,\frac{n^2-7n}{2}\right) = 2^{n-5}\left(C''' + \frac{n^2-7n}{2}\right), \end{aligned}$$

en changeant de constante arbitraire. La valeur de C ne commençant que lorsque $n=4$, on doit avoir $C_3=0$, condition de laquelle on tire $\frac{1}{2^2}(C'''-6)=0$, ou $C'''=6$, et d'où il résulte

$$C_n = 2^{n-5}\left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right) = 2^{n-5}\,\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}.$$

On trouvera de même les autres coefficiens; et, sans avoir recours à l'induction, on parviendra au développement

$$\sin nx = \sin x \left\{ \begin{aligned} &2^{n-1}\cos x^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos x^{n-5} \\ &- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos x^{n-7} + \text{etc.} \end{aligned} \right\},$$

indiqué sur la page 80 du premier volume (*).

1053. L'équation $y_n = 2uy_{n-1} - y_{n-2}$ se rapporte à celle du n° 1040, car u y est regardé comme constant; en y faisant donc $y_n = m^n$, on parvient à l'équation

$$m^2 = 2um - 1,$$

de laquelle on tire $m = u \pm \sqrt{u^2-1}$, et par conséquent

$$y_n = C'(u+\sqrt{u^2-1})^n + C''(u-\sqrt{u^2-1})^n;$$

(*) On trouverait d'une manière analogue celui de $\cos nx$ rapporté sur la même page; mais on a vu sur la page 81, que ces développemens ne conviennent qu'aux cas où le nombre n est entier et positif; c'est pourquoi je ne m'y arrete point ici, devant d'ailleurs reprendre ce sujet, dans les Additions au premier volume, pour corriger une erreur qui se trouve à la page 88, et qui est fondée sur une méprise d'Euler, que M. Poisson a reconnue le premier.

remettant pour u sa valeur $\cos x$, et changeant y_n en $\sin nx$, il viendra

$$\sin nx = C'(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + C''(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires, il faut observer qu'on a $\sin nx = 0$, lorsque $n = 0$, et $\sin nx = \sin x$, lorsque $n = 1$, ce qui donne les deux équations

$$0 = C' + C'',$$
$$\sin x = C'(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) + C''(\cos x - \sqrt{-1}\sin x),$$

qui mènent à

$$C' = \frac{1}{2\sqrt{-1}}, \qquad C'' = -\frac{1}{2\sqrt{-1}},$$
$$\sin nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2\sqrt{-1}},$$

résultat conforme à celui du n° 47 de l'Introduction.

1054. Pour achever d'éclaircir l'application du Calcul aux différences à la recherche des lois que suivent les formules, nous en donnerons encore un second exemple sur l'expression

$$d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = d^n.\text{arc}\,(\sin = x).$$

En faisant, pour abréger, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = u$, on trouve d'abord

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad \text{etc.};$$

d'où l'on doit conclure qu'en général

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{A_nx^n + B_nx^{n-2} + C_nx^{n-4} + D_nx^{n-6} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}};$$

et différentiant cette dernière expression, on obtient

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \left\{\frac{(n+1)A_nx^{n+1} + \left.\begin{matrix}(n+3)B_n\\ +nA_n\end{matrix}\right|x^{n-1} + \left.\begin{matrix}(n+5)C_n\\ +(n-2)B_n\end{matrix}\right|x^{n-3} + \left.\begin{matrix}(n+7)D_n\\ +(n-4)C_n\end{matrix}\right|x^{n-5} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}\right\},$$

dont la comparaison avec

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^{n-1} + C_{n+1}x^{n-3} + D_{n+1}x^{n-5} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}},$$

donne les équations suivantes,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (n+1)A_n, \\ B_{n+1} &= (n+3)B_n + nA_n, \\ C_{n+1} &= (n+5)C_n + (n-2)B_n, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Toutes ces équations ont la même origine, et l'on peut en conséquence supposer dans toutes $n = 1$. La première, $A_{n+1} = (n+1)A_n$, a pour intégrale $A_n = [n]^{n}$, à cause que $A_1 = 1$. La seconde, devenant alors $B_{n+1} = (n+3)B_n + n[n]^{n}$, a pour intégrale (1038),

$$\begin{aligned} B_n &= [n+2]^{n}\left\{C' + \Sigma \frac{n[n]^{n}}{[n+3]^{n+1}}\right\} \\ &= [n+2]^{n}\left\{C' + 1.2\Sigma \frac{n}{[n+3]^{3}}\right\} \\ &= [n+2]^{n}\{C' + 1.2\Sigma n[n]^{-3}\}; \end{aligned}$$

et comme

$$\Sigma n[n]^{-3} = -\frac{n[n]^{-2}}{2} - \frac{[n+1]^{-1}}{1.2} = -\frac{n}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)}\ (959),$$

on aura

$$B_n = [n+2]^{n}\left\{C' - \frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+2}\right\},$$

expression dans laquelle il faudra déterminer C', par la condition que B_n soit nul lorsque $n = 1$; on trouvera ainsi $C' = \frac{1}{2}$, et

$$B_n = [n]^{n-2}\frac{(n^2-n)}{2} = [n]^{n}\frac{1}{2}\frac{[n]^{2}}{1.2} = [n]^{n}[\tfrac{1}{2}]^{1}[0]^{-1}[n]^{2}[0]^{-2}.$$

Les valeurs de C_n, D_n et des coefficiens ultérieurs, s'obtiendront de la même manière; on aura

$$\begin{aligned} C_n &= [n]^{n}.\frac{1.3}{2.4}[n]^{4}[0]^{-4} = [n]^{n}[\tfrac{3}{2}]^{2}[0]^{-2}[n]^{4}[0]^{-4}, \\ D_n &= [n]^{n}.\frac{1.3.5}{2.4.6}[n]^{6}[0]^{-6} = [n]^{n}[\tfrac{5}{2}]^{3}[0]^{-3}[n]^{6}[0]^{-6}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

en changeant n en $n-1$, on en conclura

$$\frac{d^n \operatorname{arc}(\sin = x)}{dx^n} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} =$$

$$\frac{[n-1]^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}\{x^{n-1} + [\tfrac{1}{2}]^{1}[0]^{-1}[n-1]^{2}[0]^{-2}x^{n-3} + [\tfrac{3}{2}]^{2}[0]^{-2}[n-1]^{4}[0]^{-4}x^{n-5}$$

$$+ [\tfrac{5}{2}]^{3}[0]^{-3}[n-1]^{6}[0]^{-6}x^{n-7} + [\tfrac{7}{2}]^{4}[0]^{-4}[n-1]^{8}[0]^{-8}x^{n-9} + \text{etc.}\}.$$

1055. M. Laplace a montré (*Mécan. cél.*, t. IV, p. 254.) qu'on pouvait convertir en fraction continue, une équation du premier degré et du second ordre aux différences, et que pour cela il suffisait d'opérer comme il suit. Soit

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n y_{n+2}$$

cette équation; on en tire d'abord

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha_n + \beta_n \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}};$$

puis renversant la fraction qui forme le premier membre, et changeant ensuite n en $n+1$, $n+2$, etc., on obtient les valeurs

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}}, \quad \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{1}{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\frac{y_{n+3}}{y_{n+2}}}, \quad \text{etc.},$$

par la substitution successive desquelles on forme la fraction continue

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \cfrac{1}{\alpha_n + \cfrac{\beta_n}{\alpha_{n+1} + \cfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+2} + \text{etc.}}}}.$$

Si l'on prend pour exemple particulier l'équation

$$y_n = y_{n+1} + (n+1)ay_{n+2},$$

on en déduira

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{(n+1)a}{1 + \cfrac{(n+2)a}{1 + \cfrac{(n+3)a}{1 + \text{etc.}}}}}, \quad \text{et lorsque } n = 0, \quad \frac{y_1}{y_0} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{2a}{1 + \cfrac{3a}{1 + \text{etc.}}}}},$$

fractions qui expriment, sous une forme très-élégante, le rapport de deux

valeurs consécutives de la fonction déterminée par l'équation proposée : on verra dans la suite à quelles séries correspondent ces fractions continues.

1056. Jusqu'ici nous avons toujours supposé que l'accroissement de la variable indépendante x était constant : cela n'aurait plus lieu s'il fallait, par exemple, trouver une fonction de x, désignée par $\varphi(x)$, telle qu'en y mettant successivement $f(x)$ et $F(x)$ au lieu de x, on eût Des équations où la différence de la variable indépendante n'est pas constante.

$$\varphi[F(x)] = P_z\varphi[f(x)] + Q_z,$$

$f(x)$, $F(x)$, P_z et Q_z, étant des fonctions données de x; mais, par un procédé très-simple, M. Laplace ramène cette question à l'intégration d'une équation aux différences, dans laquelle l'accroissement de la variable indépendante est constant. Il fait $f(x)=u_z$, $F(x)=u_{z+1}$, u_z représentant une fonction inconnue de la variable z; et puisque $f(x)$ est connue, on peut, en supposant l'équation algébrique $f(x)=u_z$ résoluble par rapport à x, tirer de là $x=f_i(u_z)$, valeur qui transforme l'équation $F(x)=u_{z+1}$ en cette autre $u_{z+1}=F[f_i(u_z)]$.

Lorsqu'on saura intégrer cette équation, on aura l'expression de u_z en fonction de z, au moyen de laquelle on obtiendra aussi x en fonction de z; les fonctions $\varphi[F(x)]$ et $\varphi[f(x)]$ deviendront respectivement $\varphi(u_{z+1})$, $\varphi(u_z)$, et l'on pourra les représenter par y_{z+1}, y_z, d'où il résultera une équation de la forme

$$y_{z+1} = P_z y_z + Q_z,$$

dans laquelle la variable indépendante z ne croîtra que de l'unité. Après la détermination de y_z, on y substituera la valeur de z en x, pour passer à l'expression de $\varphi[f(x)]$, que l'on ramènera à celle de $\varphi(x)$, en y changeant $f(x)$ en x.

Pour donner un exemple de la recherche précédente, faisons....... $f(x)=mx$, $F(x)=x^q$, et supposons que l'on doive trouver

$$\varphi(x^q) = \varphi(mx) + Q,$$

Q étant une constante. En posant $u_z=mx$, $u_{z+1}=x^q$, on formera l'équation $u_{z+1}=\frac{u_z^q}{m^q}$, qu'on transformera, par le moyen des logarithmes, en $1u_{z+1}=q1u_z-q1m$; et traitant $1u_z$ comme la fonction cherchée, on trouvera, par l'intégration,

$$\mathrm{l}\,u_z = q^z\left(C' - \Sigma\frac{\mathrm{l}\,m}{q^z}\right) = q^z\left(C' - \frac{q^{-z}\,\mathrm{l}\,m}{q^{-1}-1}\right) = q^z\left(C' - \frac{\mathrm{l}\,m}{q^{z-1}(1-q)}\right).$$

Pour déterminer la constante, soit $u_1 = a$; il viendra

$$\mathrm{l}\,a = q\left(C' - \frac{\mathrm{l}\,m}{1-q}\right), \quad \text{d'où} \quad C' = \frac{1}{q}\left(\mathrm{l}\,a + q\,\frac{\mathrm{l}\,m}{1-q}\right),$$

$$\mathrm{l}\,u_z = q^z\left(C' - \frac{\mathrm{l}\,m}{q^{z-1}(1-q)}\right) = q^{z-1}\,\mathrm{l}\,a + \frac{q^z\,\mathrm{l}\,m}{1-q} - \frac{q\,\mathrm{l}\,m}{1-q} = q^{z-1}\,\mathrm{l}\,a - \frac{q^z-q}{q-1}\,\mathrm{l}\,m,$$

et enfin, en passant aux nombres, $u_z = \dfrac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{q^z-q}{q-1}}}$.

Posant ensuite $\varphi(mx) = y_z$ et $\varphi(x^q) = y_{z+1}$, on a $y_{z+1} = y_z + Q$, équation dont l'intégrale est $y_z = C' + \Sigma Q = C' + Qz$; on en conclut $\varphi(mx) = C' + Qz$, et il ne reste plus qu'à exprimer z en x, par le moyen de l'équation $u_z = mx = \dfrac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{q^z-q}{q-1}}}$. En reprenant les logarithmes, nous obtiendrons

$$\mathrm{l}\,mx = q^{z-1}\,\mathrm{l}\,a - \frac{q^z-q}{q-1}\,\mathrm{l}\,m,$$

résultat que nous mettrons sous la forme

$$\mathrm{l}\,mx = \frac{q^z\,\mathrm{l}\,a}{q} - \frac{q^z-q}{q-1}\,\mathrm{l}\,m = q^z\left(\frac{\mathrm{l}\,a}{q} - \frac{\mathrm{l}\,m}{q-1}\right) + \frac{q\,\mathrm{l}\,m}{q-1},$$

et d'où nous tirerons alors

$$q^z\left(\frac{\mathrm{l}\,a}{q} - \frac{\mathrm{l}\,m}{q-1}\right) = \mathrm{l}\,mx - \frac{q\,\mathrm{l}\,m}{q-1} = \mathrm{l}\,\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}.$$

Si nous faisons, pour abréger, $\dfrac{\mathrm{l}\,a}{q} - \dfrac{\mathrm{l}\,m}{q-1} = b$, nous aurons

$$q^z = \frac{1}{b}\,\mathrm{l}\,\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}, \qquad z = \frac{1}{\mathrm{l}\,q}\left\{\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}\,b\right\},$$

et par conséquent

$$y_z = \varphi(mx) = C' + \frac{Q}{\mathrm{l}\,q}\left\{\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}\,b\right\}.$$

Si l'on écrit simplement x, au lieu de mx, on obtiendra pour der-

nier résultat

$$\varphi(x) = C' + \frac{Q}{\mathrm{l}q}\left\{\mathrm{l}\,\mathrm{l}\frac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}b\right\}.$$

Occupons-nous encore de l'équation

$$\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2;$$

nous ferons, dans cet exemple, $u_s = x$, $u_{s+1} = 2x$, et nous aurons en conséquence $u_{s+1} = 2u_s$, d'où nous déduirons $u_s = C.2^s = x$; posant ensuite $\varphi(x) = y_s$ et $\varphi(2x) = y_{s+1}$, l'équation à intégrer sera

$$y_{s+1} = y^2_s - 2.$$

Si l'on suppose d'abord $y_1 = a + \frac{1}{a}$, on trouvera

$$y_2 = a^2 \quad + \frac{1}{a^2},$$
$$y_3 = a^4 \quad + \frac{1}{a^4},$$
$$y_4 = a^8 \quad + \frac{1}{a^8},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_s = a^{2^{s-1}} + \frac{1}{a^{2^{s-1}}}.$$

La dernière de ces valeurs est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme une première valeur arbitraire a; et l'équation $C.2^s = x$ donnant $2^{s-1} = \frac{x}{2C}$, on aura

$$y_s = \varphi(x) = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

résultat qui revient à

$$\varphi(x) = b^x + b^{-x},$$

si l'on pose $b = a^{\frac{1}{2C}}$ (*).

(*) Daviet de Foncenex avait cru que l'équation $\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2$ ne pouvait être résolue qu'en supposant $\varphi(x)$ égale à une constante (*Mélanges de Turin*, tom. II, pag. 320); ce qui précède montre au contraire qu'elle a une infinité de solutions indéterminées. Nous remarquerons ici que l'on serait parvenu à la même conclusion que

1057. La même méthode s'applique sans difficulté aux équations des ordres supérieurs; soit, par exemple, l'équation

$$y_{a^n x} + P_x y_{a^{n-1} x} + Q_x y_{a^{n-2} x} \ldots\ldots + T_x y_{ax} + U_x y_x = V_x,$$

dans laquelle les valeurs

$$y_{a^n x}, \quad y_{a^{n-1} x}, \quad y_{a^{n-2} x}, \ldots\ldots y_{ax}, \quad y_x,$$

répondent aux quantités

$$a^n x, \quad a^{n-1} x, \quad a^{n-2} x, \ldots\ldots ax, \quad x.$$

En faisant $x = u_z$, on aura $ax = u_{z+1}$, d'où l'on tirera $u_{z+1} = au_z$ et $u_z = Ca^z$, en intégrant. On peut prendre $C = 1$; il viendra en conséquence $x = a^z$; et avec cette expression de x, on transformera P_x, $Q_x, \ldots T_x$, U_x et V_x, en fonctions de z : on écrira ensuite y_{z+n}, y_{z+n-1}, etc., au lieu de $y_{a^n x}$, $y_{a^{n-1} x}$, etc., et par ce moyen, l'équation proposée sera ramenée à celle du n° 1039.

---

ci-dessus, en faisant

$$\varphi(x) = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{etc.},$$

d'où il serait résulté l'équation

$$\left.\begin{matrix} A^2 + 2ABx^2 + 2AC \\ \quad\quad\quad\;\; + B^2 \end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right| x^6 + \text{etc.} \Big\} = \Big\{ \begin{matrix} A + 4Bx^2 + 16Cx^4 + 64Dx^6 + \text{etc.}\,; \\ +2 \end{matrix}$$

de laquelle on aurait tiré

$$A^2 = A + 2, \quad 2AB = 4B, \quad 2AC + B^2 = 16C, \text{ etc.}$$

Les racines de la première de ces équations sont $A = 2$, $A = -1$; la seconde équation $2AB = 4B$, réduite à $A = 2$, s'accorde avec l'une de ces racines et laisse B indéterminé ; on trouve ensuite

$$C = \frac{B^2}{12} = \frac{2B^2}{1.2.3.4}, \quad D = \frac{2BC}{60} = \frac{2B^3}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc.},$$

ce qui conduit à la série

$$\varphi(x) = 2 + \frac{2B}{1.2} x^2 + \frac{2B^2}{1.2.3.4} x^4 + \frac{2B^3}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \text{etc.},$$

équivalente à

$$\left.\begin{matrix} \varphi(x) = 1 + \dfrac{B^{\frac{1}{2}}x}{1} + \dfrac{Bx^2}{1.2} + \dfrac{B^{\frac{3}{2}}x^3}{1.2.3} + \dfrac{B^2x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \\ + 1 - \dfrac{B^{\frac{1}{2}}x}{1} + \dfrac{Bx^2}{1.2} - \dfrac{B^{\frac{3}{2}}x^3}{1.2.3} + \dfrac{B^2x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \end{matrix}\right\} = e^{B^{\frac{1}{2}}x} + e^{-B^{\frac{1}{2}}x}.$$

En supposant que les coefficiens P, Q,..... T, U, soient constans, la transformée sera seulement

$$y_{z+n} + Py_{z+n-1} + Qy_{z+n-2} \ldots + Ty_{z+1} + Uy_z = V_z,$$

son intégration ne dépendra que de celle de l'équation

$$y_{z+n} + Py_{z+n-1} + Qy_{z+n-2} \ldots + Ty_{z+1} + Uy_z = 0;$$

à laquelle on satisfait en prenant $y_z = m^z$, m étant l'une des racines de

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots + Tm + U = 0 \quad (1040),$$

ce qui donne

$$y_z = C'm'^z + C''m''^z + C'''m'''^z + \text{etc.}$$

Pour revenir de cette expression de y_z à celle de y_x, il suffit de mettre, au lieu de z, sa valeur en x; or, par l'équation $x = a^z$, on a $z = \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a}$; et en observant que $m'^z = e^{z\,\mathrm{l}m'}$, il en résulte.........
$m'^z = e^{\frac{\mathrm{l}m'}{\mathrm{l}a}\mathrm{l}x} = x^{\frac{\mathrm{l}m'}{\mathrm{l}a}}$, d'où l'on conclut

$$y_x = C'x^{\frac{\mathrm{l}m'}{\mathrm{l}a}} + C''x^{\frac{\mathrm{l}m''}{\mathrm{l}a}} + C'''x^{\frac{\mathrm{l}m'''}{\mathrm{l}a}} + \text{etc.}$$

Telle est l'intégrale complète de l'équation

$$y_{a^n x} + Py_{a^{n-1} x} + Qy_{a^{n-2} x} \ldots + Ty_{ax} + Uy_x = 0,$$

donnée par M. Paoli, dans ses *Opuscules*. Il y est parvenu en faisant $y_x = \alpha x^\mu$, substitution d'où il résulte

$$y_{ax} = \alpha a^\mu x^\mu, \quad y_{a^2 x} = \alpha a^{2\mu} x^\mu, \ldots . y_{a^n x} = \alpha a^{n\mu} x^\mu,$$

et qui change par conséquent la proposée en

$$a^{n\mu} + Pa^{(n-1)\mu} + Qa^{(n-2)\mu} \ldots + Ta^\mu + U = 0.$$

Le coefficient α demeure arbitraire; et si l'on pose $a^\mu = m$, on aura, pour déterminer m, la même équation que ci-dessus, puis $\mu = \frac{\mathrm{l}m}{\mathrm{l}a}$, ce qui rentre dans l'intégrale précédente. Il y aurait à faire sur cette équation des remarques analogues à celles du n° 1043; elles ont été développées par M. Paoli, mais nous ne saurions nous y arrêter, non plus qu'à intégrer l'équation

$$y_{a^n x} + Py_{a^{n-1}x} + Qy_{a^{n-2}x} \ldots + Ty_{ax} + Uy_x = V_x,$$

opération qui se réduit d'ailleurs à déterminer C', C'', etc., dans la valeur de y_x, suivant la méthode du n° 1044.

Détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations différentielles partielles.

1058. C'est aux méthodes que nous venons d'exposer que se ramène en général la détermination, d'après des conditions données, des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, et dont nous avons traité quelques cas particuliers dans les n°s 806 et 807. Voici à peu près comme M. Monge a présenté cette recherche.

Soit $Z = M\varphi(U) + N\psi(V)$ l'intégrale d'une équation différentielle partielle, Z désignant une fonction des trois variables x, y, z; et M, N, U, V, des fonctions de x, y seulement. Supposons que les fonctions arbitraires indiquées par les caractéristiques φ et ψ, doivent se déterminer par les conditions,

1°. qu'en faisant $y = \mathrm{f}(x)$ on ait $z = \mathrm{F}(x)$,
2°. qu'en faisant $y = \mathrm{f}_1(x)$ on ait $z = \mathrm{F}_1(x)$;

si l'on représente par M', N', U', V', Z', ce que deviennent les fonctions M, N, U, V, Z, dans la première hypothèse, et par M'_1, N'_1, U'_1, V'_1, Z'_1, leurs valeurs dans la seconde, on aura ces deux équations

$$Z' = M'\varphi(U') + N'\psi(V'),$$
$$Z'_1 = M'_1\varphi(U'_1) + N'_1\psi(V'_1);$$

faisant dans la première $V' = v$, on déduira de celle-ci une valeur de x en v, au moyen de laquelle on changera M', N', U' et Z', en fonctions de v; et en les désignant dans ce nouvel état par M'', N'', U'', Z'', on aura

$$Z'' = M''\varphi(U'') + N''\psi(v);$$

posant ensuite $V'_1 = v$, on obtiendra de la même manière un résultat de la forme

$$Z''_1 = M''_1\varphi(U''_1) + N''_1\psi(v);$$

éliminant $\psi(v)$, entre cette équation et la précédente, il viendra l'équation

$$\frac{Z''_1}{N''_1} - \frac{Z''}{N''} = \frac{M''_1}{N''_1}\varphi(U''_1) - \frac{M''}{N''}\varphi(U''),$$

que l'on convertira en une équation aux différences, en prenant $U'' = u$,

$U''_{,}=u_{,}$; $\varphi(U'')=t$ et $\varphi(U''_{,})=t_{,}$. On déduira de là une relation entre $u_{,}$ et u, ou l'expression de Δu en u; on tirera aussi de l'équation $U''=u$ une valeur de v en u, pour la substituer dans M'', N'', Z'', $M''_{,}$, $N''_{,}$, $Z''_{,}$, et l'on formera par ce moyen une équation aux différences entre la fonction t et la variable indépendante u. L'exemple suivant éclaircira ce procédé.

Soit l'équation
$$z=\varphi(ax-y)+\psi(bx-y),$$
dans laquelle on se propose de déterminer les fonctions arbitraires φ et ψ par les conditions,

1°. qu'en faisant $y=Ax$, on ait $z=Bx^m$,
2°. $y=Cx$, $z=Dx^n$.

Par la substitution de ces valeurs, l'équation proposée devient successivement
$$Bx^m=\varphi[(a-A)x]+\psi[(b-A)x],$$
$$Dx^n=\varphi[(a-C)x]+\psi[(b-C)x];$$
posant $(b-A)x=v$ dans la première de celles-ci, et $(b-C)x=v$ dans la seconde, on trouve
$$x=\frac{v}{b-A},\qquad x=\frac{v}{b-C},$$
et on les change par ce moyen en
$$\frac{Bv^m}{(b-A)^m}=\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right)+\psi(v);$$
$$\frac{Dv^n}{(b-C)^n}=\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right)+\psi(v);$$
on en déduit ensuite
$$\frac{Dv^n}{(b-C)^n}-\frac{Bv^m}{(b-A)^m}=\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right)-\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right);$$
et faisant
$$\frac{a-A}{b-A}v=u,\qquad \frac{a-C}{b-C}v=u_{,},$$
on obtient premièrement l'équation
$$\frac{(b-C)u_{,}}{a-C}=\frac{(b-A)u}{a-A},$$

puis on transforme l'équation contenant la fonction φ, en cette autre

$$\frac{D(b-A)^n u^n}{(a-A)^n(b-C)^n}-\frac{Bu^m}{(a-A)^m}=t_1-t.$$

Cette dernière équation s'intégrerait facilement par le procédé du n° 1056; mais on peut encore en tirer plus simplement la valeur de t, en substituant Δt à t_1-t, d'où il résulte

$$t=\frac{D(b-A)^n}{(a-A)^n(b-C)^n}\Sigma u^n-\frac{B}{(a-A)^m}\Sigma u^m,$$

en observant que les intégrales Σu^n et Σu^m doivent être prises conformément à la relation qu'établit entre la variable indépendante u et sa différence, l'équation

$$\frac{(b-C)u_1}{a-C}-\frac{(b-A)u}{a-A}=0,$$

qui revient à

$$\frac{b-C}{a-C}\Delta u=\left(\frac{b-A}{a-A}-\frac{b-C}{a-C}\right)u.$$

M. Monge remarque que si l'on a en général $\Delta u=Ku$, K désignant un rapport constant, il vient

$$\Delta . u^m=(u+Ku)^m-u^m=u^m\{(1+K)^m-1\};$$

et il en conclut par conséquent

$$u^m=\frac{\Delta . u^m}{(1+K)^m-1}, \qquad \Sigma u^m=\frac{u^m}{(1+K)^m-1}.$$

Avec le secours de ces formules, on obtient

$$t=\frac{D(b-A)^n}{(a-A)^n(b-C)^n}\,\frac{u^n}{(1+K)^n-1}-\frac{B}{(a-A)^m}\,\frac{u^m}{(1+K)^m-1}+const.;$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{(b-A)(a-C)-(a-A)(b-C)}{(a-A)(b-C)}=\frac{(C-A)(a-b)}{(a-A)(b-C)}=K.$$

Il résulte de là $1+K=\frac{(a-C)(b-A)}{(a-A)(b-C)}$, et

$$\varphi(u)=\frac{D(b-A)^n u^n}{(a-C)^n(b-A)^n-(a-A)^n(b-C)^n}-\frac{B(b-C)^m u^m}{(a-C)^m(b-A)^m-(a-A)^m(b-C)^m}+const.;$$

en remettant $\varphi(u)$, au lieu de t; on a donc ainsi la composition de la fonction arbitraire φ.

Pour arriver à $\psi(u)$, on peut se servir indistinctement de l'une des équations

$$\frac{Bu^m}{(b-A)^m} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A}u\right) + \psi(u),$$
$$\frac{Du^n}{(b-C)^n} = \varphi\left(\frac{a-C}{b-C}u\right) + \psi(u),$$

et on trouvera

$$\psi(u) = \frac{B(a-C)^m u^m}{(a-C)^m(b-A)^m - (a-A)^m(b-C)^m} - \frac{D(a-A)^n u^n}{(a-C)^n(b-A)^n - (a-A)^n(b-C)^n} - const.;$$

on aura donc enfin

$$z = \frac{B(b-C)^m(ax-y)^m - B(a-C)^m(bx-y)^m}{(a-A)^m(b-C)^m - (b-A)^m(a-C)^m}$$
$$+ \frac{D(a-A)^n(bx-y)^n - D(b-A)^n(ax-y)^n}{(a-A)^n(b-C)^n - (b-A)^n(a-C)^n},$$

en écrivant au lieu de u, dans la valeur de $\varphi(u)$, la quantité $ax-y$, et dans celle de $\psi(u)$, la quantité $bx-y$.

Il est bon de remarquer que la valeur précédente de z devient $\frac{0}{0}$, quand $b=a$, parce qu'alors l'équation

$$z = \varphi(ax-y) + \psi(bx-y),$$

qui répond à l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2z}{dx^2} + (a+b)\frac{d^2z}{dxdy} + ab\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

cesse d'en être l'intégrale complète, et qu'on a

$$z = \varphi(ax-y) + x\psi(ax-y) \quad (760);$$

les deux fonctions arbitraires renfermant dans ce cas la même quantité, se déterminent suivant le procédé des nos 331 et suivans.

On voit facilement, par ce qui précède, que la détermination des fonctions arbitraires dans toute équation de la forme

$$z = \varphi(U) + \psi(V),$$

dépendra d'une équation aux différences de la forme

$$\Delta t = W,$$

dans laquelle W est une quantité donnée en u, le rapport de cette variable à sa différence étant aussi donné.

1059. Prenons pour second exemple l'équation

$$z^p = x^s\varphi(ax-y) + y^s\psi(bx-y),$$

et pour conditions, qu'en faisant,

1°. $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$,
2°. $y = Cx$, $z = Dx^n$.

On tire de ces suppositions

$$B^p x^{pm} = x^s\varphi[(a-A)x] + A^s x^s\psi[(b-A)x],$$
$$D^p x^{pn} = x^s\varphi[(a-C)x] + C^s x^s\psi[(b-C)x],$$

d'où, en posant $(b-A)x = v$, $(b-C)x = v$, il suit

$$\frac{B^p v^{pm-s}}{(b-A)^{pm-s}} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A}\,v\right) + A^s\psi(v),$$
$$\frac{D^p v^{pn-s}}{(b-C)^{pn-s}} = \varphi\left(\frac{a-C}{b-C}\,v\right) + C^s\psi(v);$$

et l'élimination de $\psi(v)$, entre ces équations, conduit à

$$\frac{A^s D^p v^{pn-s}}{(b-C)^{pn-s}} - \frac{C^s B^p v^{pm-s}}{(b-A)^{pm-s}} = A^s\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}\,v\right) - C^s\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}\,v\right).$$

Faisons maintenant

$$\frac{a-A}{b-A}\,v = u, \qquad \frac{a-C}{b-C}\,v = u_1,$$

nous aurons

$$\frac{A^s D^p (b-A)^{pn-s} u^{pn-s}}{(a-A)^{pn-s}(b-C)^{pn-s}} - \frac{C^s B^p u^{pm-s}}{(a-A)^{pm-s}} = A^s\varphi(u_1) - C^s\varphi(u),$$

ce qui revient à

$$\frac{D^p (b-A)^{pn-s} u^{pn-s}}{(a-A)^{pn-s}(b-C)^{pn-s}} - \frac{C^s B^p u^{pm-s}}{A^s(a-A)^{pm-s}} = \left(1 - \frac{C^s}{A^s}\right)\varphi(u) + \Delta\varphi(u);$$

la relation entre u et u_1 sera d'ailleurs exprimée par

$$\frac{b-C}{a-C}\,u_1 = \frac{b-A}{a-A}\,u, \quad \text{d'où} \quad \Delta u = \frac{(a-b)(C-A)}{(a-A)(b-C)}\,u.$$

Si l'on prend $t = \varphi(u)$ et $t_1 = \varphi(u_1)$, on aura évidemment, pour dé-

terminer t, une équation aux différences, de la forme

$$t_1 - Gt = Eu^{pn-2} - Fu^{pm-2},$$

dans laquelle G, E, F, désignent des coefficiens constans; et le rapport de la variable indépendante u à sa différence sera donné par une équation de la forme $\Delta u = Ku$, en sorte que, si l'on regarde u comme une fonction indéterminée de la variable z dont la différence est égale à l'unité, on aura l'équation

$$u_{z+1} = (K+1)u_z.$$

Il est très-facile d'appliquer le procédé du n° 1056 à l'intégration de l'équation

$$t_1 - Gt = Eu^{pn-2} - Fu^{pm-2},$$

que, par ce procédé, on transformera d'abord en

$$t_{z+1} - Gt_z = EC'(K+1)^{(pn-2)z} - FC'(K+1)^{(pm-2)z},$$

C' étant une constante arbitraire; mais au lieu de poursuivre ce calcul, nous allons faire connaître un artifice d'Analyse fort élégant, employé par M. Monge.

Nous partirons avec lui des équations

$$Eu^{\alpha} + Fu^{\beta} = G\varphi(u) + \Delta\varphi(u), \qquad \Delta u = Ku,$$

en faisant, pour abréger,

$$1 - \frac{C^2}{A^2} = G, \qquad \frac{D^p(b-A)^{pn-2}}{(a-A)^{pn-2}(b-C)^{pn-2}} = F, \qquad -\frac{C^2B^p}{A^2(a-A)^{pm-2}} = E,$$
$$pn - 2 = \beta, \qquad pm - 2 = \alpha;$$

et en observant que l'équation $\Delta u = Ku$ conduit à

$$\Delta . u^m = [(1+K)^m - 1]u^m \quad (1058),$$

puis à

$$u^m = \frac{\Delta . u^m}{(1+K)^m - 1},$$

nous reconnaîtrons la possibilité d'introduire des différences dans le premier membre de l'équation à intégrer, de manière à donner à ce membre une forme semblable à celle du second. Il suffira, pour cela, de partager les coefficiens E et F en deux parties e et e', f et f', ce qui donnera un résultat

$$eu^{\alpha} + e'u^{\alpha} + fu^{\beta} + f'u^{\beta} = G\varphi(u) + \Delta\varphi(u),$$

qu'on pourra transformer en

$$eu^\alpha + \frac{e'}{(1+K)^\alpha - 1}\,\Delta . u^\alpha + fu^\beta + \frac{f'}{(1+K)^\beta - 1}\,\Delta . u^\beta = G\varphi(u) + \Delta\varphi(u);$$

et si l'on fait

$$e = \frac{e'G}{(1+K)^\alpha - 1}, \qquad f = \frac{f'G}{(1+K)^\beta - 1},$$

il viendra

$$\frac{e'}{(1+K)^\alpha - 1}\{Gu^\alpha + \Delta . u^\alpha\} + \frac{f'}{(1+K)^\beta - 1}\{Gu^\beta + \Delta . u^\beta\}$$
$$= G\varphi(u) + \Delta\varphi(u):$$

on aura, pour déterminer les coefficiens e, e', f, f', les équations

$$e + e' = E, \quad f + f' = F, \quad e = \frac{e'G}{(1+K)^\alpha - 1}, \quad f = \frac{f'G}{(1+K)^\beta - 1};$$

desquelles on tirera

$$e = \frac{EG}{G + (1+K)^\alpha - 1}, \qquad e' = \frac{E[(1+K)^\alpha - 1]}{G + (1+K)^\alpha - 1},$$
$$f = \frac{FG}{G + (1+K)^\beta - 1}, \qquad f' = \frac{F[(1+K)^\beta - 1]}{G + (1+K)^\beta - 1};$$

cela fait, on obtiendra

$$\frac{E}{G + (1+K)^\alpha - 1}\{Gu^\alpha + \Delta . u^\alpha\} + \frac{F}{G + (1+K)^\beta - 1}\{Gu^\beta + \Delta . u^\beta\}$$
$$= G\varphi(u) + \Delta\varphi(u),$$

équation à laquelle il est aisé de voir qu'on satisfait, en prenant

$$\varphi(u) = \frac{Eu^\alpha}{G + (1+K)^\alpha - 1} + \frac{Fu^\beta}{G + (1+K)^\beta - 1} + const.$$

En substituant pour E, F, G et K, leurs valeurs, et laissant toujours α et β, on obtiendra

$$\varphi(u) = \left.\begin{matrix} \dfrac{C^\alpha B^\rho (b-C)^\alpha u^\alpha}{C^\alpha (a-A)^\alpha (b-C)^\alpha - A^\alpha (b-A)^\alpha (a-C)^\alpha} \\ - \dfrac{A^\beta D^\rho (b-A)^\beta u^\beta}{C^\beta (a-A)^\beta (b-C)^\beta - A^\beta (a-C)^\beta (b-A)^\beta} \end{matrix}\right\} + const.;$$

puis avec cette expression, on trouvera, pour celle de l'autre fonction ar-

bitraire,

$$\left.\begin{array}{l}\psi(u) = \dfrac{D^p(a-A)^\beta u^\beta}{C^n(a-A)^\beta(b-C)^\beta - A^n(b-A)^\beta(a-C)^\beta} \\ \quad - \dfrac{B^p(a-C)^\alpha u^\alpha}{C^n(a-A)^\alpha(b-C)^\alpha - A^n(b-A)^\alpha(a-C)^\alpha}\end{array}\right\} - const.;$$

et l'on aura enfin

$$\begin{aligned} z^p = {} & \frac{C^n B^p(b-C)^{pm-n}x^n(ax-y)^{pm-n} - B^p(a-C)^{pm-n}y^n(bx-y)^{pm-n}}{C^n(a-A)^{pm-n}(b-C)^{pm-n} - A^n(b-A)^{pm-n}(a-C)^{pm-n}} \\ & + \frac{D^p(a-A)^{pn-n}y^n(bx-y)^{pn-n} - A^n D^p(b-A)^{pn-n}x^n(ax-y)^{pn-n}}{C^n(a-A)^{pn-n}(b-C)^{pn-n} - A^n(a-C)^{pn-n}(b-A)^{pn-n}}. \end{aligned}$$

Cette équation, en satisfaisant aux deux conditions imposées, conserve bien évidemment la forme $z^p = x^n\varphi(ax-y) + y^n\psi(bx-y)$, déterminée par l'équation différentielle partielle qui lui correspond; mais elle deviendrait illusoire si l'on avait $a=b$, parce qu'elle cesserait d'être une intégrale complète.

1060. M. Monge parcourt successivement plusieurs formes d'équations; il s'occupe du cas où l'une des fonctions arbitraires entre dans la composition de l'autre, et prend pour exemple général l'équation

$$z = \varphi[U + \psi(V)],$$

qui peut s'écrire ainsi:

$$\varphi_{,}(z) = U + \psi(V),$$

$\varphi_{,}$ désignant une fonction inverse de φ, et se traiter alors d'une manière analogue à celle du n° 1058.

Il en est de même de l'équation

$$z = \varphi(ax-y)\psi(bx-y);$$

qui, lorsqu'on passe aux logarithmes, devient

$$\mathrm{l}z = \mathrm{l}\varphi(ax-y) + \mathrm{l}\psi(bx-y),$$

ou simplement

$$\mathrm{l}z = \varphi(ax-y) + \psi(bx-y),$$

en changeant de fonctions arbitraires.

1061. Le calcul se complique beaucoup, à mesure que le nombre des fonctions arbitraires augmente, et présente de nouvelles difficultés, ainsi qu'on en jugera par ce que nous allons dire, d'après M. Monge,

sur l'équation

$$Z = M\varphi(T) + N\psi(U) + P\pi(V).$$

Soient les conditions suivantes,

1°. quand $y = f(x)$, $z = F(x)$;
2°. $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$;
3°. $y = f_2(x)$, $z = F_2(x)$;

et supposons qu'en faisant dans l'équation proposée les substitutions qu'elles indiquent, on ait

$$\begin{aligned} Z' &= M'\varphi(T') + N'\psi(U') + P'\pi(V'), \\ Z'_1 &= M'_1\varphi(T'_1) + N'_1\psi(U'_1) + P'_1\pi(V'_1), \\ Z'_2 &= M'_2\varphi(T'_2) + N'_2\psi(U'_2) + P'_2\pi(V'_2); \end{aligned}$$

on fera successivement $V' = v$, $V'_1 = v$, $V'_2 = v$; on tirera de chacune de ces dernières équations des valeurs de x, que l'on substituera successivement dans la première, la seconde et la troisième des précédentes, et désignant les résultats par

$$\begin{aligned} Z'' &= M'\varphi(T'') + N''\psi(U'') + P'\pi(v), \\ Z''_1 &= M''_1\varphi(T''_1) + N''_1\psi(U''_1) + P''_1\pi(v), \\ Z''_2 &= M''_2\varphi(T''_2) + N''_2\psi(U''_2) + P'_2\pi(v), \end{aligned}$$

on pourra éliminer la fonction $\pi(v)$: il viendra

$$\begin{aligned} &P''Z''_1 - P''_1Z'' = P''M''_1\varphi(T''_1) - P''_1M''\varphi(T'') + P''N''_1\psi(U''_1) - P''_1N''\psi(U''); \\ &P''Z''_2 - P''_2Z'' = P''M''_2\varphi(T''_2) - P''_2M''\varphi(T'') + P''N''_2\psi(U''_2) - P''_2N''\psi(U''), \end{aligned}$$

équations que, pour abréger, nous représenterons par

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1\varphi(T''_1) - B\varphi(T'') + C_1\psi(U''_1) - C\psi(U''), \\ A'_2 &= B'_2\varphi(T''_2) - B'\varphi(T'') + C'_2\psi(U''_2) - C'\psi(U''). \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$T'' = t, \quad T''_1 = t_1, \quad T''_2 = t'_1, \quad U'' = u, \quad U''_1 = u_1, \quad U''_2 = u'_1;$$

il faut bien observer qu'en général les quantités t'_1 et u'_1 ne doivent pas être regardées comme des valeurs de t et de u, consécutives à t_1 et à u_1, parce qu'elles ne résultent pas nécessairement de la loi de variation établie par le passage de u à u_1 et de t à t_1; en sorte que si l'on prend $t_1 - t = \Delta t$, $u_1 - u = \Delta u$, il faudra faire $t'_1 - t = \Delta' t$, $u'_1 - u = \Delta' u$,

Δ' désignant une autre différentiation que Δ. L'élimination de v entre les équations qui déterminent t, t_1, t'_1, u, u_1, u'_1, donnera les diverses relations que les variables t et u ont entr'elles et avec leurs différences. Posant ensuite

$$\varphi(T''') = r, \qquad \psi(U''') = s,$$

on obtiendra deux nouvelles équations de la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_1 r_1 - \beta r + \gamma_1 s_1 - \gamma s, \\ \alpha' &= \beta'_1 r'_1 - \beta' r + \gamma'_1 s'_1 - \gamma' s, \end{aligned}$$

qui revient à celle-ci :

$$\begin{aligned} \alpha &= (\beta_1 - \beta)r + \beta_1 \Delta r + (\gamma_1 - \gamma)s + \gamma_1 \Delta s, \\ \alpha' &= (\beta'_1 - \beta')r + \beta'_1 \Delta' r + (\gamma'_1 - \gamma')s + \gamma'_1 \Delta' s. \end{aligned}$$

Nous voici donc amenés à un nouveau genre d'équations, dans lesquelles les différences des variables sont relatives à diverses hypothèses, et par conséquent représentées par des caractéristiques différentes. Nous ne connaissons, jusqu'à présent, aucun travail étendu sur ces équations, qui paraissent devoir présenter encore plus de difficultés que les équations ordinaires aux différences.

Nous n'avons considéré que le cas où les fonctions arbitraires ne sont qu'au premier degré dans l'équation proposée ; en variant les circonstances que cette dernière peut présenter, on tomberait sur de nouvelles recherches de plus en plus épineuses ; c'est ainsi que Condorcet a montré que quand les fonctions arbitraires entrent d'une manière transcendante dans l'équation proposée, leur détermination dépend d'une équation contenant à la fois des différences et des coefficiens différentiels. L'étendue qu'a déjà acquise l'ouvrage que nous présentons au public, l'importance des matières qui nous restent encore à traiter, ne nous permettent pas d'entrer dans l'examen de ces diverses questions, qui n'ont offert jusqu'ici que des résultats très-peu satisfaisans, parce qu'ils sont très-particuliers ; nous croyons avoir rempli notre tâche, en faisant seulement connaître leur origine, leur but, et en les indiquant aux recherches des jeunes gens qui se proposent de cultiver l'Analyse, pour en étendre le domaine et en applanir les difficultés.

Il est à propos de remarquer qu'en ramenant à des équations aux différences, la détermination des fonctions arbitraires qui doivent compléter les intégrales des équations différentielles partielles, on introduit à la place de ces fonctions celles qui sont constantes par rapport aux

différences, et sur la nature desquelles nous avons déjà donné quelques indications (943). Bientôt nous devons nous occuper, avec plus d'étendue, de ces dernières, et nous reviendrons plus loin sur les discussions élevées par rapport aux premières, et annoncées dans le n° 804.

1062. Lorsqu'on a un nombre m d'équations entre $m+1$ variables et leurs différences, on peut appliquer à ces équations les divers procédés dont on a fait usage dans les mêmes circonstances, à l'égard des équations différentielles (615 et suiv.). Pour donner d'abord un exemple de l'élimination, nous prendrons les équations

$$\begin{aligned} y_x + P_x y_{x-1} &= Q_x z_x + R_x z_{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1), \\ y_x + P'_x y_{x-1} &= Q'_x z_x + R'_x z_{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2); \end{aligned}$$

en chassant premièrement z_{x-1}, comme une inconnue algébrique, il vient

$$(R'_x - R_x)y_x + (R'_x P_x - R_x P'_x)y_{x-1} = (R'_x Q_x - R_x Q'_x)z_x;$$

écrivant ensuite dans ce résultat $x-1$, au lieu de x, on obtient cette nouvelle équation

$$\begin{aligned} &(R'_{x-1} - R_{x-1})y_{x-1} + (R'_{x-1}P_{x-1} - R_{x-1}P'_{x-1})y_{x-2} \\ &= (R'_{x-1}Q_{x-1} - R_{x-1}Q'_{x-1})z_{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3), \end{aligned}$$

dont la combinaison avec les équations (1) et (2), servira à chasser en même temps z_x et z_{x-1}. Si l'on multiplie l'équation (1) par α, l'équation (2) par α', qu'on ajoute les produits avec l'équation (3), qu'ensuite on égale à zéro les quantités qui multiplient z_x et z_{x-1}, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\alpha Q_x + \alpha' Q'_x = 0, \\ &\alpha R_x + \alpha' R'_x + R'_{x-1}Q_{x-1} - R_{x-1}Q'_{x-1} = 0, \end{aligned}$$

on aura l'équation finale

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha')y_x &+ (\alpha P_x + \alpha' P'_x + R'_{x-1} - R_{x-1})y_{x-1} \\ &+ (R'_{x-1}P_{x-1} - R_{x-1}P'_{x-1})y_{x-2} = 0, \end{aligned}$$

qui sera encore du premier degré, mais qui montera au second ordre.

Il est facile de généraliser cette méthode, si l'on observe qu'elle se déduit de celle du n° 73, en remplaçant les différentiations indiquées dans ce numéro, par les substitutions successives de $x-1$, $x-2$, etc., au lieu de x.

1063. M. Laplace s'est occupé en particulier, d'un genre d'équations qu'il nomme *rentrantes* en elles-mêmes, et dont les plus simples sont de la forme

$$\overset{1}{y}_x = A\overset{2}{y}_{x-1},$$
$$\overset{2}{y}_x = A\overset{3}{y}_{x-1},$$
$$\overset{3}{y}_x = A\overset{4}{y}_{x-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{y}_x = A\overset{1}{y}_{x-1},$$

$\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x, \ldots\ldots \overset{n}{y}_x$, désignant des fonctions de la variable x, telles que chacune étant exprimée par celle qui vient après, la dernière l'est nécessairement par la première. On rend évidente la composition de ces équations, en imaginant que les fonctions $\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x, \ldots\ldots \overset{n}{y}_x$, soient disposées autour de la circonférence d'un cercle, de manière que la dernière $\overset{n}{y}_x$ se trouve contiguë à la première $\overset{1}{y}_x$; d'après cet arrangement, les équations rentrantes en elles-mêmes expriment les relations de chacune de ces fonctions, avec un certain nombre de celles qui les suivent. Si la loi doit être telle, que chaque fonction soit, par exemple, égale au double de celle qui la suit, rapportée à l'indice $x-1$, plus au triple de celle qui suit cette dernière, rapportée à l'indice $x-2$, les équations rentrantes qui expriment cette condition seront

$$\overset{1}{y}_x = 2\overset{2}{y}_{x-1} + 3\overset{3}{y}_{x-2},$$
$$\overset{2}{y}_x = 2\overset{3}{y}_{x-1} + 3\overset{4}{y}_{x-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{y}_x = 2\overset{1}{y}_{x-1} + 3\overset{2}{y}_{x-2}.$$

Il est évident que l'on aurait toujours les mêmes équations, en commençant par celle que l'on voudrait des fonctions cherchées.

Pour intégrer les équations rentrantes, il faut commencer par en déduire une équation finale entre la variable indépendante x et l'une des fonctions cherchées; la forme des équations proposées donne lieu à des simplifications dans le procédé, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Laplace, cité dans la Table, et dont nous avons tiré ce qui précède.

1064. La méthode du n° 622, par laquelle nous avons intégré conjointement plusieurs équations différentielles, s'applique aussi aux équations contenant des différences; c'est ce que nous allons montrer, sur deux équations du premier ordre, auxquelles nous donnerons la forme

$$M_x y_x + N_x z_x + P_x \Delta y_x + Q_x \Delta z_x = V_x,$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = V'_x \text{ (1036)},$$

pour les rendre plus analogues aux équations différentielles. Nous multiplierons la seconde par un facteur θ, et l'ajoutant à la première, il viendra

$$(M_x+\theta M'_x)y_x+(N_x+\theta N'_x)z_x+(P_x+\theta P'_x)\Delta y_x+(Q_x+\theta Q'_x)\Delta z_x=V_x+\theta V'_x;$$

si l'on met cette équation sous la forme

$$(M_x+\theta M'_x)\left\{y_x+\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x\right\}+(P_x+\theta P'_x)\left\{\Delta y_x+\frac{Q_x+\theta Q'_x}{P_x+\theta P'_x}\Delta z_x\right\}=V_x+\theta V'_x,$$

elle se changera évidemment en une équation à deux variables, toutes les fois qu'on aura

$$\Delta y_x + \frac{Q_x+\theta Q'_x}{P_x+\theta P'_x}\Delta z_x = \Delta\left\{y_x+\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x\right\};$$

car en faisant alors $y_x + \frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x = y'_x$, il viendra l'équation

$$(M_x+\theta M'_x)y'_x + (P_x+\theta P'_x)\Delta y'_x = V_x + \theta V'_x,$$

qui rentre dans celle qu'on a traitée n° 1038.

Les conditions à remplir dans cette circonstance sont exprimées par les équations

$$\frac{Q_x+\theta Q'_x}{P_x+\theta P'_x}=\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}, \qquad \Delta\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}=0.$$

La première donne θ, et l'autre est purement une équation de condition, qui sera satisfaite, en faisant θ constant, lorsque les coefficiens M, N,......M', N',...... seront constans; dans ce cas, θ sera déterminé par l'équation du second degré,

$$(Q+\theta Q')(M+\theta M') = (N+\theta N')(P+\theta P').$$

Lorsqu'on aura les deux valeurs de cette quantité, on en déduira deux valeurs de y'_x, qui conduiront à deux équations de la forme

$$y_x + \frac{N+\ell N'}{M+\ell M'} z_x = W_x,$$
$$y_x + \frac{N+\ell' N'}{M+\ell' M'} z_x = W'_x,$$

à l'aide desquelles on déterminera séparément y_x et z_x.

Nous observerons que dans le cas qui nous occupe, on peut aussi, par une méthode analogue à celle du n° 617, ramener les équations

$$M_x y_x + N_x z_x + P_x \Delta y_x + Q_x \Delta z_x = V_x,$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = V'_x,$$

à celles-ci :

$$M_x y_x + N_x z_x + P_x \Delta y_x + Q_x \Delta z_x = 0,$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = 0,$$

qui n'en diffèrent que par l'absence des termes V_x et V'_x. En effet, si y'_x et y''_x, z'_x et z''_x, sont des valeurs particulières qui satisfassent à ces équations, on aura, pour les valeurs complètes,

$$y_x = C'y'_x + C''y''_x, \qquad z_x = C'z'_x + C''z''_x;$$

si maintenant on prend les différences, en faisant varier les quantités C', C'', et que l'on substitue dans les premières équations proposées, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} C'\{M_x y'_x + N_x z'_x + P_x \Delta y'_x + Q_x \Delta z'_x\} \\ +\ C''\{M_x y''_x + N_x z''_x + P_x \Delta y''_x + Q_x \Delta z''_x\} \\ +\ \Delta C'(P_x y'_{x+1} + Q_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P_x y''_{x+1} + Q_x z''_{x+1}) \end{array}\right\} = V_x;$$

$$\left.\begin{array}{l} C'\{M'_x y'_x + N'_x z'_x + P'_x \Delta y'_x + Q'_x \Delta z'_x\} \\ +\ C''\{M'_x y''_x + N'_x z''_x + P'_x \Delta y''_x + Q'_x \Delta z''_x\} \\ +\ \Delta C'(P'_x y'_{x+1} + Q'_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P'_x y''_{x+1} + Q'_x z''_{x+1}) \end{array}\right\} = V'_x;$$

les deux premières lignes du premier membre de chacune de ces équations sont nulles, en vertu de

$$M_x y_x + N_x z_x + P_x \Delta y_x + Q_x \Delta z_x = 0,$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = 0;$$

il ne reste donc que les équations

$$\Delta C'(P_x y'_{x+1} + Q_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P_x y''_{x+1} + Q_x z''_{x+1}) = V_x,$$
$$\Delta C'(P'_x y'_{x+1} + Q'_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P'_x y''_{x+1} + Q'_x z''_{x+1}) = V'_x,$$

qui serviront à détermiuer $\Delta C'$ et $\Delta C''$.

Ces indications suffisent pour pousser aussi loin qu'elles peuvent aller, les méthodes que nous venons de rappeler, en s'aidant d'ailleurs de leur application aux équations différentielles dans les numéros cités.

1065. Pour n'omettre aucune des méthodes connues, que l'on peut employer avec succès à l'intégration des équations du premier degré aux différences, nous montrerons, d'après M. Paoli, l'usage que l'on peut faire, à cet égard, de la méthode du facteur.

Soit l'équation

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \dots + U_x y_x = V_x;$$

en la multipliant par un facteur quelconque μ_x, et supposant que son intégrale première soit alors

$$\mu_x(\alpha_x y_{x+n-1} + P'_x y_{x+n-2} + Q'_x y_{x+n-3} \dots + T'_x y_x) = \Sigma V_x \mu_x;$$

on prendra la différence de cette dernière équation, qui sera

$$\begin{aligned} &\mu_{x+1}(\alpha_{x+1} y_{x+n} + P'_{x+1} y_{x+n-1} + Q'_{x+1} y_{x+n-2} \dots + T'_{x+1} y_{x+1}) \\ &- \mu_x\ (\alpha_x\ y_{x+n-1} + P'_x\ y_{x+n-2} + Q'_x\ y_{x+n-3} \dots + T'_x\ y_x\ ) \\ &= V_x \mu_x, \end{aligned}$$

et on la comparera avec l'équation proposée multipliée par μ_x, ce qui donnera

$$\begin{aligned} &\alpha_{x+1}\mu_{x+1} = \mu_x, \\ &\mu_{x+1}P'_{x+1} - \mu_x\alpha_x = \mu_x P_x, \\ &\mu_{x+1}Q'_{x+1} - \mu_x P'_x = \mu_x Q_x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mu_{x+1}T'_{x+1} - \mu_x S'_x = \mu_x T_x, \\ &\qquad\quad - \mu_x T'_x = \mu_x U_x. \end{aligned}$$

Si l'on prend ces équations dans un ordre inverse, on en tirera

$$\begin{aligned} &T'_x = - U_x, \\ &S'_x = \tfrac{\mu_{x+1}}{\mu_x} T'_{x+1} - T_x, \\ &R'_x = \tfrac{\mu_{x+1}}{\mu_x} S'_{x+1} - S_x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &P'_x = \tfrac{\mu_{x+1}}{\mu_x} Q'_{x+1} - Q_x, \\ &\alpha_x = \tfrac{\mu_{x+1}}{\mu_x} P'_{x+1} - P_x, \\ &\alpha_{x+1} = \tfrac{\mu_x}{\mu_{x+1}}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclura

$$T'_z = -U_z,$$

$$S'_z = -\frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} U_{z+1} - T_z,$$

$$R'_z = -\frac{\mu_{x+2}}{\mu_x} U_{z+2} - \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} T_{z+1} - S_z,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P'_z = -\frac{\mu_{x+n-2}}{\mu_x} U_{z+n-2} - \frac{\mu_{x+n-3}}{\mu_x} T_{z+n-3} \ldots - Q_z;$$

$$\alpha_z = -\frac{\mu_{x+n-1}}{\mu_x} U_{z+n-1} - \frac{\mu_{x+n-2}}{\mu_x} T_{z+n-2} \ldots - \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} Q_{z+1} - P_z;$$

déduisant de cette dernière la valeur de α_{z+1}, pour la mettre dans l'équation $\alpha_{z+1}\mu_{x+1} = \mu_x$, on aura

$$\mu_{x+n} U_{z+n} + \mu_{x+n-1} T_{z+n-1} \ldots\ldots + \mu_{x+2} Q_{z+2} + \mu_{x+1} P_{z+1} + \mu_x = 0.$$

Il est visible que cette équation répond à celle du n° 1046; et si l'on fait $\frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x}$, il s'ensuivra

$$\frac{\mu_{x+2}}{\mu_x} = \frac{\mu_{x+2}}{\mu_{x+1}} \cdot \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x p_{x+1}}, \quad \frac{\mu_{x+3}}{\mu_x} = \frac{\mu_{x+3}}{\mu_{x+2}} \cdot \frac{\mu_{x+2}}{\mu_{x+1}} \cdot \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x p_{x+1} p_{x+2}}, \quad \text{etc.},$$

ce qui donnera $\frac{\mu_{x+n}}{\mu_x} = \frac{1}{[p_{x+n-1}]^{n}}$, et conduira par conséquent à

$$\frac{U_{x+n}}{[p_{x+n-1}]^{n}} + \frac{T_{x+n-1}}{[p_{x+n-2}]^{n-1}} \ldots\ldots + \frac{Q_{x+2}}{[p_{x+1}]^{2}} + \frac{P_{x+1}}{[p_x]^{1}} + 1 = 0,$$

ou à

$$[p_{x+n-1}]^{n} + P_{x+1}[p_{x+n-1}]^{n-1} + Q_{x+2}[p_{x+n-1}]^{n-2} \ldots + T_{x+n-1}[p_{x+n-1}]^{1} + U_{x+n} = 0.$$

Nous ne nous arrêterons point ici sur les propriétés de cette équation; nous nous bornerons à observer que lorsqu'on aura trouvé n valeurs particulières qui y satisfassent, on pourra former un pareil nombre d'équations semblables à

$$\mu_x(\alpha_z y_{z+n-1} + P'_z y_{z+n-2} + Q'_z y_{z+n-3} \ldots\ldots + T'_z y_z) = \Sigma V_z \mu_z,$$

au moyen desquelles on obtiendra l'expression de y_z, en éliminant les $n-1$ quantités $y_{z+1}, y_{z+2}, \ldots y_{z+n-1}$.

Si l'on n'avait que $n-m$ valeurs de μ_z, on ne pourrait chasser que

$n-m-1$ de ces quantités, et on ramènerait par conséquent l'équation proposée à une autre contenant $y_x, y_{x+1}, \ldots . y_{x+m}$, c'est-à-dire de l'ordre m.

De la nature des arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités.

1066. On a déjà vu, dans le n° 943, que les quantités arbitraires, introduites par l'intégration des équations aux différences à deux variables, ne sont pas nécessairement constantes comme celles qui complètent les intégrales des équations différentielles; mais seulement qu'elles ne doivent point changer de valeur, lorsque la variable indépendante x devient $x+\Delta x$. Si, par exemple, lorsque Δx est constant et égal à h, on a $\Delta y=0$, on pourra prendre pour y toutes les fonctions de x qui conservent la même valeur quand on y met $x+h$ au lieu de x. Or, il est facile de voir que parmi les fonctions circulaires il s'en trouve un nombre infini qui jouissent de cette propriété : telles sont les fonctions de $\sin\frac{2\pi x}{h}$, $\cos\frac{2\pi x}{h}$, lorsque π désigne la demi-circonférence. Dans cette hypothèse, l'équation aux différences Δy a donc pour intégrale, non pas simplement $y=const.$, mais

$$y=\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{h},\ \cos\frac{2\pi x}{h}\right),$$

en considérant d'ailleurs la fonction φ comme entièrement arbitraire, et susceptible par conséquent de toutes les formes possibles.

On a mis en évidence dans cette fonction le sinus et le cosinus de l'arc $\frac{2\pi x}{h}$, pour montrer qu'on ne doit pas la réduire à ne contenir que l'une ou l'autre des quantités $\sin\frac{2\pi x}{h}$, $\cos\frac{2\pi x}{h}$, parce qu'alors elle ne serait pas constante seulement dans le passage de x à $x+h$, mais elle le serait encore lorsque x se changerait en $\frac{h}{2}-x$, en $h-x$, à cause que

$$\sin\frac{2\pi x}{h}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi x}{h}\right),\qquad \cos\frac{2\pi x}{h}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi x}{h}\right),$$

ce qui donnerait encore $\Delta y=0$, pour des cas où Δx ne serait pas égal à h.

Il est évident que la fonction qui complète l'intégrale de l'équation $\Delta y=0$, prise dans l'hypothèse de $\Delta x=h$, compléterait aussi toute autre équation aux différences du premier ordre, prise dans la même hypothèse; il faut donc substituer dans l'intégrale de l'équation quel-

conque du premier ordre (1038), au lieu de C, la quantité........ $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, puisqu'on y suppose Δx, ou $h=1$.

1067. C'est Euler qui, le premier, fit cette remarque importante, en cherchant le terme général des suites récurrentes (1050), par l'intégration d'une équation différentielle d'un ordre infini; la marche qu'il a suivie dans cette occasion est trop élégante pour n'en pas donner une idée. Il se propose d'abord de *trouver le terme général de la série dans laquelle chaque terme est égal à celui qui le précède*, ce qui lui donne l'équation $y_{x+1}=y_x$; et en observant que

$$y_{x+1}=y_x+\frac{1}{1}\frac{dy_x}{dx}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3}+\text{etc.},$$

il la change en cette autre

$$0=\frac{dy_x}{dx}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3}+\text{etc.},$$

équation différentielle du premier degré, mais d'un ordre infini, et à laquelle on satisfait en prenant $y_x=Ce^{mx}$, pourvu que m soit déterminée par l'équation

$$\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\text{etc.}=0,$$

qui revient à $e^m-1=0$. Cette dernière donne d'abord $m=0$, et par conséquent $y=C$; mais ce résultat n'est pas l'intégrale complète qui doit nécessairement renfermer un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, et par conséquent infini; pour y parvenir, il faut donner successivement à m toutes les valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation $e^m-1=0$; or, en passant aux logarithmes, on a

$$m=l1=0\pm 2i\pi\sqrt{-1}\ (\textit{Int. } 81),$$

expression dans laquelle i représente tous les nombres entiers possibles, y compris 0; et si l'on réunit, comme dans le n° 605, chaque couple de valeurs semblables, on en déduira, pour l'intégrale complète demandée, deux termes de la forme

$$c\cos 2i\pi x+c_1\sin 2i\pi x,$$

c et c_1 désignant de nouvelles constantes arbitraires. Il suit de là que

l'expression de y_x sera de la forme

$$y_x = \begin{cases} c + c' \cos 2\pi x + c'' \cos 4\pi x + c''' \cos 6\pi x \ldots\ldots \\ + c'_1 \sin 2\pi x + c''_1 \sin 4\pi x + c'''_1 \sin 6\pi x \ldots\ldots, \end{cases}$$

ce qui revient évidemment à une fonction arbitraire des quantités $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$ (*Introd.* 54, 55). Euler traite successivement de la même manière les progressions par différences (ou *arithmétiques*), les progressions par quotiens (ou *géométriques*), les séries récurrentes, et parvient à des résultats analogues au précédent; mais nous ne saurions le suivre dans ces détails.

1068. Lorsque la différence de la variable indépendante x n'est pas constante, le procédé du n° 1056, appliqué à l'équation $\Delta y_x = 0$, conduit à la composition de la quantité qui doit entrer dans la fonction arbitraire; car ayant changé cette équation en $\Delta y_z = 0$, son intégrale doit être $y_z = \psi(\sin 2\pi z, \cos 2\pi z)$, et il n'y a plus qu'à substituer, au lieu de z, sa valeur en x.

Ayant trouvé, pour le cas où $\Delta x = x' - mx$, dans le numéro cité,

$$z = \frac{1}{1q}\left\{1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}} - 1b\right\},$$

il en résulte que la constante C' doit être remplacée par

$$\psi\left\{\sin\frac{2\pi}{1q}\left[1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}}\right],\ \cos\frac{2\pi}{1q}\left[1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}}\right]\right\},$$

la constante $1b$ pouvant être réunie à celles de la fonction ψ, et que par conséquent l'expression complète de y_z, ou de $\varphi(mx)$, qui satisfait à l'équation $\varphi(x') = \varphi(mx) + Q$, est

$$\varphi(mx) = \psi\left\{\sin\frac{2\pi}{1q}\left[1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}}\right], \cos\frac{2\pi}{1q}\left[1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}}\right]\right\}$$
$$+ \frac{Q}{1q}\left\{1\,1\frac{mx}{\dfrac{q}{m^{q-1}}}\right\}.$$

Dans l'équation $\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2$, du même numéro, on a obtenu $2^z = x$, ce qui donne $z = \frac{1x}{12}$; la fonction arbitraire doit donc être........ $\psi\left(\sin\frac{2\pi 1x}{12},\ \cos\frac{2\pi 1x}{12}\right)$, et l'on doit avoir par conséquent

$$\varphi(x) = \left\{\psi\left(\sin\frac{2\pi 1x}{12},\ \cos\frac{2\pi 1x}{12}\right)\right\}^x + \left\{\psi\left(\sin\frac{2\pi 1x}{12},\ \cos\frac{2\pi 1x}{12}\right)\right\}^{-x}.$$

Les mêmes considérations s'appliquent à un ordre quelconque; l'équation du n° 1057 nous servira d'exemple. En y supposant les coefficiens constans, elle se réduit à

$$y_{a^n x} + Py_{a^{n-1}x} + Qy_{a^{n-2}x} \ldots\ldots + Ty_{ax} + Uy_x = V_x,$$

et se ramène à

$$y_{z+n} + Py_{z+n-1} + Qy_{z+n-2} \ldots\ldots + Ty_{z+1} + Uy_z = V_z,$$

la différence de la variable z étant égale à l'unité, lorsqu'on prend $z = \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a}$: par ce moyen, l'intégrale

$$y_z = C'm'^z + C''m''^z + C'''m'''^z + \ldots\ldots,$$

qui, pour être complète, doit s'écrire ainsi,

$$\left.\begin{array}{l} y_z = m'^z\varphi'(\sin 2\pi z,\ \cos 2\pi z) + m''^z\varphi''(\sin 2\pi z,\ \cos 2\pi z) \\ \qquad + m'''^z\varphi'''(\sin 2\pi z,\ \cos 2\pi z) + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

φ', φ'', φ''', ... désignant des fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres, devient

$$\begin{array}{l} y_z = x^{\frac{\mathrm{l}m'}{\mathrm{l}a}}\varphi'\left(\sin\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a},\ \cos\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a}\right) + x^{\frac{\mathrm{l}m''}{\mathrm{l}a}}\varphi''\left(\sin\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a},\ \cos\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a}\right) \\ \qquad + x^{\frac{\mathrm{l}m'''}{\mathrm{l}a}}\varphi'''\left(\sin\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a},\ \cos\frac{2\pi\,\mathrm{l}x}{\mathrm{l}a}\right)\ldots, \end{array}$$

en y substituant, au lieu de z, sa valeur en x.

1069. La détermination des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations aux différences, ne peut s'opérer en assujétissant ces intégrales à satisfaire à un nombre limité de valeurs données; car il est visible que toute fonction arbitraire comprend implicitement un nombre infini de valeurs arbitraires. Soit, pour exemple, l'équation $y_x = X\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x)$, de laquelle on doive tirer un certain nombre de valeurs $y_0 = a$, $y_1 = a'$, $y_2 = a''$, etc. Si ces valeurs répondent à $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, etc., on ne pourra satisfaire en général qu'à la première des conditions imposées; car dès qu'on aura assigné pour $\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x)$, une première valeur déterminée, de laquelle il résulte $y_0 = a$, cette valeur devant se retrouver la même pour les indices $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc., il s'ensuit que les valeurs

de y_x, relatives à ces indices, sont aussi déterminées. Il faut donc que les quantités données a', a'', etc., correspondent à des indices intermédiaires.

Si, au lieu d'un nombre limité de valeurs isolées, qui ne peuvent déterminer qu'un pareil nombre de valeurs de la fonction arbitraire, indépendantes les unes des autres, on suppose que dans l'intervalle compris entre $x=0$ et $x=1$, l'expression de y_x doive fournir les mêmes valeurs qu'une équation donnée $y_x=f(x)$, la question sera déterminée. En effet, s'il s'agissait de trouver la valeur de y, qui correspond à un indice égal à un nombre entier quelconque m, plus une fraction, soit commensurable, soit incommensurable, que nous désignerons par n, on calculerait la valeur de y_n, d'après l'équation $y_x=f(x)$; comparant le résultat avec celui que donne alors l'équation $y_x=X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, on aurait, pour ce cas, la valeur de $\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n)$, qui doit être la même que celle de $\varphi[\sin 2\pi(m+n), \cos 2\pi(m+n)]$, et l'équation $y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, devenant par là

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

serait entièrement déterminée.

La seule condition à laquelle soit assujétie l'équation donnée $y_x=f(x)$, c'est qu'on en tire, pour y_0 et y_1, les mêmes valeurs que de l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

1070. Les considérations géométriques jettent un grand jour sur la théorie analytique que nous venons d'exposer : voici d'abord comment on peut représenter, par le cours d'une ligne, les circonstances de l'équation $\Delta y=0$: soit AB, *fig.* 4, une droite indéfinie parallèle à l'axe OX des x, menée à une distance quelconque de cet axe, et divisée en parties AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc., égales à Δx; toutes les courbes telles que FIG. 4.

$$ABA'B'A''B''A'''S,\quad ACA'C'A''C''A'''T,\quad ADA'D'A''D''A'''U,\quad \text{etc.},$$

passant par les points A, A', A'', A''', etc., et composées, entre ces points, de parties égales et semblables, satisferont à l'équation $\Delta y = 0$. Cela est d'abord évident pour les points A', A'', A''', etc., et l'on voit ensuite que, prenant $AP = x$, $AP' = x + \Delta x$, les arcs AL et $A'L'$, AM et $A'M'$, AN et $A'N'$, etc., étant égaux et semblables, les ordonnées LP et $L'P'$, MP et $M'P'$, NP et $N'P'$, etc., seront aussi res-

pectivement égales, et l'on aura par conséquent, dans chaque courbe, $\Delta y = 0$.

On peut se former une idée de la construction de ces courbes, en concevant une surface quelconque rapportée à trois coordonnées rectangles, à deux desquelles on assignerait pour valeurs celles que reçoivent le sinus et le cosinus tabulaires de l'arc $\frac{2\pi x}{\Delta x}$, ou bien celles de $\sin x$ et de $\cos x$, prises dans le cercle dont la circonférence est égale à Δx; la troisième coordonnée de cette surface serait la valeur de y, exprimée par l'équation $y = \varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x},\ \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$.

La condition $\Delta y = 0$ n'entraînant point la continuité dans les résultats, les courbes AS, AT, AU, etc., ne seront point assujéties à cette loi. Le polygone $EFE'F'E''\ldots V$, composé de parties semblables EFE', $E'F'E''$, etc., donne également $\Delta y = 0$; il en serait de même d'une suite d'arcs égaux et semblables d'une courbe quelconque, assemblés d'une manière discontiguë, comme le sont les arcs GH, $G'H'$, $G''H''$, etc. : ainsi la fonction désignée par φ peut être discontinue.

1071. La construction des équations aux différences s'accorde parfaitement avec la détermination analytique des fonctions arbitraires. En effet, soit $\Delta y = \mathrm{F}(x, y)$ une équation quelconque de ce genre et du premier ordre : ayant choisi arbitrairement, ou déterminé, suivant les conditions de la question, le premier point B de la courbe cherchée, *fig.* 5; comme l'équation n'apprend rien sur tous les points correspondans à la portion d'abscisse $AA' = \Delta x$, et qu'elle donne seulement l'ordonnée $A'B' = y_1$, on pourra faire passer par les points B et B' une portion d'une courbe quelconque. Cela fait, pour obtenir la portion correspondante à l'intervalle $A'A''$, on prendra, en arrière d'un point quelconque P' de cet intervalle, une distance $PP' = AA' = \Delta x$, et élevant l'ordonnée PM, on mènera MD' parallèle à AR; tirant ensuite de l'équation $\Delta y = \mathrm{F}(x, y)$ la valeur de Δy pour l'abscisse AP, cette valeur donnera la droite $D'M'$, qui, jointe à $P'D' = PM$, fera connaître le point M'. On trouvera de même tous les points de l'arc $B'B''$: cet arc, employé à son tour comme l'arc BB', donnera ceux du troisième arc $B''B'''$, et ainsi de suite. FIG. 5.

Il est évident que l'on pourrait, par le même procédé, continuer la courbe en arrière du point A, et que, dans tous les cas, elle satisfera à l'équation proposée, puisque les différences $\Delta y = D'M'$ auront

des valeurs conclues de cette équation : nous laissons au lecteur à faire l'application de ce procédé aux équations du second ordre et des ordres supérieurs.

1072. Nous avons supposé plus haut que la différence de l'abscisse x était constante; si le contraire avait lieu, on n'en construirait pas moins les équations aux différences. Dans ce cas, les équations proposées peuvent être mises sous la forme

$$\Delta x = \mathrm{f}(x), \qquad \Delta y = \mathrm{F}(x, y);$$

la première se construira d'après le numéro précédent, en regardant x comme fonction d'une nouvelle variable u dont la différence soit constante. Ayant obtenu par son moyen la grandeur de Δx, correspondante à une valeur quelconque de u, on se servira de ce résultat pour construire, par la seconde équation, le Δy correspondant.

En regardant les trois variables u, x, y, comme les coordonnées des points de l'espace, les équations proposées représenteront une courbe à double courbure. La première donnera la projection sur le plan des u et x, et la seconde la projection sur le plan des x et y; si l'on éliminait x, on parviendrait à l'équation de la projection sur le plan des u et y.

De la multiplicité des intégrales dont les équations aux différences sont susceptibles.

1073. La correspondance qu'on a dû remarquer entre les équations différentielles et les équations aux différences, a lieu par rapport à la liaison de ces dernières avec leurs intégrales, et repose sur des considérations analogues à celles que nous avons exposées dans le n° 636, à l'égard des équations différentielles. Ces considérations ont été mises dans tout leur jour par M. Biot, dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Institut, en l'an V (1797), et duquel nous avons tiré ce qui suit.

Si l'on a une équation quelconque $\mathrm{F}(a, x, y) = 0$, entre les deux variables x, y et la quantité a supposée constante, que l'on passe à l'équation consécutive $\mathrm{F}(a, x_1, y_1) = 0$, et que l'on élimine a entre cette dernière et la précédente, le résultat sera une équation aux différences, ayant pour intégrale complète $\mathrm{F}(a, x, y) = 0$; mais l'équation aux différences, que nous désignerons par $Z = 0$, resterait encore la même quand la quantité a serait variable, pourvu que le changement de cette quantité n'influât pas sur l'équation $\mathrm{F}(a, x_1, y_1) = 0$. Pour examiner cette circonstance, dans laquelle il faut regarder y comme une fonction de x et de a, nous écrirons l'équation primitive pro-

posée, ainsi :

$$F(x, a, y_{x,a}) = o \ldots (V);$$

et lorsqu'on fera varier x et a en même temps, on aura

$$F(x_1, a_1, y_{x1,a1}) = o.$$

Cela posé, il est visible que l'équation $Z = o$ serait encore satisfaite par l'équation

$$F(x, a, y_{x,a}) = o,$$

dans l'hypothèse de a variable, si l'on avait $y_{x1,a1} = y_{x1,a}$, ce qui arriverait nécessairement si les équations

$$F(x_1, a, y_{x1,a}) = o, \qquad F(x_1, a_1, y_{x1,a1}) = o$$

pouvaient s'accorder lorsqu'on changera, dans la seconde, $y_{x1,a1}$ en $y_{x1,a}$: dans ce cas, les équations

$$F(x_1, a, y_{x1,a}) = o, \qquad F(x_1, a_1, y_{x1,a}) = o \ldots (W)$$

auront lieu en même temps; et en éliminant $y_{x1,a}$, elles conduiront à une équation entre x, x_1, a, a_1, qui exprimera la loi suivant laquelle doit varier a.

Ce résultat n'est pas entièrement semblable à celui que nous avons indiqué dans le n° 636. Dans ce numéro, la relation entre a et x est exprimée par une équation primitive, en sorte que la valeur de a qu'on en tire n'est que particulière, et l'équation

$$F(x, a, y_{x,a}) = o$$

perdrait sa généralité par la substitution de cette valeur; dans le cas actuel, au contraire, la relation entre x et a étant exprimée par une nouvelle équation aux différences, conduit à une valeur de a complétée par une quantité arbitraire, à l'aide de laquelle l'équation

$$F(x, a, y_{x,a}) = o$$

conserve toute son étendue, et offre par conséquent encore une intégrale complète de l'équation aux différences $Z = o$, au lieu d'une solution particulière qu'aurait eue, dans les mêmes circonstances, une équation différentielle.

1074. Pour approfondir davantage la liaison qui existe entre les di-

verses intégrales dont nous venons de montrer l'existence, il faut se rappeler que, considérée analytiquement, une équation aux différences donne le terme général d'une série, et que, sous le point de vue géométrique, elle est le lieu d'une suite de points correspondant à des abscisses déterminées suivant une certaine loi. Quand la constante a reçoit une valeur particulière, l'équation

$$F(x,\ a,\ y_{x,a}) = 0 \ldots\ldots (V)$$

devient une *intégrale particulière* de $Z = 0$, d'après le sens que nous avons attaché à cette expression, dans le n° 635; les équations

$$F(x,\ a_1,\ y_{x,a_1}) = 0 \ldots . (V_1), \quad F(x,\ a_2,\ y_{x,a_2}) = 0 \ldots . (V_2), \quad \text{etc.}$$

appartiennent donc à des lignes représentant les diverses intégrales particulières qui naissent des valeurs a_1, a_2, etc., attribuées à la constante a; et il est évident que l'équation

$$F(x_1,\ a_1,\ y_{x_1,a_1}) = 0$$

répond, dans la première, au point consécutif à celui que désignent les coordonnées x et y_{x,a_1}. En établissant donc l'identité de y_{x_1,a_1} et de $y_{x_1,a}$, et considérant les équations

$$F(x_1,\ a,\ y_{x_1,a}) = 0, \quad F(x_1,\ a_1,\ y_{x_1,a}) = 0 \ldots . (W),$$

comme ayant lieu simultanément, on exprime que les lignes données par les équations (V) et (V_1), se coupent au point dont l'abscisse est x_1 et l'ordonnée $y_{x_1,a} = y_{x_1,a_1}$, ou que la série dont le terme général est déterminé par la première équation, coïncide, dans son deuxième terme, avec celle dont le terme général dépend de la seconde équation.

Maintenant si, dans les équations (W), la quantité a reçoit des valeurs successives, conformément à la relation qu'elles assignent entre cette quantité et les autres variables, on aura ces nouvelles équations

$$F(x_2,\ a_1,\ y_{x_2,a_1}) = 0, \quad F(x_2,\ a_2,\ y_{x_2,a_1}) = 0 \ldots . (W_1),$$

d'où il résultera encore $y_{x_2,a_2} = y_{x_2,a_1}$, et qui par conséquent établiront l'intersection de la courbe désignée par (V_2), avec celle que représente (V_1), au point dont les coordonnées sont x_2, $y_{x_2,a_2} = y_{x_2,a_1}$. En continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra une suite de résultats compris dans les équations

$$F(x_n, a_{(n-1)}, y_{x(n),a(n-1)}) = 0, \quad F(x_n, a_n, y_{x(n),a(n-1)}) = 0 \ldots (W_{n-1}),$$

qui supposent que $y_{x(n),a(n)} = y_{x(n),a(n-1)}$, et établissent par conséquent, au point dont les coordonnées sont x_n, $y_{x(n),a(n)} = y_{x(n),a(n-1)}$, une intersection entre les courbes désignées par (V_{n-1}) et (V_n).

En rassemblant les coordonnées des divers points d'intersection que nous venons de faire remarquer, on formera la table

$$\begin{array}{llll} x, & x_1, & x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots & x_n, \\ y_{x,a}, & y_{x1,a} = y_{x1,a1}, & y_{x2,a1} = y_{x2,a2} \ldots & y_{x(n),a(n-1)} = y_{x(n),a(n)}, \end{array}$$

qui vérifie l'équation $Z=0$; car on voit, dans la seconde ligne, que $y_{x1,a1}$, étant égal à $y_{x1,a}$, est consécutif à $y_{x,a}$, qu'il est antécédent à $y_{x2,a2}$, puisque celui-ci est égal à $y_{x2,a1}$, et ainsi des autres. Il suit de là que *le système des équations* (W) *exprime la loi suivant laquelle il faut faire varier* a, *pour que les diverses intégrales particulières résultantes de cette variation se coupent successivement dans des points qui vérifient l'équation aux différences* Z=0.

Si donc l'on détermine, au moyen de ces équations, la valeur de a en x, et qu'on la substitue dans $F(x, a, y_{x,a}) = 0$, on aura l'équation commune à tous ces points, d'où dépend le terme général des valeurs de $y_{x,a}$, formées d'après la série précédente.

Il faut remarquer que cette série n'emporte pas nécessairement l'équation $y_{x2,a} = y_{x2,a1}$, et celles qui en dérivent, et que par conséquent elle vérifie bien l'équation aux différences premières $Z = 0$, mais non pas la différence de celle-ci, ou l'équation aux différences secondes.

Si l'équation

$$F(x, a, y_{x,a}) = 0,$$

que, pour abréger, nous représenterons par $V = 0$, contient des radicaux, ou si, lorsqu'elle en est dégagée, la constante a y monte au-delà du premier degré, les équations (W) conduiront à une nouvelle intégrale que nous nommerons *intégrale indirecte*, mais elles n'en donneront pas d'autres que $V = 0$, si a ne passe pas la première puissance. Éclaircissons ceci par quelques exemples.

1075. Soit l'équation $y_{x,a} = ax - a^2 \ldots (V)$. Si l'on en prend la différence dans l'hypothèse de $\Delta x = x$, on aura $\Delta y = ax$, d'où on tirera $a = \frac{\Delta y}{x}$, et par conséquent

$$y = \Delta y - \frac{\Delta y^2}{x^2} \ldots (Z);$$

les équations (W) deviendront alors

$$y_{x_1,a} = ax_1 - a^2, \qquad y_{x_1,a} = a_1x_1 - a_1^2 \ldots\ldots (W),$$

et donneront par conséquent la suivante :

$$ax_1 - a^2 = a_1x_1 - a_1^2, \quad \text{ou} \quad (a_1 - a)x_1 - (a_1^2 - a^2) = 0 \ldots . (U),$$

qui se décompose dans les deux facteurs

$$a_1 - a = 0, \qquad x_1 - (a_1 + a) = 0.$$

Le premier, d'où il résulte $a = const.$, nous ramène à l'équation primitive (V), et le second étant intégré par le procédé du n° 1056, après avoir mis $2x$ au lieu de x_1, conduit à

$$a = \frac{2x}{3} + b(-1)^{\frac{lx}{l2}};$$

substituant cette valeur de a dans l'équation (V), on la changera en

$$y_{x,b} = \frac{2x^2}{9} - \frac{bx}{3}(-1)^{\frac{lx}{l2}} - b^2(-1)^{\frac{2lx}{l2}}.$$

Pour construire cette nouvelle intégrale, il faut d'abord déterminer les arbitraires a et b, de manière qu'au premier point, que l'on suppose donné, on ait $y_{x,b} = y_{x,a}$. En désignant donc par α et β les coordonnées de ce point, on aura

$$\beta = a\alpha - a^2, \qquad \beta = \frac{2\alpha^2}{9} - \frac{\alpha b}{3}(-1)^{\frac{l\alpha}{l2}} - b^2(-1)^{\frac{2l\alpha}{l2}},$$

d'où l'on tirera deux valeurs pour a et autant pour b, qui fourniront en tout quatre séries satisfaisant à l'équation (Z).

Il est visible que les deux valeurs de b seront de la forme

$$b'(-1)^{-\frac{l\alpha}{l2}}, \qquad b''(-1)^{-\frac{l\alpha}{l2}},$$

et que par conséquent l'on aura ces deux équations :

$$y_{x,b'} = \frac{2x^2}{9} - \frac{b'x}{3}(-1)^{\frac{lx - l\alpha}{l2}} - b'^2(-1)^{\frac{2(lx - l\alpha)}{l2}},$$

$$y_{x,b''} = \frac{2x^2}{9} - \frac{b''x}{3}(-1)^{\frac{lx - l\alpha}{l2}} - b''^2(-1)^{\frac{2(lx - l\alpha)}{l2}}.$$

Soit maintenant AX, *fig.* 6, l'axe des abscisses sur lequel on ait pris $AP=\alpha$: les valeurs ...$AP_{,,,}$, $AP_{,,}$, $AP_{,}$, et AP', AP'', AP''',... les unes antécédentes à AP, et les autres suivantes, seront déterminées par l'intégrale de l'équation $x_1=2x$, qui donne $x=2^z\alpha$ (1056); d'où l'on voit qu'à chacune de ces abscisses, la quantité $\frac{lx-l\alpha}{l2}$ est égale à un nombre entier; que $(-1)^{\frac{lx-l\alpha}{l2}}=+1$ ou -1, selon que z est un nombre pair ou impair, et qu'enfin $(-1)^{\frac{2(lx-l\alpha)}{l2}}=1$. Cela posé, on construira la parabole CQ, donnée par l'équation $y'=\frac{2x^2}{9}-b'^2$, et la droite AR, représentant l'équation $y''=+\frac{b'x}{3}$; on obtiendra les ordonnées de rang impair, savoir, FIG. 6.

$$.....P_{,,,}M_{,,,},\quad P_{,}M_{,},\quad P'M',\quad P'''M''',.....$$

en ajoutant l'ordonnée de la ligne droite AR à celle de la parabole, et les ordonnées de rang pair, savoir :

$$.....P_{,,}M_{,,},\quad PM,\quad P''M'',.....$$

en retranchant l'ordonnée de la ligne droite. Cela fait, toutes les droites $M_{,,,}M_{,,}$, $M_{,,}M_{,}$, etc., qui joignent deux points consécutifs de la nouvelle intégrale, seront comprises dans l'équation $y=ax-a^2$, ce qui vérifie la conclusion du numéro précédent.

Une semblable construction, appliquée à l'équation formée par la seconde valeur de b, donne une troisième intégrale dont les points successifs sont désignés par les lettres

$$....m_{,,,},\quad m_{,,},\quad m_{,},\quad M,\quad m',\quad m'',\quad m'''....$$

Ces points, ainsi que ceux de l'intégrale précédente, sont joints par des droites, afin d'en rendre l'ensemble plus évident.

Il convient de remarquer que les deux intégrales indirectes se réduiraient à une seule, si l'on avait $\beta=\frac{1}{4}\alpha^2$.

1076. La méthode précédente suppose, comme on l'a déjà dit, que l'équation aux différences passe le premier degré, et qu'elle ne puisse se décomposer en facteurs rationnels. L'équation $\Delta y^2=c^2$, par exemple, dans l'hypothèse de $\Delta x=1$, donnant $\Delta y=+c$, $\Delta y=-c$, a deux intégrales distinctes,

$$y_{z,a}=cx+a,\qquad y_{z,a}=-cx+a'.$$

En faisant varier les constantes de ces équations, on n'obtiendrait point de nouvelles intégrales, quoiqu'il soit évident que les intégrales particulières que fournit la première, puissent coïncider avec celles qui résultent de la seconde, de manière à satisfaire à l'équation aux différences, comme le montrent les séries

$$\begin{array}{llll} x, & x_1, & x_2, & \text{etc.}, \\ y_{x,a}, & y_{x_1,a}=y_{x_1,a_1'}, & y_{x_2,a_1}=y_{x_2,a_2'}, & \text{etc.}, \end{array}$$

formées d'après celles du n° 1074.

Il est facile d'apercevoir pourquoi ce cas diffère de celui que nous avons considéré en premier lieu. Les deux intégrales de l'équation... $\Delta y^2 = c^2$, considérées séparément, ne fournissent que des droites parallèles qui ne sauraient se rencontrer; de plus, ces intégrales n'étant point liées entr'elles par une irrationnalité commune, et se trouvant exprimées par deux équations distinctes, on ne saurait, par une même opération, faire varier à la fois les arbitraires a et a', de manière que les droites données par l'une coupent celles qui résultent de l'autre; mais cette difficulté disparaît lorsqu'on a recours à l'équation aux différences.

En effet, les diverses intégrales complètes que peut avoir une équation aux différences, ne sauraient s'accorder indéfiniment dans les différences de tous les ordres, sans quoi elles seraient identiques. Lorsqu'on fait $y_{x_1,a}=y_{x_1,a_1}$, il en résulte bien $y_{x_2,a_1}=y_{x_2,a_2}$, mais non pas $y_{x_2,a}=y_{x_2,a_2}$, ainsi qu'il le faudrait pour que les différences secondes fussent communes aux deux équations. Nous conclurons de là, que les diverses intégrales d'une même équation du premier ordre, doivent, en général, répondre à diverses équations du second ordre; et M. Monge a montré, le premier, que l'on obtenait ces dernières en différentiant l'équation du premier ordre, parce que le résultat se décompose en plusieurs facteurs rationnels. C'est l'application du procédé exposé dans le n° 632, qui l'a conduit à cette remarque.

Si l'on prend la différence de l'équation $\Delta y^2 = c^2$, on aura l'équation

$$2\Delta y \Delta^2 y + \Delta^2 y^2 = 0,$$

qui se décompose dans les facteurs

$$\Delta^2 y = 0, \qquad 2\Delta y + \Delta^2 y = 0;$$

le premier donne $\Delta y = A$, A étant une constante, et par une nou-

velle intégration, mène à $y = Ax + a$. La constante A n'est pas arbitraire, puisque l'équation $\Delta y = A$ doit nécessairement s'accorder avec la proposée $\Delta y^2 = c^2$; on a donc $A = \pm c$ et $y = \pm cx + a$: telle est l'intégrale qui se présente la première. Le second facteur $2\Delta y + \Delta^2 y = 0$ s'intègre facilement et conduit d'abord à $2y + \Delta y = b$; ce dernier résultat donne, par le n° 1038,

$$y = (-1)^x \Sigma \frac{b}{(-1)^{x+1}} = (-1)^x \left\{ B - \frac{b}{2}(-1)^{-x-1} \right\}$$
$$= b + B(-1)^x,$$

en réduisant et changeant l'arbitraire b en $2b$. Tirant ensuite de cette expression la valeur de Δy, pour la comparer à l'équation $\Delta y^2 = c^2$, afin de déterminer l'une des arbitraires, on trouvera $\Delta y = -2B(-1)^x$, d'où l'on déduira $B = \pm \frac{c}{2}$; on aura donc pour l'équation proposée $\Delta y^2 = c^2$, les quatre intégrales suivantes :

$$y_{x,a} = cx + a \ldots\ldots(1), \qquad y_{x,a} = -cx + a \ldots\ldots(2),$$
$$y_{x,b} = \frac{c}{2}(-1)^x + b, \qquad y_{x,b} = -\frac{c}{2}(-1)^x + b.$$

M. Biot met les deux dernières sous la forme

$$y_{x,b} = \frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + b \ldots(3), \qquad y_{x,b} = -\frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + b \ldots(4);$$

pour les faire partir d'une abscisse quelconque $x = \alpha$. Si l'on désigne alors par β l'ordonnée de ce premier point, et qu'on détermine les constantes b, pour qu'elle soit commune aux deux équations précédentes, on en déduira

$$y_{x,b} = \frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + \beta - \frac{c}{2} \ldots(3'), \qquad y_{x,b} = -\frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + \beta + \frac{c}{2} \ldots(4'),$$

qui, pour les abscisses,

α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, etc.,

conduiront respectivement aux ordonnés

β, $\beta - c$, β, $\beta - c$, etc.,
β, $\beta + c$, β, $\beta + c$, etc.,

sur lesquelles on construira les polygones $Mm'M''m'''M^{\text{IV}}$ etc., ... $MM'M''M'''M^{\text{IV}}$ etc., *fig.* 7, formés de droites comprises, tantôt dans l'intégrale (1), tantôt dans l'intégrale (2), le premier donnant alternativement $\Delta y = -c$, $\Delta y = +c$, et le second, $\Delta y = +c$, $\Delta y = -c$. FIG. 7.

1077. Pour appliquer commodément le procédé de M. Monge à l'équation du n° 1075,

$$y = \Delta y - \frac{\Delta y^2}{x^2},$$

dans laquelle $\Delta x = x$, M. Biot la change en

$$y = Px - P^2,$$

en faisant $P = \frac{\Delta y}{x}$; et prenant la différence, il obtient

$$\Delta y = P\Delta x + x\Delta P + \Delta P\Delta x - 2P\Delta P - \Delta P^2,$$

ce qui se réduit à

$$\Delta P(-2x + 2P + \Delta P) = 0,$$

en mettant pour Δy sa valeur Px, et en observant que $\Delta x = x$.

Le premier facteur $\Delta P = 0$, étant intégré, donne $P = \frac{\Delta y}{x} = a$, ou $\Delta y = ax$, valeur qui, substituée dans l'équation proposée aux différences, conduit immédiatement à l'intégrale directe $y = ax - a^2$.

Le second facteur $2P + \Delta P = 2x$, revenant à $P_1 + P = 2x$, conduit, par le procédé du n° 1056, à intégrer d'abord l'équation $x_{z+1} = 2x_z$, puisque $x_1 = 2x$, et on parvient à $x_z = 2^z$; puis en opérant sur l'équation

$$P_{z+1} + P_z = 2^{z+1},$$

on trouve

$$P_z = (-1)^z \Sigma \frac{2^{z+1}}{(-1)^{z+1}} = (-1)^z \Sigma (-2)^{z+1} = -(-1)^z [C + \tfrac{1}{3}(-2)^{z+1}].$$

Mais de $P_z = \frac{\Delta y_z}{x_z} = \frac{\Delta y_z}{2^z}$, il résulte

$$\Delta y_z = -(-1)^z [C.2^z - \tfrac{2}{3}(-4)^z] = -C(-2)^z + \tfrac{2}{3}(4)^z,$$

d'où l'on déduit

$$y_z = -\Sigma [C(-2)^z - \tfrac{2}{3}(4)^z] = \tfrac{1}{3} C(-2)^z + \tfrac{2}{9}(4)^z + C';$$

remettant pour z sa valeur $\frac{lx}{l2}$, tirée de l'équation $x_z = 2^z$, on aura

$$y_x = \frac{2}{9} x^2 + \frac{Cx}{3}(-1)^{\frac{lx}{l2}} + C'.$$

Cette équation contenant deux arbitraires, il s'en trouve une de surabondante qu'il faut déterminer, en substituant cette valeur de y_x dans l'équa-

tion aux différences, $y = \Delta y - \frac{\Delta y^2}{x^2}$, qui se réduit alors à

$$C' = - C'(-1)^{\frac{2lx}{l2}};$$

et l'on a, par conséquent,

$$y_x = \frac{a}{9}x^2 + \frac{Cx}{3}(-1)^{\frac{lx}{l2}} - C'(-1)^{\frac{2lx}{l2}},$$

résultat qui devient identique à celui du n° 1075, en prenant $C = -b$.

1078. Les nouvelles intégrales que nous venons de trouver pour les équations aux différences, ont bien, avec les solutions particulières des équations différentielles, une analogie très-remarquable : les unes et les autres s'obtiennent, soit en faisant varier la constante arbitraire dans l'intégrale complète, soit en différentiant de nouveau l'équation aux différences, dans un cas, et l'équation différentielle dans l'autre; mais malgré ces diverses conformités, les solutions particulières des équations différentielles ont, dans l'absence de la constante arbitraire, un caractère distinctif auquel il faut bien faire attention, pour éviter l'erreur dans laquelle le géomètre Charles est tombé, et qui l'a conduit aux plus étranges paradoxes, relativement au Calcul intégral (*). Il remarqua le premier, dans le t. X des *Savans étrangers*, la pluralité d'intégrales dont pouvait être susceptible une équation aux différences; mais il crut, dans la suite (*Mém. de l'Acad.*, année 1788), en pouvoir conclure les solutions particulières des équations différentielles correspondantes, en faisant seulement $\Delta x = 0$, pour répondre à la supposition de dx infiniment petit; « par ce moyen, dit-il, on obtiendra des solutions » particulières plus générales que celles qui sont connues jusqu'à présent, et l'on en pourra déduire, comme un cas particulier, la solution » particulière ordinaire; dans tout ceci on suppose Δx constante. » Charles appuie cette assertion sur le raisonnement suivant : « L'équation aux différences infiniment petites (c'est-à-dire l'équation différentielle), est la limite de l'équation aux différences finies correspondantes; donc la solution particulière de l'équation aux différences

(*) On verra plus loin que les équations aux différences admettent en outre de véritables solutions particulières, c'est-à-dire des équations primitives dépourvues de constantes arbitraires, et qui ne sont pas comprises dans les intégrales directes ou indirectes.

» infiniment petites, est ce que devient l'intégrale nouvelle de l'équa- » tion aux différences finies, quand on fait dans cette intégrale $\Delta x = 0$. »

Il est bien vrai qu'en faisant $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, dans une équation aux différences, on en tire l'équation différentielle qui en est la limite, parce que dans cette hypothèse on supprime tous les termes qui ne sont pas homogènes en Δx, Δy (69); mais on ne saurait en conclure que les équations primitives correspondantes à l'une et à l'autre de ces équations soient liées entr'elles de la même manière; car si on tire des équations (W) du n° 1074, $y_{x_1,a} = \mathrm{f}(x_1, a)$ et $y_{x_1,a_1} = \mathrm{f}(x_1, a_1)$, on aura $\mathrm{f}(x_1, a_1) - \mathrm{f}(x_1, a) = 0$, résultat qui prendra la forme $\Delta a \mathrm{f}_1(x_1, a, \Delta a) = 0$, lorsqu'on le développera après y avoir changé a_1 en $a + \Delta a$; il donnera d'abord $\Delta a = 0$, ou $a = const.$, valeur qui ne conduit qu'à l'intégrale directe. Il reste à traiter l'équation $\mathrm{f}_1(x + \Delta x, a, \Delta a) = 0$, laquelle demeure encore susceptible d'une véritable intégration; mais si on y fait Δx et Δa infiniment petits, elle se transforme en une équation primitive, et ne donne plus qu'une valeur particulière pour a. Lors donc que l'on veut passer de la nouvelle intégrale de l'équation aux différences, à la solution particulière de l'équation différentielle, il faut faire disparaître la constante, sans néanmoins lui assigner aucune valeur particulière, ce qui ne se peut qu'en revenant aux différences et en effectuant ensuite sur le résultat le passage des différences aux différentielles.

En prenant une marche contraire, Charles obtenait une équation primitive qui ne pouvait pas satisfaire à l'équation différentielle; et pour parer à cet inconvénient, il introduisait dans l'intégrale de l'équation aux différences un terme affecté des différences, qui devenait une différentielle du premier odre, et détruisait ainsi l'homogénéité qui fait la base du Calcul différentiel; cette conséquence aurait suffi seule pour montrer l'erreur dans laquelle il était tombé; mais il y en ajoutait une autre qui n'était pas moins paradoxale : c'est que tous les polygones inscrits à une même courbe ne se confondent pas avec elle, quand on suppose le nombre de leurs côtés infini, et qu'il y a un choix à faire entre ces polygones, pour tomber sur celui dont la limite conduise à l'expression de l'inclinaison de la tangente.

1079. M. Poisson ayant repris le sujet que nous venons de traiter, y ajouta plusieurs remarques importantes. Premièrement, il montra, d'une manière nouvelle et fort simple, la liaison qu'ont, avec l'équation aux différences et son intégrale directe, les intégrales indirectes

obtenues par Charles, et prouva que la première avait encore un nombre infini d'intégrales différentes de celles dont on vient de parler. Voici un extrait de ces considérations.

L'équation primitive $F(x, y, a)=0$ étant mise sous la forme

$$(a-p)(a-q)(a-r)\ldots.=0,$$

où p, q, r, etc., désignent les valeurs qu'on en tire en la résolvant par rapport à la constante arbitraire a, deviendra

$$(a-p_{\prime})(a-q_{\prime})(a-r_{\prime})\ldots.=0,$$

lorsqu'on y fera varier x et y; et mettant, dans ce second état, au lieu de a chacune de ses valeurs, puis multipliant entr'elles les équations produites par ces substitutions, on obtiendra pour résultat de l'élimination de la constante arbitraire a, l'équation aux différences

$$\left.\begin{array}{l}(p-p_{\prime})(p-q_{\prime})(p-r_{\prime})\ldots.\\ \times\ (q-p_{\prime})(q-q_{\prime})(q-r_{\prime})\ldots.\\ \times\ (r-p_{\prime})(r-q_{\prime})(r-r_{\prime})\ldots.\\ \times\ \text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Cette dernière contient deux sortes de facteurs : les uns, comme $p-p_{\prime}$, $q-q_{\prime}$, etc., formés de la différence de deux valeurs successives de la même fonction, et donnant, en conséquence,

$\Delta p=0$, $\Delta q=0$, etc., conduisent à $a=p$, $a=q$, etc.,

équations primitives équivalentes à l'intégrale complète.

Les autres facteurs, comme

$$p-q_{\prime},\quad p-r_{\prime},\ldots\ldots q-p_{\prime},\quad \text{etc.},$$

qui, étant égalés à zéro, vérifient l'équation proposée aussi bien que le font les précédens, ont des intégrales absolument différentes de l'équation $F(x, y, a)=0$, et qui sont les intégrales obtenues par Charles; mais ce n'est pas encore tout.

Il n'est pas nécessaire que l'équation primitive qui vérifie l'équation aux différences, corresponde dans toute son étendue au même facteur de celle-ci; il suffit qu'elle en fasse toujours évanouir un, quand il serait pris tantôt dans une classe, tantôt dans une autre, ainsi qu'on a pu le remarquer dans la construction qui termine le n° 1076, et comme on va le voir sur l'exemple choisi par M. Poisson.

1080. Soit l'équation primitive

$$y=(a+x)^2, \quad \text{donnant} \quad (a+x-\sqrt{y})(a+x+\sqrt{y})=0;$$

si l'on passe de x à $x+1$, on aura

$$(a+x+1-\sqrt{y_1})(a+x+1+\sqrt{y_1})=0,$$

d'où, par l'élimination de a, l'on déduira

$$(1+\sqrt{y}-\sqrt{y_1})(1+\sqrt{y}+\sqrt{y_1})(1-\sqrt{y}-\sqrt{y_1})(1-\sqrt{y}+\sqrt{y_1})=0.$$

On peut d'abord s'assurer que ce résultat s'accorde avec l'équation

$$y=\left(\frac{\Delta y-1}{2}\right)^2,$$

obtenue en tirant de la différence de l'équation $y=(a+x)^2$, la valeur de $a+x$; car si l'on prend la racine quarrée, il vient

$$\pm\sqrt{y}=\frac{\Delta y-1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \pm\sqrt{y}=\frac{y_1-y-1}{2}, \quad y_1-(y\pm 2\sqrt{y}+1)=0,$$

équations dont la dernière se décompose aisément en quatre facteurs, lorsqu'on y regarde y et y_1 comme les quarrés de $\sqrt{y}$ et de $\sqrt{y_1}$.

Cela posé, les facteurs

$$1+\sqrt{y}-\sqrt{y_1}=0, \qquad 1-\sqrt{y}+\sqrt{y_1}=0,$$

équivalant à $\pm\Delta\sqrt{y}=1$, donnent, par leur intégration, $\pm\sqrt{y}=x+a$, ce qui est l'équation primitive de laquelle nous sommes partis.

Les deux autres facteurs

$$1+\sqrt{y}+\sqrt{y_1}=0, \qquad 1-\sqrt{y}-\sqrt{y_1}=0,$$

lorsqu'on y fait $\pm\sqrt{y}=-\frac{1}{2}+z$, se changent en

$$z+z_1=0,$$

équation à laquelle on satisfait en posant $z=b(-1)^x$ (1040), b étant une constante arbitraire; on a donc

$$\pm\sqrt{y}=-\tfrac{1}{2}+b(-1)^x, \quad \text{d'où} \quad y=\{-\tfrac{1}{2}+b(-1)^x\}^2.$$

Voilà l'intégrale qui résulterait de la variation de la constante arbitraire a.

En effet, le changement de x en $x+1$, et de a en $a+\Delta a$, dans $y=(a+x)^2$, conduit à

$$y_1=(a+x+1)^2+2\Delta a(a+x+1)+\Delta a^2;$$

égalant à zéro la partie de y_1 produite par la variation de a, on obtiendra

$$2\Delta a(a+x+1)+\Delta a^2=0;$$

et laissant de côté le facteur $\Delta a=0$, qui ne donnerait que l'intégrale directe, on aura l'équation

$$2(a+x+1)+\Delta a=0, \quad \text{ou} \quad a+\Delta a+x+1+a+x=-1,$$

laquelle, devenant

$$z_1+z=-1,$$

lorsqu'on y fait $a+x=z$, rentre dans celle du n° 1039. On en déduira

$$z=C(-1)^x, \qquad (-1)^x\Delta C=1,$$

d'où il suit

$$\Delta C=(-1)^{-x}, \qquad C=b-\tfrac{1}{2}(-1)^{-x}, \qquad z=-\tfrac{1}{2}+b(-1)^x,$$

et enfin l'intégrale indirecte trouvée ci-dessus, si l'on fait attention que $y=z^2$.

En considérant que $\sqrt{y}$ renferme implicitement le double signe $\pm$, on peut réunir les quatre facteurs de l'équation aux différences proposée, en un seul, de la forme

$$1+\sqrt{y}-(-1)^X\sqrt{y_1}=0,$$

en désignant par X une fonction de x assujétie seulement à être un nombre entier toutes les fois que x en est un, et supposant, en conséquence, que les valeurs de cette variable soient prises dans la série des nombres naturels, Δx étant 1. Par ces hypothèses, l'expression $(-1)^X$ ne pourra être que ± 1; dans le premier cas, l'équation précédente sera identique avec les facteurs qui donnent l'intégrale directe, et avec les autres, dans le second : cette équation et son intégrale complète, vérifieront donc toujours la proposée.

Pour trouver cette intégrale, M. Poisson multiplie par le facteur $(-1)^{\Sigma X}$ l'équation rapportée ci-dessus ; et comme

$$(-1)^{\Sigma X}[(-1)^X\sqrt{y_1}-\sqrt{y}]=\Delta.(-1)^{\Sigma X}\sqrt{y},$$

il obtient

$$(-1)^{\Sigma X}\sqrt{y} = b + \Sigma(-1)^{\Sigma X}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{y} = \frac{b+\Sigma(-1)^{\Sigma X}}{(-1)^{\Sigma X}}.$$

Si l'on fait $X=1$, il viendra

$$(-1)^{X} = -1, \quad \Sigma X = x, \quad \Sigma(-1)^x = -\frac{(-1)^x}{2},$$

d'où

$$\sqrt{y} = b(-1)^{-x} - \tfrac{1}{2},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà trouvé; car il est visible qu'on peut changer x en $-x$ dans $(-1)^x$.

On peut donner à l'intégrale générale obtenue ci-dessus la forme

$$y = [b + \Sigma(-1)^{\Sigma X}]^2;$$

en élevant les deux membres au quarré, et en observant que ...... $(-1)^{2\Sigma X} = 1$, puisque ΣX doit toujours être un nombre entier. De plus, si l'on fait attention que la fonction ΣX, prise sans constante arbitraire, n'est autre chose qu'un nombre entier, on pourra substituer à ΣX une nouvelle fonction X, et écrire

$$y = [b + \Sigma(-1)^{X}]^2.$$

1081. La méthode que nous venons d'indiquer, reposant sur la résolution de l'équation aux différences proposée, se complique nécessairement, à mesure que le degré de cette équation s'élève; et il faut ensuite pouvoir intégrer ses facteurs « après qu'on y a substitué aux » racines de l'unité qu'ils comprennent explicitement ou implicitement, » des puissances entières ou variables de ces racines, ce qui », comme le dit M. Poisson, « en rendra le plus souvent l'application impos- » sible »: aussi n'est-ce que comme un complément nécessaire de la théorie des équations aux différences, que j'en ai parlé dans ce Traité, renvoyant pour les détails aux Mémoires de M. Poisson, cités dans la table; mais je rapporterai encore la manière dont il explique, dans le second, la multiplicité des intégrales des équations aux différences.

En supposant toujours $\Delta x = 1$, l'équation générale aux différences,

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots . y_{x+n}) = 0,$$

équivaut à la suite d'équations particulières,

$$f(0, y_0, y_1, y_2, \ldots . y_m\ ) = 0,$$
$$f(1, y_1, y_2, y_3, \ldots . y_{m+1}) = 0,$$
$$f(2, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_{m+2}) = 0,$$
etc.,

au moyen desquelles on déterminerait la valeur de y_m, puis celles de y_{m+1}, de y_{m+2}, etc.; mais si le degré de l'équation proposée est marqué par n, et qu'on élimine y_m entre les deux premières équations de la suite précédente, la résultante en y_{m+1} pourra monter au degré n^2 (1035); celle qu'on obtiendrait en y_{m+2}, en éliminant y_m et y_{m+1} entre les trois premières, monterait au degré n^3; et en continuant ainsi jusqu'à y_x, l'équation finale pourrait s'élever jusqu'au degré n^{x+1-m}.

La conséquence de cette multiplicité de valeurs de la fonction cherchée y_x, est d'introduire dans l'intégrale une sorte de fonctions arbitraires telles que celle qui a été désignée ci-dessus par X, et restreintes à n'avoir, pour chaque valeur déterminée de x, que n^{x+1-m} valeurs.

1082. Le même géomètre a reconnu le premier, et prouvé, que les équations aux différences admettaient aussi de véritables solutions particulières, c'est-à-dire des équations primitives qui les vérifient, et qui pourtant ne sauraient être complétées par l'introduction d'une constante arbitraire : telle est l'équation

$$y = \pm \tfrac{8}{9}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^x,$$

par rapport à l'équation aux différences

$$y + \tfrac{4}{3}\Delta y - \tfrac{4}{9}(64)^x \Delta y^3 = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$y - \frac{a}{4^x} + \frac{3}{16}a^3 = 0,$$

la différence de x étant 1.

Le procédé du n° 642 s'applique aisément aux équations aux différences du premier ordre, mises sous la forme $\Delta y = p$, p désignant une fonction de $x, y, \Delta x$, et cette dernière différence pouvant être supposée variable aussi bien que constante. En effet, si, en conservant les dénominations du numéro cité, on change seulement les différentielles en différences, on

passera encore, des équations primitives

$$y = X, \qquad y = V = X + V'h + V''h^{\mu} + \text{etc.};$$

à l'équation

$$\Delta X + \Delta k = P + P'k^{m} + P''k^{n} + \text{etc.},$$

k représentant toujours $V'h + V''h^{\mu} + \text{etc.}$; mettant alors pour Δk sa valeur, et développant le second membre comme dans le numéro cité, la recherche des termes qui doivent être affectés de la même puissances de h, fera voir que l'équation primitive $y = X$ ne peut être complétée lorsque l'exposant m est < 1, c'est-à-dire lorsque $\frac{dp}{dy}$ est infini. Tel est encore le caractère par lequel on reconnait que toute équation $y = X$, qui satisfait à l'équation aux différences proposée, n'est pas comprise dans l'intégrale complète, mais est une solution particulière.

1083. L'équation apportée en exemple au commencement de l'article précédent, se résout par les formules du troisième degré, et donne

$$p = u + v, \qquad p = \alpha u + \alpha^2 v, \qquad p = \alpha^2 u + \alpha v,$$

en posant

$$\sqrt[3]{\frac{9}{8}\,\frac{y}{(64)^x} + \sqrt{\frac{81}{64}\,\frac{y^2}{(64)^{2x}} - \frac{1}{(64)^{3x}}}} = u,$$
$$\sqrt[3]{\frac{9}{8}\,\frac{y}{(64)^x} - \sqrt{\frac{81}{64}\,\frac{y^2}{(64)^{2x}} - \frac{1}{(64)^{3x}}}} = v,$$

α et α^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité (*Complément des Élémens d'Algèbre*).

Ces expressions donnent, pour $\frac{dp}{dy}$, les valeurs

$$\frac{3(u+v)}{8\sqrt{\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}}}, \qquad \frac{3(\alpha u + \alpha^2 v)}{8\sqrt{\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}}}, \qquad \frac{3(\alpha^2 u + \alpha v)}{8\sqrt{\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}}},$$

qu'on rend infinies en posant

$$\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x} = 0, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{64}{81}\cdot\frac{1}{(64)^x}, \quad y = \pm\frac{8}{9}\,\frac{1}{\sqrt{(64)^x}}.$$

Il faut ici faire attention à la manière de prendre l'expression...... $\sqrt{(64)^x} = (\sqrt{64})^x$; car si l'on choisit 8^x, la valeur résultante...... $y = \pm \frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^x$ ne s'accorde avec aucune des valeurs de Δy; mais si l'on choisit $(-8)^x$, il vient alors l'équation

$$y = \pm \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x,$$

qui, s'accordant avec les deux dernières de ces valeurs, est la solution particulière cherchée.

M. Poisson remarque en outre qu'on peut parvenir à cette espèce de solutions particulières, sans résoudre l'équation proposée (643); mais que quand on veut les déduire de la variation de la constante arbitraire, dans l'intégrale complète, comme on tombe d'abord sur une équation aux différences, dont il faut chercher les solutions particulières, la connaissance de cette intégrale ne simplifie pas la question, ainsi qu'elle le fait lorsqu'il s'agit des équations différentielles. M. Poisson étend ces recherches aux ordres supérieurs au premier; mais nous renvoyons encore ici, comme plus haut, et par les mêmes raisons, à son Mémoire, cité dans la table.

De l'intégration des équations aux différences à trois et à un plus grand nombre de variables.

1084. Nous avons fait voir, dans le n° 913, que les fonctions de deux variables engendrent des séries formant des tables à double entrée, et qu'un terme quelconque de ces séries peut être exprimé par ceux qui le précèdent : de là naissent *les équations aux différences partielles*.

Soit $y_{x,t}$ une fonction quelconque des deux variables x et t; on en déduira, par les variations de x et de t, un tableau semblable à celui de la page 45.

Supposons qu'il y ait entre les valeurs successives de $y_{x,t}$ une relation exprimée par l'équation du premier degré

$$\left.\begin{array}{l} Ay_{x,t} + By_{x+1,t} + Cy_{x+2,t}\ldots\ldots\ldots + Ny_{x+n,t} \\ \qquad + B'y_{x,t+1} + C'y_{x+1,t+1}\ldots\ldots + N'y_{x+n-1,t+1} \\ \qquad\qquad + C''y_{x,t+2}\ldots\ldots\ldots + N''y_{x+n-2,t+2} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + N^{(n)}y_{x,t+n} \end{array}\right\}$$

dans laquelle les coefficiens A, B, B', C, C', C'',...N, N', etc., sont constans, formée sur le modèle de celle qui indique la loi des

séries récurrentes (1050); il en naîtra une série du genre de celles que Lagrange a nommées *séries récurrentes doubles* (*).

1085. Occupons-nous d'abord du cas où l'équation proposée, n'ayant que quatre termes, est de la forme

$$Ay_{x,t} + By_{x+1,t} + B'y_{x,t+1} + C'y_{x+1,t+1} = 0:$$

faisons $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, α et β étant des constantes indéterminées; nous aurons

$$y_{x+1,t} = a\alpha^{x+1}\beta^t,\quad y_{x,t+1} = a\alpha^x\beta^{t+1},\quad y_{x+1,t+1} = a\alpha^{x+1}\beta^{t+1};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, nous obtiendrons

$$A + B\alpha + B'\beta + C'\alpha\beta = 0.$$

Cette équation donne la valeur de l'une des deux indéterminées α et β, par le moyen de l'autre; on en tire $\beta = -\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}$, d'où l'on conclut

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t,$$

expression dans laquelle la quantité α demeure entièrement arbitraire, aussi bien que a, mais qui n'est pas la plus générale de celles qui satisfont à l'équation proposée.

Si l'on réduit en série descendante, ordonnée suivant les puissances de α, la quantité $\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t$, et qu'on observe que cette série peut

---

(*) Cette équation est regardée ordinairement comme semblable à une équation différentielle partielle du premier degré et de l'ordre n, mais elle ne renferme pas cependant tous les termes qui résultent de n changemens successifs des indices x et t.

Le tableau de la page 45 montre que lorsqu'on augmente ces indices du même nombre d'unités, les valeurs correspondantes de la fonction $u_{x,t}$ occupent un espace rectangulaire, ensorte que l'équation complète de l'ordre n, doit être

$$\left.\begin{matrix} Ay_{x,t}\ldots\ldots\ldots + N y_{x+n,t} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ + A^{(n)}y_{x,t+n}\ldots + N^{(n)}y_{x+n,t+n} \end{matrix}\right\} = V_{x,y},$$

le premier membre étant composé de $n + 1$ lignes, renfermant chacune $n + 1$ termes. C'est ainsi qu'Arbogast forme ce genre d'équations (*Du calcul des dérivations*, p. 182).

se représenter sous la forme

$$\begin{array}{ll} T\alpha^{t} + T'\alpha^{t-1} + \text{etc.}, & \text{si } C' = 0, \\ T + T'\alpha^{-1} + \text{etc.}, & \text{si } A = 0, \text{ ou } B' = 0, \\ T\alpha^{-t} + T'\alpha^{-t-1} + \text{etc.}, & \text{si } B = 0; \end{array}$$

on posera en général

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C\alpha}\right)^{t} = T\alpha^{\mu t} + T'\alpha^{\mu t-1} + T''\alpha^{\mu t-2} + T'''\alpha^{\mu t-3} + \text{etc.},$$

μ pouvant être 1, 0 ou -1, et les coefficiens T, T', T'', etc., contenant, avec les lettres A, B, B', C', la variable t : alors l'expression de $y_{x,t}$ prendra la forme

$$y_{x,t} = Ta\alpha^{x+\mu t} + T'a\alpha^{x+\mu t-1} + T''a\alpha^{x+\mu t-2} + T'''a\alpha^{x+\mu t-3} + \text{etc.};$$

et changeant successivement les constantes a et α en b et β, en c et γ, etc., on aura aussi

$$y_{x,t} = Tb\beta^{x+\mu t} + T'b\beta^{x+\mu t-1} + T''b\beta^{x+\mu t-2} + T'''b\beta^{x+\mu t-3} + \text{etc.},$$
$$y_{x,t} = Tc\gamma^{x+\mu t} + T'c\gamma^{x+\mu t-1} + T''c\gamma^{x+\mu t-2} + T'''c\gamma^{x+\mu t-3} + \text{etc.},$$

etc.

Ces diverses valeurs satisfaisant en particulier à l'équation proposée, qui n'est que du premier degré, leur somme y satisfera pareillement, et l'on pourra prendre

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & T\,(a\alpha^{x+\mu t} + b\beta^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \text{etc.}) \\ & + T'\,(a\alpha^{x+\mu t-1} + b\beta^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \text{etc.}) \\ & + T''(a\alpha^{x+\mu t-2} + b\beta^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \text{etc.}) \\ & + T'''(a\alpha^{x+\mu t-3} + b\beta^{x+\mu t-3} + c\gamma^{x+\mu t-3} + \text{etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Chacune des lignes de cette expression, qui contient un nombre indéfini de constantes arbitraires, peut être remplacée par une fonction arbitraire de l'exposant variable dont ses termes sont affectés; et l'on obtient alors

$$y_{x,t} = T\varphi(x+\mu t) + T'\varphi(x+\mu t-1) + T''\varphi(x+\mu t-2) + \text{etc.},$$

en désignant par φ cette fonction arbitraire.

Pour se convaincre de la possibilité de substituer une fonction arbitraire à la place des séries

$$\begin{array}{llll} a\alpha^{x+\mu t} & + b\beta^{x+\mu t} & + c\gamma^{x+\mu t} & + \text{etc.}, \\ a\alpha^{x+\mu t-1} & + b\beta^{x+\mu t-1} & + c\gamma^{x+\mu t-1} & + \text{etc.}, \\ a\alpha^{x+\mu t-2} & + b\beta^{x+\mu t-2} & + c\gamma^{x+\mu t-2} & + \text{etc.}, \\ \text{etc.}, & & & \end{array}$$

il suffit d'observer que l'expression de $y_{x,t}$ ne satisfait à l'équation proposée, indépendamment de toute valeur particulière des quantités α, β, γ, etc., que parce que les termes où ces quantités se trouvent affectées des mêmes exposans, après la substitution des valeurs de $y_{x,t}$, $y_{x,t+1}$, $y_{x+1,t}$, $y_{x+1,t+1}$, se détruisent mutuellement, d'après la forme des coefficiens T, T', T'', etc.; car il est visible que ces conditions seront également remplies par la fonction φ, puisque les termes affectés des mêmes exposans, dans le premier cas, se trouveront multipliés par une même fonction, dans le second, et se détruiront de même, indépendamment de la forme de cette fonction.

Quand on a $t=0$, l'expression de $y_{x,t}$ devient d'abord

$$y_{x,0}=T\varphi(x)+T'\varphi(x-1)+T''\varphi(x-2)+T'''\varphi(x-3)+\text{etc.},$$

et se réduit à $y_{x,0}=\varphi(x)$, parce que, dans ce cas,

$$T=1, \quad T'=0, \quad T''=0, \quad T'''=0, \quad \text{etc.},$$

d'où l'on voit que $\varphi(x)$ n'est autre que la valeur de $y_{x,t}$, lorsqu'on y fait $t=0$; que l'on doit avoir en général $\varphi(x+\mu t)=y_{x+\mu t,0}$, et que par conséquent

$$y_{x,t}=Ty_{x+\mu t,0}+T'y_{x+\mu t-1,0}+T''y_{x+\mu t-2,0}+\text{etc.}$$

Les quantités $y_{x+\mu t,0}$, $y_{x+\mu t-1,0}$, $y_{x+\mu t-2,0}$, etc., ne sont autre chose que les termes pris à partir de l'indice $x+\mu t$, et en revenant vers l'indice 0, dans la première ligne de la table à double entrée, correspondante à l'équation proposée. Il suit de là que la détermination de la fonction arbitraire suppose que l'on connaisse tous les termes qui forment cette première ligne, et qu'il faut même pouvoir la continuer en arrière, c'est-à-dire l'étendre aux indices négatifs -1, -2, -3, etc. La valeur de $y_{x,t}$ se trouvera formée ainsi d'un nombre infini de termes; mais elle n'en contiendrait qu'un nombre fini, si tous ceux qui répondent

aux indices négatifs devenaient nuls, comme cela arrive dans quelques séries; et l'on aurait seulement

$$y_{x,t} = Ty_{x+\mu t,0} + T'y_{x+\mu t-1,0} + T''y_{x+\mu t-2,0} \ldots\ldots + T^{(x+\mu t)}y_{0,0}.$$

La même expression se terminerait encore si l'on avait $B'=0$, ou $C'=0$; car dans l'un et l'autre cas, le développement de la quantité $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t$ n'aura qu'un nombre $t+1$ de termes, tant que t sera un nombre entier positif.

1086. Prenons pour exemple la série récurrente double

1,	1,	1,	1,	1,	1....
0,	1,	2,	3,	4,	5....
0,	0,	1,	3,	6,	10....
0,	0,	0,	1,	4,	10....
0,	0,	0,	0,	1,	5....
0,	0,	0,	0,	0,	1....
etc.,					

dont chaque terme se forme en prenant la somme de celui qui le précède dans la ligne où il se trouve placé, et de celui qui précède ce dernier dans la colonne : le terme 10, par exemple, placé à la troisième ligne, dans la sixième colonne, est égal à 6, qui le précède, plus à 4, qui se trouve au-dessus de 6. Cette propriété donne évidemment l'équation

$$y_{x+1,t+1} = y_{x,t+1} + y_{x,t}:$$

en la rapportant à l'équation dont nous nous sommes occupés dans le numéro précédent, nous aurons

$$C'=1, \quad B'=-1, \quad B=0, \quad A=-1;$$

la quantité $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t$ devenant $\frac{1}{(\alpha-1)^t}$, nous donnera la série infinie

$$\alpha^{-t} + \frac{t}{1}\alpha^{-t-1} + \frac{t(t+1)}{1.2}\alpha^{-t-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}\alpha^{-t-3} + \text{etc.};$$

et comparant cette série avec la série correspondante du numéro cité, il en résultera

$$\mu = -1, \quad T = 1, \quad T' = \frac{t}{1}, \quad T'' = \frac{t(t+1)}{1.2}, \quad \text{etc.},$$

valeurs qui changent en

$$y_{x,t} = y_{x-t,0} + \frac{t}{1} y_{x-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{1.2} y_{x-t-2,0} + \text{etc.},$$

la formule générale de ce numéro.

Faisons à présent $x = 0$, pour avoir

$$y_{0,t} = y_{-t,0} + \frac{t}{1} y_{-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{1.2} y_{-t-2,0} + \text{etc.};$$

et en observant que tous les termes de la première colonne de la série proposée sont nuls, à l'exception du premier, nous en conclurons que l'expression de $y_{0,t}$ doit être nulle pour toutes les valeurs entières et positives de t, condition de laquelle il résulte

$$y_{-1,0} = 0, \quad y_{-2,0} = 0, \ldots y_{-s,0} = 0,$$

s désignant un nombre entier positif. La série qui exprime $y_{x,t}$ devient donc finie pour le cas qui nous occupe; et nous aurons seulement

$$y_{x,t} = y_{x-t,0} + \frac{t}{1} y_{x-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{1.2} y_{x-t-2,0} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{t(t+1)\ldots\ldots(x-1)}{1.2\ldots\ldots\ldots(x-t)} y_{0,0};$$

mais comme tous les termes de la première ligne de la série proposée sont égaux à l'unité, nous pourrons écrire

$$y_{x,t} = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t(t+1)}{1.2} \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(x-1)}{1.2\ldots(x-t)},$$

et, en sommant le second membre,

$$y_{x,t} = \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)\ldots x}{1.2.3\ldots(x-t+1)}.$$

Nous ferons remarquer que les nombres significatifs de la table précédente forment le *triangle arithmétique* de Pascal, dans lequel chaque colonne donne les coefficiens numériques des termes de la puissance du binome ayant pour exposant le nombre qui marque le rang de la colonne, diminué de l'unité.

1087. Discutons en particulier les cas où l'on a $C'=0$, ou bien $B'=0$, et dans lesquels l'expression de $y_{x,t}$ s'arrête (1085).

1°. Lorsque $C'=0$, l'équation proposée devient

$$Ay_{x,t}+By_{x+1,t}+B'y_{x,t+1}=0;$$

et si, pour abréger, on fait $-\frac{B}{B'}=p$, $\frac{A}{B}=q$, on trouvera

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{B'}\right)^t=p^t\alpha^t\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)^t;$$

développant et comparant à la série générale, on obtiendra

$$\mu=1,\quad T=p^t,\quad T'=\frac{t}{1}p^tq,\quad T''=\frac{t(t-1)}{1.2}p^tq^2,\quad \text{etc.},$$

d'où l'on déduira

$$y_{x,t}=p^t\left(y_{x+t,0}+\frac{t}{1}qy_{x+t-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}q^2y_{x+t-2,0}+\text{etc.}\right).$$

Cette expression, évidemment finie lorsque t est un nombre entier positif, ne contient que des termes de la forme $y_{s,0}$, s désignant un nombre entier positif.

2°. Lorsque $B'=0$, l'équation proposée, réduite à

$$Ay_{x,t}+By_{x+1,t}+C'y_{x+1,t+1}=0,$$

donne

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{C'\alpha}\right)^t=p^t\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)^t,$$

en faisant $-\frac{B}{C'}=p$, $\frac{A}{B}=q$; et tirant de là les valeurs des lettres μ, T, T', T'', etc., nous arriverons à

$$y_{x,t}=p^t\left(y_{x,0}+\frac{t}{1}qy_{x-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}q^2y_{x-2,0}+\text{etc.}\right),$$

expression qui demeure finie tant que t est un nombre entier positif, mais qui renferme un nombre limité de termes de la forme $y_{-1,0}$, lorsque $t>x$; il ne suffit donc pas, dans ce cas, comme pour le précédent, de connaître tous les termes de la première ligne de la série proposée, correspondans à des indices positifs, il faut encore pouvoir prolonger cette ligne en arrière, pour obtenir ceux qui répondent aux indices négatifs, savoir, $y_{-1,0}$, $y_{-2,0}$, ... $y_{-(t-x),0}$.

Si pourtant on ne connaissait pas immédiatement ces derniers termes, on pourrait les déduire de ceux de la première colonne, ainsi qu'il suit. On prendrait $x = 0$, et donnant successivement à t les valeurs 1, 2, 3, etc., on aurait

$$\begin{aligned}
y_{0,1} &= p(y_{0,0} + qy_{-1,0}),\\
y_{0,2} &= p^2(y_{0,0} + 2qy_{-1,0} + q^2y_{-2,0}),\\
y_{0,3} &= p^3(y_{0,0} + 3qy_{-1,0} + 3q^2y_{-2,0} + q^3y_{-3,0}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_{0,t} &= p^t\left(y_{0,0} + \tfrac{s}{1}qy_{-1,0} + \tfrac{s(s-1)}{1.2}q^2y_{-2,0} + \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

d'où l'on tirerait

$$\begin{aligned}
qy_{-1,0} &= \tfrac{1}{p}y_{0,1} - y_{0,0};\\
q^2y_{-2,0} &= \tfrac{1}{p^2}y_{0,2} - \tfrac{2}{p}y_{0,1} + y_{0,0};\\
q^3y_{-3,0} &= \tfrac{1}{p^3}y_{0,3} - \tfrac{3}{p^2}y_{0,2} + \tfrac{3}{p}y_{0,1} - y_{0,0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q^ty_{-t,0} &= \tfrac{1}{p^t}y_{0,t} - \tfrac{s}{1p^{t-1}}y_{0,t-1} + \tfrac{s(s-1)}{1.2p^{t-2}}y_{0,t-2} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

L'analogie de ces expressions avec les formules des différences successives (883) est frappante; et si on représente par

$$Y,\quad Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3,\ldots\ldots Y_x,$$

les termes de la série

$$y_{0,0},\quad \tfrac{1}{q}y_{1,0},\quad \tfrac{1}{q^2}y_{2,0},\quad \tfrac{1}{q^3}y_{3,0},\quad \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{q^x}y_{x,0},$$

et par

$$Y,\quad Y',\quad Y'',\quad Y''',\quad \text{etc.},$$

ceux de la série

$$y_{0,0},\quad \tfrac{1}{p}y_{0,1};\quad \tfrac{1}{p^2}y_{0,2};\quad \tfrac{1}{p^3}y_{0,3};\quad \text{etc.};$$

on aura, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
Y_{-1} &= Y' - Y = \Delta Y,\\
Y_{-2} &= Y'' - 2Y' + Y = \Delta^2 Y,\\
Y_{-3} &= Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = \Delta^3 Y,
\end{aligned}$$

etc.,

d'où l'on conclura

$$y_{x,t} = p^t q^x \left\{ Y_x + \frac{t}{1} Y_{x-1} + \frac{t(t-1)}{1.2} Y_{x-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} Y_{x-3} + \text{etc.} \right\},$$

en observant de remplacer dans la série du second membre, les termes affectés d'indices négatifs, par des différences dont l'exposant soit égal à cet indice, c'est-à-dire de substituer $\Delta^i Y$ à Y_{-i}.

1088. La méthode du n° 1085 peut s'appliquer à toutes les équations comprises dans la formule générale du n° 1084. En y faisant... $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, elle devient

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \ldots\ldots + N\alpha^n \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\beta \ldots\ldots + N'\alpha^{n-1}\beta \\ \qquad + C''\beta^2 \ldots\ldots + N''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + N^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0 \ldots (1);$$

mais cette dernière ne pouvant donner en général la valeur de β en α que par une série infinie, ne fournira non plus, pour exprimer $y_{x,t}$, qu'une série infinie. Il s'offre, à la vérité, un assez grand nombre de cas particuliers, dans lesquels on peut exprimer d'une manière rationnelle et sans dénominateur complexe, les quantités α et β, par le moyen d'une nouvelle indéterminée ω : l'équation

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\beta \\ \qquad + C''\beta^2 \end{array}\right\} = 0,$$

dérivée de l'équation du second ordre

$$\left.\begin{array}{l} Ay_{x,t} + By_{x+1,t} + Cy_{x+2,t} \\ \quad + B'y_{x,t+1} + C'y_{x+1,t+1} \\ \qquad + C''y_{x,t+2} \end{array}\right\} = 0,$$

est dans un de ces cas; mais au lieu de nous y arrêter, nous allons exposer la méthode qui convient à tous les cas en général.

Cette méthode est fondée sur ce que l'expression de $y_{x,t}$ ne contient que β^t, et que quand t est $> n$, il est toujours possible, au moyen de l'équation (1), d'exprimer β^t par α et par les puissances de β infé-

rieures à β^n. En effet, t étant alors de la forme $mn + p$, m désignant un nombre entier quelconque, et p un nombre entier moindre que n, on pourra écrire $\beta^t = (\beta^n)^m \beta^p$; on prendra donc la valeur de β^n dans l'équation (1), pour l'élever à la puissance m et la multiplier ensuite par β^p, puis, toujours avec le secours de l'équation (1), on éliminera successivement les puissances de β égales ou supérieures à β^n. On conçoit facilement que le dernier résultat de cette opération doit être de la forme

$$\begin{aligned}\beta^t = T &+ T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 \ldots + T^{(t)}\alpha^t \\ &+ T_1\beta + T'_1\alpha\beta + T''_1\alpha^2\beta \ldots + T_1^{(t-1)}\alpha^{t-1}\beta \\ &+ T_2\beta^2 + T'_2\alpha\beta^2 + \ldots + T_2^{(t-2)}\alpha^{t-2}\beta^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ T_{n-1}\beta^{n-1} \ldots\ldots + T_{n-1}^{(t-n+1)}\alpha^{t-n+1}\beta^{n-1},\end{aligned}$$

les coefficiens T, T'....T_1, T'_1, etc., étant des fonctions rationnelles de t, et des coefficiens A, B, etc., de l'équation (1).

On obtiendra d'abord une valeur particulière de $y_{x,t}$, en multipliant cette expression de β^t par $a\alpha^x$; et changeant les constantes arbitraires a et α; ainsi qu'on l'a fait dans le n° 1085, on formera une suite de valeurs particulières de $y_{x,t}$, dont la somme satisfera encore à l'équation proposée, parce qu'elle est du premier degré; enfin, les considérations du numéro cité étant applicables au cas actuel, permettront de changer en

$$T\mathrm{f}(x), \qquad T'\mathrm{f}(x+1), \qquad T''\mathrm{f}(x+2), \qquad \text{etc.,}$$

les termes de la première ligne,

$$T\alpha^x, \qquad T'\alpha^{x+1}, \qquad T''\alpha^{x+2}, \qquad \text{etc.,}$$

en

$$T_1\mathrm{f}_1(x), \qquad T'_1\mathrm{f}_1(x+1), \qquad T''_1\mathrm{f}_1(x+2), \qquad \text{etc.,}$$

les termes de la seconde ligne,

$$T_1\alpha^x\beta, \qquad T'_1\alpha^{x+1}\beta, \qquad T''_1\alpha^{x+2}\beta, \qquad \text{etc.,}$$

etc.,

en désignant par $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{f}_1(x)$, $\mathrm{f}_2(x)$, etc., des fonctions arbitraires de x, indépendantes les unes des autres. Le nombre de ces fonctions sera évidemment égal à n, car la dernière ligne

$$T_{(n-1)}\alpha^x\beta^{n-1} \ldots + T_{n-1}^{(t-n+1)}\alpha^{x+t-n+1}\beta^{n-1},$$

fournira les termes

$$T_{(n-1)}f_{n-1}(x)\ldots\ldots+T_{n-1}^{(t-n+1)}f_{n-1}(x+t-n+1),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}y_{x,t} = & \; T f(x) + T' f(x+1) + T'' f(x+2) + T''' f(x+3) \ldots + T^{(t)} f(x+t)\\ & + T_1 f_1(x) + T'_1 f_1(x+1) + T''_1 f_1(x+2) \ldots + T_1^{(t-1)} f_1(x+t-1)\\ & + T_2 f_2(x) + T'_2 f_2(x+1) \ldots + T_2^{(t-2)} f_2(x+t-2)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + T_{(n-1)} f_{n-1}(x) \ldots\ldots + T_{(n-1)}^{(t-n+1)} f_{n-1}(x+t-n+1).\end{aligned}$$

La détermination de ces fonctions arbitraires s'opère au moyen des n premières ligne de la table de la page 45, en y changeant u en y et y en t, c'est-à-dire en supposant que l'on connaisse les valeurs de

$$y_{x,0},\quad y_{x,1},\quad y_{x,2},\ldots y_{x,n-1},$$

quelle que soit celle de x; car il est visible que, quand on fait $t=0$, $=1$, $=2$, ... $=x-1$, l'expression de β^t devant se réduire successivement à 1, β, β^2, β^3, ... β^{x-1}, il faut alors que

$$\begin{aligned}&T=1,\quad T'=0,\quad T''=0,\quad T'''=0,\quad \text{etc.},\\ &T_1=1,\quad T'_1=0,\quad T''_1=0,\quad T'''_1=0,\quad \text{etc.},\\ &T_2=1,\quad T'_2=0,\quad T''_2=0,\quad T'''_2=0,\quad \text{etc.},\\ &\text{etc.},\end{aligned}$$

et que l'expression générale de $y_{x,t}$ donne par conséquent

$$y_{x,0}=f(x),\quad y_{x,1}=f_1(x),\quad y_{x,2}=f_2(x),\quad \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$\begin{aligned}y_{x,t} = & \; T y_{x,0} + T' y_{x+1,0} + T'' y_{x+2,0} + T''' y_{x+3,0} \ldots\ldots + T^{(t)} y_{x+t,0}\\ & + T_1 y_{x,1} + T'_1 y_{x+1,1} + T''_1 y_{x+2,1} \ldots\ldots + T_1^{(t-1)} y_{x+t-1,1}\\ & + T_2 y_{x,2} + T'_2 y_{x+1,2} \ldots\ldots + T_2^{(t-2)} y_{x+t-2,2}\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + T_{n-1} y_{x,n-1} \ldots\ldots + T_{n-1}^{(t-n+1)} y_{x+t-n+1,n-1}.\end{aligned}$$

1089. On peut aussi parvenir à déterminer $y_{x,t}$ par la connaissance des m premières lignes et des $n-m$ premières colonnes de la table des valeurs de $y_{x,t}$, c'est-à-dire lorsque celles de

$$y_{x,0},\quad y_{x,1},\quad y_{x,2},\ldots\ldots y_{x,m-1},$$

seront données aussi bien que celles de

$$y_{0,t},\quad y_{1,t},\quad y_{2,t},\ldots\ldots y_{n-m-1,t}.$$

En faisant toujours $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, ce qui conduit à l'équation (1), on peut tirer de cette dernière la valeur du produit $\alpha^{n-m}\beta^m$, au lieu de celle de β^n, pour la substituer dans l'expression $\alpha^x\beta^t$, décomposée en $(\alpha^{n-m}\beta^m)^y\alpha^{x'}\beta^{t'}$, afin d'en éliminer tous les termes affectés du produit $\alpha^{n-m}\beta^m$, ou des puissances de ce produit, et qu'il n'y reste plus par conséquent que des termes dans lesquels les exposans de α soient moindres que $n-m$, lorsque celui de β égale ou surpasse m, et des termes où l'exposant de α égalant ou surpassant $n-m$, celui de β soit toujours moindre que m. Il est facile de voir que cette équation doit donner un résultat de la forme

$$\begin{array}{llll}
\alpha^x\beta^t = V & +V'\alpha & +V''\alpha^2\ldots\ldots\ldots & +V^{(x+t)}\alpha^{x+t} \\
\quad +V_1\beta & +V'_1\alpha\beta & +V''_1\alpha^2\beta\ldots\ldots\ldots & +V_1^{(x+t-1)}\alpha^{x+t-1}\beta \\
\quad +V_2\beta^2 & +V'_2\alpha\beta^2 & +V''_2\alpha^2\beta^2\ldots\ldots\ldots & +V_2^{(x+t-2)}\alpha^{x+t-2}\beta^2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\quad +V_m\beta^m & +V'_m\alpha\beta^m & +V''_m\alpha^2\beta^m\ldots\ldots\ldots & +V_m^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^m \\
\quad +V_{m+1}\beta^{m+1} & +V'_{m+1}\alpha\beta^{m+1} & +V''_{m+1}\alpha^2\beta^{m+1}\ldots & +V_{m+1}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+1} \\
\quad +V_{m+2}\beta^{m+2} & +V'_{m+2}\alpha\beta^{m+2} & +V''_{m+2}\alpha^2\beta^{m+2}\ldots & +V_{m+2}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+2} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\quad +V_{x+t}\beta^{x+t}, & & &
\end{array}$$

dans laquelle la somme des exposans des lettres α et β ne peut surpasser $x+t$, et où les lettres V, V', etc., V_1, V'_1, etc., désignent des fonctions rationnelles de t et des coefficiens de l'équation (1).

Il suit de la théorie des fonctions symétriques des racines des équations, que les différens termes de l'expression précédente sont absolument irréductibles, parce que le terme $\alpha^{n-m}\beta^m$ ne s'y trouvant plus, toutes les autres puissances et produits des lettres α et β renferment nécessairement des quantités irrationnelles distinctes et irréductibles entr'elles. Si donc on substitue, dans l'équation proposée aux différences, la valeur de $y_{x,t}$, déduite de cette expression, il faudra que tous les termes affectés des mêmes puissances de α et de β se détruisent sé-

parément, ce qui arriverait encore si l'on remplaçait chaque produit de la forme $\alpha^r\beta^s$, par une fonction quelconque de r et de s. Au moyen de cette remarque, nous obtiendrons, pour la valeur complète de $y_{x,t}$, l'expression

$$\begin{aligned}
y_{x,t} = {} & V\,\mathrm{f}(0,0) + V'\,\mathrm{f}(1,0) + V''\,\mathrm{f}(2,0) + V'''\,\mathrm{f}(3,0) \ldots \\
& \ldots\ldots + V^{(x+t)}\mathrm{f}(x+t,0) \\
& + V_1\mathrm{f}(0,1) + V'_1\mathrm{f}(1,1) + V''_1\mathrm{f}(2,1) + V'''_1\mathrm{f}(3,1) \ldots \\
& \ldots\ldots + V_1^{(x+t-1)}\mathrm{f}(x+t-1,1) \\
& + V_2\mathrm{f}(0,2) + V'_2\mathrm{f}(1,2) + V''_2\mathrm{f}(2,2) + V'''_2\mathrm{f}(3,2) \ldots \\
& \ldots\ldots + V_2^{(x+t-2)}\mathrm{f}(x+t-2,2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_{(m)}\,\mathrm{f}(0,m) + V'_m\ \mathrm{f}(1,m) + V''_m\ \mathrm{f}(2,m) \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots + V_m^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m) \\
& + V_{m+1}\mathrm{f}(0,m+1) + V'_{m+1}\mathrm{f}(1,m+1) + V''_{m+1}\mathrm{f}(2,m+1) \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots + V_{m+1}^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m+1) \\
& + V_{m+2}\mathrm{f}(0,m+1) + V'_{m+2}\mathrm{f}(1,m+2) + V''_{m+2}\mathrm{f}(2,m+2) \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots + V_{m+2}^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m+2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_{x+t}\mathrm{f}(0,x+t).
\end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer la fonction f, ce que nous effectuerons en faisant successivement

$$t = 0, \quad = 1, \quad = 2, \quad = 3, \ldots\ldots = m-1,$$

puis

$$x = 0, \quad = 1, \quad = 2, \quad = 3, \ldots\ldots = n-m-1,$$

indices qui répondent aux valeurs données de $y_{x,t}$; nous connaîtrons pour chacune de ces hypothèses les coefficiens V, V', etc., en examinant ce que devient alors le produit $\alpha^x\beta^t$. Lorsque $t=0$, ce produit se réduisant à α^x, il ne doit rester dans son développement que le seul terme $V^{(x)}\alpha^x$; l'on doit donc avoir $V^{(x)} = 1$, et tous les autres coefficiens deviennent nécessairement nuls dans cette hypothèse.

Quand $x=1$, il vient $V'_t\alpha\beta^t$, ce qui donne $V'_t = 1$, et les autres coefficiens nuls.

En général, lorsque $x = n-m-1$, on a

$$V_t^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^t, \qquad V_t^{(n-m-1)} = 1,$$

et tous les autres coefficiens nuls.

En établissant les mêmes hypothèses, et leurs conséquences, dans l'expression générale de $y_{x,t}$, on reconnaît que

$$y_{x,0}=\mathrm{f}(x,0),\qquad y_{x,1}=\mathrm{f}(x,1),\ldots y_{x,m-1}=\mathrm{f}(x,m-1),$$

quel que soit x, et ensuite que

$$y_{0,t}=\mathrm{f}(0,t),\qquad y_{1,t}=\mathrm{f}(1,t),\ldots y_{n-m-1,t}=\mathrm{f}(n-m-1,t);$$

quel que soit t.

On aura par ce moyen

$$\begin{aligned}
y_{x,t} = {} & V y_{0,0} + V' y_{1,0} + V'' y_{2,0} + V''' y_{3,0} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V^{(x+t)} y_{x+t,0} \\
& + V_1 y_{0,1} + V'_1 y_{1,1} + V''_1 y_{2,1} + V'''_1 y_{3,1} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_1^{(x+t-1)} y_{x+t-1,1} \\
& + V_2 y_{0,2} + V'_2 y_{1,2} + V''_2 y_{2,2} + V'''_2 y_{3,2} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_2^{(x+t-2)} y_{x+t-2,2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_m\, y_{0,m} + V'_m\, y_{1,m} + V''_m\, y_{2,m} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_m^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m} \\
& + V_{m+1} y_{0,m+1} + V'_{m+1} y_{1,m+1} + V''_{m+1} y_{2,m+1} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_{m+1}^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m+1} \\
& + V_{m+2} y_{0,m+2} + V'_{m+2} y_{1,m+2} + V''_{m+2} y_{2,m+2} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_{m+2}^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m+2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_{x+t} y_{0,x+t}.
\end{aligned}$$

1090. Le moyen que nous avons indiqué dans le n° 1088, pour obtenir l'expression de β^t, peut suffire pour chaque cas particulier; mais cependant il ne sera pas inutile d'en exposer un autre d'après lequel on puisse construire des formules générales; pour cela prenons

$$\beta^t = A + A_1\beta + A_2\beta^2 \ldots + A_{n-1}\beta^{n-1} \qquad (2),$$

A, A_1, ... A_{n-1}, désignant des polynomes en α, le premier du degré t, le second du degré $t-1$, et ainsi de suite, jusqu'à A_{n-1}, dans lequel α ne doit monter qu'au degré $t-n+1$. Représentons par β', β'', β''', etc.,

les diverses racines de l'équation (1); nous aurons les suivantes,

$$\beta' = A + A_1\beta' + A_2\beta'^2 + A_3\beta'^3 \ldots + A_{n-1}\beta'^{n-1},$$
$$\beta'' = A + A_1\beta'' + A_2\beta''^2 + A_3\beta''^3 \ldots + A_{n-1}\beta''^{n-1},$$
etc.,

dont le nombre sera suffisant pour déterminer les polynomes A, A_1, A_2, etc.: il ne restera plus qu'à mettre pour β', β'', etc., leurs expressions en α; mais l'équation (2) devant être identique, indépendamment d'aucune valeur particulière de α, il suffira d'y substituer pour β une expression en série ascendante suivant les puissances de α; et par conséquent on n'aura qu'à chercher par de pareilles séries les valeurs des racines β', β'', etc., pour les substituer dans les valeurs de A, A_1, A_2, etc., en observant de les pousser jusqu'à la puissance t de α dans le premier polynome A, à la puissance $t-1$ dans A_1, et ainsi de suite, jusqu'à A_{n-1}, où l'on pourra s'arrêter à la puissance $t-n+1$ de α.

Il n'est besoin de déterminer par cette méthode que le premier terme de chacun des polynomes A, A_1, A_2, etc., parce qu'on peut trouver la relation que les autres ont entr'eux, à l'aide de la différentiation relative à α, comme dans le n° 94. L'équation (2) donne successivement

$$t\,l\beta = l\{A + A_1\beta + A_2\beta^2 \ldots + A_{n-1}\beta^{n-1}\},$$
$$\frac{td\beta}{\beta} = \frac{dA + \beta dA_1 + \beta^2 dA_2 + \text{etc.} + (A_1 + 2A_2\beta + 3A_3\beta^2 + \text{etc.})d\beta}{A + A_1\beta + A_2\beta^2 + \text{etc.}};$$

on éliminera de cette dernière $d\beta$, à l'aide de la différentielle immédiate de l'équation (1); on fera disparaître les dénominateurs du résultat, que l'on ordonnera par rapport aux puissances de β et de α, puis on en chassera, au moyen de l'équation (1), les puissances de β, dont l'exposant est égal à n ou surpasse ce nombre; et égalant ensuite à zéro les coefficiens de chaque puissance de β, on aura $n-1$ équations différentielles du premier ordre, entre α et les polynomes A, A_1, A_2, etc. Ces polynomes étant mis sous la forme

$$A = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 \ldots\ldots + T^{(t)}\alpha^t,$$
$$A_1 = T_1 + T'_1\alpha + T''_1\alpha^2 \ldots\ldots + T_1^{(t-1)}\alpha^{t-1},$$
$$A_2 = T_2 + T'_2\alpha \ldots\ldots + T_2^{(t-2)}\alpha^{t-2},$$
etc.,

on en prendra les différentielles par rapport à α, pour les substituer dans les équations différentielles dont on vient de parler; et la comparaison

des termes affectés des mêmes puissances de α, fera connaître les relations qu'ont entr'eux les coefficiens T, T', T'',... T_1, T'_1, etc.

Il ne sera pas difficile de trouver, d'après ces indications, des méthodes applicables à la détermination des coefficiens V, V', V'',... V_1, V'_1, etc., du numéro précéd. Si l'on prend la différentielle du logarithme de chaque membre de l'équation $\alpha^x\beta^t = V +$ etc. de ce numéro, que l'on chasse $d\beta$ du résultat, au moyen de l'équation (1) différentiée, enfin, qu'on élimine le produit $\alpha^{n-m}\beta^m$ et ses puissances, on obtiendra une dernière équation, dont chaque terme, égalé séparément à zéro, fera connaître les relations des coefficiens V, V', V'',... V_1, V'_1, etc.

1091. Nous allons parcourir les diverses remarques que Lagrange a faites sur les méthodes précédentes, dont il a enrichi l'Analyse. Il est d'abord évident que l'on peut obtenir pour $y_{x,t}$, autant d'expressions différentes qu'il y a de termes, dans la dernière colonne de l'équation proposée aux différences, en éliminant successivement du développement de $\alpha^x\beta^t$, chacun des produits en α et β, qui affectent la dernière colonne de l'équation (1).

Lorsque cette équation peut se décomposer en facteurs rationnels, on les considère séparément, pour arriver à l'expression de $y_{x,t}$ qu'ils donnent chacun en particulier, expressions qui sont autant de valeurs particulières de $y_{x,t}$, et dont la somme fournit la valeur complète cherchée.

Pour éclaircir ce fait analytique, supposons que l'équation (1) soit le produit de deux facteurs rationnels, l'un du degré p, l'autre du degré q; nous allons montrer qu'en désignant par

$$\left.\begin{matrix} A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2 \ldots\ldots \\ + B'_1\beta + C'_1\alpha\beta \ldots\ldots \\ + C''_1\beta^2 \ldots\ldots \end{matrix}\right\} = 0, \qquad \left.\begin{matrix} A_2 + B_2\alpha + C_2\alpha^2 \ldots\ldots \\ + B'_2\beta + C'_2\alpha\beta \ldots\ldots \\ + C''_2\beta^2 \ldots\ldots \end{matrix}\right\} = 0,$$

ces facteurs, l'équation proposée aux différences sera satisfaite séparément par les deux équations

$$\left.\begin{matrix} A_1 y_{x,t} + B_1 y_{x+1,t} + C_1 y_{x+2,t} \ldots\ldots + K_1 y_{x+p,t} \\ + B'_1 y_{x,t+1} + C'_1 y_{x+1,t+1} \ldots\ldots + K'_1 y_{x+p-1,t+1} \\ + C''_1 y_{x,t+2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{matrix}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} A_2 y_{x,t} + B_2 y_{x+1,t} + C_2 y_{x+2,t} \ldots\ldots + G_2 y_{x+q,t} \\ + B'_2 y_{x,t+1} + C'_2 y_{x+1,t+1} \ldots\ldots + G'_2 y_{x+q-1,t+1} \\ + C''_2 y_{x,t+2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{matrix}\right\} = 0,$$

l'une de l'ordre p et l'autre de l'ordre q; et que par conséquent si l'on représente par $y'_{x,t}$ la valeur complète tirée de la première, et par $y''_{x,t}$

celle que donne la seconde, on aura $y_{x,t}=y'_{x,t}+y''_{x,t}$. Cette dernière expression sera complète, car elle renfermera $p+q$ fonctions arbitraires, savoir, p provenant de la valeur de $y'_{x,t}$, et q de la valeur de $y''_{x,t}$.

Cherchons d'abord quelle doit être l'équation de l'ordre p qui satisfait à l'équation proposée. En représentant la première par

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x,t} + \mathrm{b}y_{x+1,t} + \mathrm{c}y_{x+2,t}\ldots\ldots + \mathrm{k}y_{x+p,t} \\ + \mathrm{b}'y_{x,t+1} + \mathrm{c}'y_{x+1,t+1}\ldots\ldots + \mathrm{k}'y_{x+p-1,t+1} \\ + \mathrm{c}''y_{x,t+2}\ldots\ldots + \mathrm{k}''y_{x+p-2,t+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \mathrm{k}^{(p)}y_{x,t+p} \end{array}\right\} = 0,$$

et faisant successivement varier x et t, pour obtenir ses consécutives, nous en déduirons

$$1^{\circ}\ldots\ldots \left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x+1,t} + \mathrm{b}y_{x+2,t} + \mathrm{c}y_{x+3,t} + \text{etc.} \\ + \mathrm{b}'y_{x+1,t+1} + \mathrm{c}'y_{x+2,t+1} \\ + \mathrm{c}''y_{x+1,t+2} \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x,t+1} + \mathrm{b}y_{x+1,t+1} + \mathrm{c}y_{x+2,t+1} + \text{etc.} \\ + \mathrm{b}'y_{x,t+2} + \mathrm{c}'y_{x+1,t+2} \\ + \mathrm{c}''y_{x,t+3} \end{array}\right\} = 0;$$

$$2^{\circ}\ldots\ldots \left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x+2,t} + \mathrm{b}y_{x+3,t} + \text{etc.} \\ + \mathrm{b}'y_{x+2,t+1} \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x+1,t+1} + \mathrm{b}y_{x+2,t+1} + \text{etc.} \\ + \mathrm{b}'y_{x+1,t+2} \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{a}y_{x,t+2} + \mathrm{b}y_{x+1,t+2} + \text{etc.} \\ + \mathrm{b}'y_{x,t+3} \end{array}\right\} = 0;$$

etc.;

maintenant si nous multiplions respectivement chacune de ces équations par les coefficiens indéterminés P, Q, Q', R, R', R'', etc., que nous ajoutions les résultats, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}Py_{x,t} + (\mathrm{b}P+\mathrm{a}Q)y_{x+1,t} + (\mathrm{c}P+\mathrm{b}Q+\mathrm{a}R)y_{x+2,t} + \text{etc.} \\ + (\mathrm{b}'P+\mathrm{a}Q')y_{x,t+1} + (\mathrm{c}'P+\mathrm{b}'Q+\mathrm{b}Q'+\mathrm{a}R')y_{x+1,t+1} \\ + (\mathrm{c}''P+\mathrm{b}'Q'+\mathrm{a}R'')y_{x,t+2} \end{array}\right\} = 0;$$

comparant cette somme avec la proposée, nous trouverons

$$\begin{array}{llll} \mathrm{a}P=A, & \mathrm{b}P+\mathrm{a}Q=B, & \mathrm{c}P+\mathrm{b}Q+\mathrm{a}R=C, & \text{etc.}, \\ & \mathrm{b}'P+\mathrm{a}Q'=B', & \mathrm{c}'P+\mathrm{b}'Q+\mathrm{b}Q'+\mathrm{a}R'=C', & \\ & & \mathrm{c}''P+\mathrm{b}'Q'+\mathrm{a}R''=C'', & \end{array}$$

équations qui sont précisément celles que l'on obtiendrait en multipliant l'un par l'autre les facteurs

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 + \text{etc.} \\ \quad + b'\beta + c'\alpha\beta \\ \qquad + c''\beta^2 \end{array}\right\},$$
$$\left.\begin{array}{l} P + Q\alpha + R\alpha^2 + \text{etc.} \\ \quad + Q'\beta + R'\alpha\beta \\ \qquad + R''\beta^2 \end{array}\right\},$$

et en comparant le produit avec l'équation (1).

Il est facile de poursuivre le calcul que nous venons d'indiquer, de le débarrasser même de toute induction; enfin, de voir qu'on en peut faire un semblable sur les équations aux différences contenant deux variables, et aussi sur les équations différentielles. Il en résulte bien évidemment que l'équation aux différences, correspondante à chacun des facteurs de l'équation (1), satisfait à la proposée.

Lors donc qu'on aura décomposé l'équation (1) en deux facteurs, l'un du degré p, l'autre du degré q, et qu'on sera parvenu aux expressions complètes de $y'_{x,t}$ et de $y''_{x,t}$, on en déterminera les fonctions arbitraires en supposant données les valeurs

$$\begin{array}{llllll} y'_{x,0}, & y'_{x,1}, & \text{etc.}, & y'_{0,t}, & y'_{1,t}, & \text{etc.}, \\ y''_{x,0}, & y''_{x,1}, & \text{etc.}, & y''_{0,t}, & y''_{1,t}, & \text{etc.} \end{array}$$

Pour passer ensuite de ces valeurs à celles de

$$y_{x,0},\quad y_{x,1},\quad \text{etc.}, \ldots y_{0,t},\quad y_{1,t},\quad \text{etc.},$$

il ne s'agira plus que de combiner les équations aux différences en $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, avec l'équation $y_{x,t} = y'_{x,t} + y''_{x,t}$, afin d'en tirer, par l'élimination, les expressions des fonctions $y'_{x,t}$ et $y''_{x,t}$, au moyen de la fonction $y_{x,t}$ et de ses différences ou de ses valeurs consécutives.

1092. Si l'équation (1) se décomposait en facteurs qui fussent des puissances parfaites d'autres facteurs, l'expression de $y_{x,t}$, obtenue d'après les remarques précédentes, ne serait plus complète. Si l'on avait, par exemple, $\Pi^m = 0$, ce qui donnerait m facteurs égaux à $\Pi = 0$, on ne déduirait de chacun d'eux que la même équation aux différences, et par conséquent que la même intégrale; mais il faut observer que l'équation aux différences, correspondante à $\Pi^m = 0$, admet, outre la solution

$y_{x,t}=\alpha^x\beta^t$, les suivantes,

$$y_{x,t}=x\alpha^{x-1}\beta^t,\quad y_{x,t}=x(x-1)\alpha^{x-2}\beta^t,\quad \text{etc.},$$

ou celles-ci,

$$y_{x,t}=x\alpha^{x-1}\beta^t,\quad y_{x,t}=xt\alpha^{x-1}\beta^{t-1},\quad \text{etc.},$$

ou enfin celles-ci,

$$y_{x,t}=t\alpha^x\beta^{t-1},\quad y_{x,t}=t(t-1)\alpha^x\beta^{t-2},\quad \text{etc.},$$

qui se tirent de la première, en prenant, jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement, ses différentielles, soit par rapport à α, soit par rapport à β, et en faisant même succéder ces différentiations les unes aux autres dans tel ordre qu'on voudra. Ceci est fondé sur des raisonnemens analogues à ceux du n° 606, d'après lesquels on substitue, au lieu des valeurs de α ou de β, qui sont égales, d'autres valeurs très-peu différentes entr'elles.

Connaissant un nombre m de valeurs particulières de $y_{x,t}$, on en aura une plus générale en prenant la somme des produits de ces valeurs par des constantes arbitraires différentes, et il viendra

$$y_{x,t}=a\alpha^x\beta^t+a'x\alpha^{x-1}\beta^t+a''x(x-1)\alpha^{x-2}\beta^t+\text{etc.};$$

mais pour arriver à l'expression complète, il faudra substituer aux produits

$$a\alpha^x\beta^t,\quad a'\alpha^{x-1}\beta^t,\quad a''\alpha^{x-2}\beta^t,\quad \text{etc.},$$

des fonctions

$$y'_{x,t},\quad y''_{x-1,t},\quad y'''_{x-2,t},\quad \text{etc.};$$

on aura ainsi

$$y_{x,t}=y'_{x,t}+xy''_{x-1,t}+x(x-1)y'''_{x-2,t}+\text{etc.},$$

en observant que les fonctions $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, $y'''_{x,t}$, etc., doivent satisfaire à l'équation aux différences correspondante à $\Pi=0$. Les fonctions arbitraires qui entreront dans la composition de celles-ci seront les mêmes; mais en passant dans les valeurs de $y_{x,t}$, elles prendront chacune un indice particulier. Pour les déterminer, on se conduira comme dans le n° 1089; on les exprimera d'abord au moyen des premières valeurs

$$\begin{array}{llllll} y'_{x,0}, & y'_{x,1}, & \text{etc.}, & y'_{0,t}, & y'_{1,t}, & \text{etc.},\\ y''_{x,0}, & y''_{x,1}, & \text{etc.}, & y''_{0,t}, & y''_{1,t}, & \text{etc.},\\ \text{etc.}, \end{array}$$

et l'on introduira ensuite les valeurs

$$y_{x,0}, \quad y_{x,1}, \quad \text{etc.}, \quad y_{0,t}, \quad y_{1,t}, \quad \text{etc.},$$

en éliminant les premières, à l'aide de la relation qui existe entre les fonctions $y_{x,t}$, $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, etc., et des équations en $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, etc., déduites de $\Pi = 0$.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur cette matière, qui devient très-compliquée; ce que nous avons dit suffit pour mettre sur la voie les lecteurs intelligens qui auront présentes à l'esprit les diverses remarques semées dans cet ouvrage. Nous passerons aussi sous silence, par cette raison, la théorie des équations entre plusieurs fonctions, que l'on peut traiter à peu près comme les équations différentielles du n° 622, ou comme les équations aux différences du n° 1064.

1093. On parvient à des résultats analogues pour les équations aux différences, contenant quatre ou un plus grand nombre de variables, qui répondent aux séries récurrentes *triples*, *quadruples*, etc. Pour se former l'idée d'une série récurrente triple, par exemple, il suffit de concevoir une fonction qui varie de trois manières différentes, ou qui renferme trois variables indépendantes : une semblable série se disposerait naturellement dans les cases d'un parallélépipède, formerait alors une *table à triple entrée;* et si l'on en désignait le terme général par $y_{x,t,u}$, l'une des arêtes contiguës à un même angle du parallélépipède, serait la bande des x, l'autre celle des t, et la troisième celle des u.

Nous nous bornerons à traiter l'équation

$$\left.\begin{array}{l} Ay_{x,t,u} + By_{x+1,t,u} + Cy_{x+1,t+1,u} + Dy_{x+1,t+1,u+1} \\ \quad + B'y_{x,t+1,u} + C'y_{x+1,t,u+1} \\ \quad + B''y_{x,t,u+1} + C''y_{x,t+1,u+1} \end{array}\right\} = 0,$$

contenant une fonction dépendante de trois variables. En y faisant $y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, et divisant par $a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, après la substitution, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha\beta + D\alpha\beta\gamma \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\gamma \\ \quad + B''\gamma + C''\beta\gamma \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots (1),$$

d'où l'on tirera

$$\gamma = -\frac{A + B\alpha + B'\beta + C\alpha\beta}{B'' + C'\alpha + C''\beta + D\alpha\beta},$$

et l'on aura par conséquent dans l'expression

$$y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\left(-\frac{A+B\alpha+B'\beta+C\alpha\beta}{B''+C'\alpha+C''\beta+D\alpha\beta}\right),$$

pour la fonction cherchée, une valeur contenant trois arbitraires a, α et β; mais cette valeur n'est encore que particulière; et si l'on donne à celle de γ la forme

$$\gamma = -\frac{C+\frac{B'}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{A}{\alpha\beta}}{D+\frac{C''}{\alpha}+\frac{C'}{\beta}+\frac{B''}{\alpha\beta}},$$

en divisant par $\alpha\beta$ son numérateur ainsi que son dénominateur, et qu'ensuite on en développe la puissance u, en série ordonnée par rapport aux puissances des quantités $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\gamma^u = V &+ V'\frac{1}{\alpha} + V''\frac{1}{\alpha^2} + V'''\frac{1}{\alpha^3} + \text{etc.}\\ &+ V_1\frac{1}{\beta} + V'_1\frac{1}{\alpha\beta} + V''_1\frac{1}{\alpha^2\beta} + \text{etc.}\\ &+ V_2\frac{1}{\beta^2} + V'_2\frac{1}{\alpha\beta^2} + \text{etc.}\\ &+ V_3\frac{1}{\beta^3} + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Il n'entrera dans les coefficiens V, V', ... V_1, etc., que les constantes A, B, etc., et l'exposant variable u. Par la substitution de cette série, le produit $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ ne contiendra plus que des termes de la forme $V^{(r)}_{s}\frac{1}{\alpha^r\beta^s}$; et par un raisonnement semblable à celui du n° 1089, on se convaincra que ces termes peuvent être remplacés par d'autres de la forme..... $V^{(r)}_{s}\,\mathrm{f}(r,s)$, f désignant une fonction arbitraire, ce qui donnera

$$\begin{aligned}y_{x,t,u} = &V\,\mathrm{f}(x,t) + V'\,\mathrm{f}(x-1,t) + V''\,\mathrm{f}(x-2,t) + V'''\mathrm{f}(x-3,t) + \text{etc.}\\ &+ V_1\mathrm{f}(x,t-1) + V'_1\mathrm{f}(x-1,t-1) + V''_1\mathrm{f}(x-2,t-1) + \text{etc.}\\ &+ V_2\mathrm{f}(x,t-2) + V'_2\mathrm{f}(x-1,t-2) + \text{etc.}\\ &+ V_3\mathrm{f}(x,t-3) + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette expression peut se traduire en une autre qui ne dépende que

des valeurs de

$$\begin{array}{llll} y_{x,t,0}, & y_{x-1,t,0}, & y_{x-2,t,0}, & \text{etc.}, \\ y_{x,t-1,0}, & y_{x-1,t-1,0}, & y_{x-2,t-1,0}, & \text{etc.}, \\ \text{etc.}, & & & \end{array}$$

contenues dans une table à double entrée, qui résulte des seules variations de x et de t, et qui formerait une des faces de la table parallélépipède ou à triple entrée. En effet, lorsque $u=0$, on a $\gamma^{u}=1$, d'où on conclut $V=1$, et tous les autres coefficiens sont nuls; il vient donc $y_{x,t,0}=f(x,t)$; puis, suivant à cet égard la marche tracée dans les nos 1085, 86 et 87, on obtient

$$\begin{aligned} y_{x,t,u} = & V\, y_{x,t,0} + V'\, y_{x-1,t,0} + V''\, y_{x-2,t,0} + V'''y_{x-3,t,0} + \text{etc.} \\ & + V_1 y_{x,t-1,0} + V'_1 y_{x-1,t-1,0} + V''_1 y_{x-2,t-1,0} + \text{etc.} \\ & + V_2 y_{x,t-2,0} + V'_2 y_{x-1,t-2,0} + \text{etc.} \\ & + V_3 y_{x,t-3,0} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

résultat parfaitement analogue à celui du n° 1085, et ayant aussi l'inconvénient de s'étendre à l'infini, à moins que trois des quatre quantités B'', C', C'', D, ne s'évanouissent, ou que les valeurs de $y_{x,t,0}$, relatives aux indices négatifs, ne soient toutes nulles. On pare à cet inconvénient par le moyen d'une méthode absolument semblable à celle du n° 1088, et sur laquelle nous ne saurions nous arrêter.

1094. La méthode que nous venons d'exposer suppose que les coefficiens A, B, C, etc., de l'équation aux différences soient constans; M. Laplace, qui le premier s'est occupé de ce genre d'équations, a donné un procédé un peu moins simple, mais aussi à l'aide duquel on peut intégrer une classe assez étendue d'équations à coefficiens variables. Il a fait remarquer, en premier lieu, que l'équation

$$y_{x,t} = U_{x,t}\, y_{x-1,t-1} + U'_{x,t}\, y_{x-2,t-2} + U''_{x,t}\, y_{x-3,t-3} \ldots + V_{x,t},$$

dans laquelle les deux variables indépendantes décroissent de la même manière, peut se changer en une autre, où l'on n'a plus à considérer que la seule variable x. En effet, si l'on prend $t=x-K$, K étant une constante, et que l'on mette cette valeur dans les coefficiens $U_{x,t}$, $U'_{x,t}$, $U''_{x,t}$, etc. $V_{x,t}$, que l'on représentera ensuite par X_x, X'_x, X''_x, et W_x, et que l'on change $y_{x,t}$ en u_x, on aura

$$u_x = X_x u_{x-1} + X'_x u_{x-2} + X''_x u_{x-3} \ldots + W_x;$$

l'intégrale de cette nouvelle équation donnera l'expression de $y_{x,t}$, lorsqu'on y substituera $x-t$ au lieu de K; et il faudra regarder les arbitraires comme des fonctions de $x-t$.

1095. Lorsque les deux variables ne décroissent pas de la même manière, les fonctions arbitraires paraissent devoir être affectées du signe d'intégration Σ. Si l'on a, par exemple,

$$y_{x,t}=y_{x-1,t}+y_{x-1,t-1},$$

et que l'on fasse d'abord $y_{x,1}=\mathrm{f}(x)$, il en résulte $y_{x-1,1}=\mathrm{f}(x-1)$; prenant ensuite $t=2$, l'équation proposée devient

$$y_{x,2}=y_{x-1,2}+y_{x-1,1},$$

et donne $y_{x,2}-y_{x-1,2}=y_{x-1,1}$, d'où l'on conclut $\Delta_x y_{x-1,2}=f(x-1)$, par conséquent $\Delta_x y_{x,2}=\mathrm{f}(x)$ et $y_{x,2}=\Sigma\,\mathrm{f}(x)$: passant à $t=3$, on aura

$$y_{x,3}=y_{x-1,3}+y_{x-1,2}, \quad \text{ou} \quad y_{x,3}-y_{x-1,3}=\Sigma\,\mathrm{f}(x-1);$$

augmentant l'indice x de l'unité, il viendra

$$\Delta_x y_{x,3}=\Sigma\,\mathrm{f}(x) \quad \text{et} \quad y_{x,3}=\Sigma^2\mathrm{f}(x).$$

Si l'on continue ainsi, on obtiendra $y_{x,t}=\Sigma^t\mathrm{f}(x)$, formule peu commode, quoiqu'il soit possible d'exprimer le second membre par une suite de termes affectés d'un seul signe d'intégration (961).

1096. Considérons à présent l'équation

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & A_x y_{x-1,t} + A'_x y_{x-2,t} + A''_x y_{x-3,t} + \text{etc.} \\ & + B_x y_{x,t-1} + B'_x y_{x-1,t-1} + B''_x y_{x-2,t-1} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

qui n'est que du premier ordre par rapport à la variable t, et commençons par nous occuper du cas particulier

$$y_{x,t} = A_x y_{x-1,t} + B_x y_{x,t-1} + C_x.$$

Cette équation suppose que x et t surpassent l'unité. Si nous faisons successivement $x=2$, $x=3$, nous en tirerons

$$y_{2,t} = A_2 y_{1,t} + B_2 y_{2,t-1} + C_2 \ldots\ldots (a),$$
$$y_{3,t} = A_3 y_{2,t} + B_3 y_{3,t-1} + C_3 \ldots\ldots (b);$$

puis, en éliminant de ces dernières les termes $y_{2,t-1}$ et $y_{2,t}$, nous obtien-

drons une résultante dans laquelle l'indice relatif à x ne sera que 1 ou 3. Pour nous procurer un nombre suffisant d'équations, nous changerons t en $t-1$ dans (b), qui deviendra

$$y_{3,t-1} = A_3 y_{2,t-1} + B_3 y_{3,t-2} + C_3 \ldots\ldots (b');$$

chassons maintenant des trois équations (a), (b), (b'), les quantités $y_{2,t}$, $y_{2,t-1}$, comme des inconnues distinctes; pour cela, multiplions respectivement par α et β les équations (a) et (b'), que nous ajouterons avec (b), et nous aurons

$$\begin{aligned} y_{3,t} = (B_3-\beta) y_{3,t-1} + \beta B_3 y_{3,t-2} \qquad & + \alpha C_2 + C_3 + \beta C_3 \\ + (A_3-\alpha) y_{2,t} \quad + (\alpha B_2 + \beta A_3) y_{2,t-1} & + \alpha A_2\, y_{1,t}; \end{aligned}$$

égalant à zéro les coefficiens de $y_{2,t}$ et de $y_{2,t-1}$, nous obtiendrons

$$A_3 - \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = A_3, \quad \alpha B_2 + \beta A_3 = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = -B_2,$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{aligned} y_{3,t} - (B_2+B_3) y_{3,t-1} + B_2 B_3 y_{3,t-2} - A_3 C_2 - (1-B_2) C_3 \\ - A_2 A_3 y_{1,t} \end{aligned}\right\} = 0 \ldots . (3).$$

Si l'on désigne par $\varphi(t)$ la fonction $y_{1,t}$, évidemment arbitraire, cette équation pourra être traitée comme ne renfermant plus que la seule variable t, puisque les indices relatifs à x sont les mêmes dans tous les termes, ou que tous ces termes seraient placés sur une même ligne horizontale, dans la table à double entrée, qui représenterait la série proposée.

Prenant $x = 4$, l'équation proposée donne

$$y_{4,t} \;=\; A_4 y_{3,t} \;+ B_4 y_{4,t-1} + C_4 \ldots\ldots\ldots\ldots (c);$$

en diminuant l'indice t de 1 et 2 successivement, on aura

$$\begin{aligned} y_{4,t-1} &= A_4 y_{3,t-1} + B_4 y_{4,t-2} + C_4 \ldots\ldots\ldots\ldots (c'), \\ y_{4,t-2} &= A_4 y_{3,t-2} + B_4 y_{4,t-3} + C_4 \ldots\ldots\ldots\ldots (c''); \end{aligned}$$

les équations (c), (c'), (c''), combinées avec l'équation (3), fourniront le moyen d'éliminer $y_{3,t}$, $y_{3,t-1}$, $y_{3,t-2}$, et d'arriver à une équation qui ne contienne plus que $y_{4,t}$, $y_{4,t-1}$, $y_{4,t-2}$, $y_{4,t-3}$, et la fonction arbitraire $y_{1,t}$. Cette équation sera

$$\begin{aligned} y_{4,t} - (B_2+B_3+B_4) y_{4,t-1} + (B_2B_3 + B_2B_4 + B_3B_4) y_{4,t-2} - B_2B_3B_4 y_{4,t-3} \\ - A_4 D_3 - C_4(1 - B_2 - B_3 + B_2B_3) = 0 \ldots\ldots (4), \end{aligned}$$

en faisant, pour abréger,

$$A_3C_2 + (1 - B_2)C_3 + A_2A_3y_{1,1} = D_3.$$

Passons encore à $x = 5$; nous trouverons successivement

$$\begin{aligned}
y_{5,t} &= A_5y_{4,t} + B_5y_{5,t-1} + C_5 \ldots (d),\\
y_{5,t-1} &= A_5y_{4,t-1} + B_5y_{5,t-2} + C_5 \ldots (d'),\\
y_{5,t-2} &= A_5y_{4,t-2} + B_5y_{5,t-3} + C_5 \ldots (d''),\\
y_{5,t-3} &= A_5y_{4,t-3} + B_5y_{5,t-4} + C_5 \ldots (d'''),
\end{aligned}$$

équations qui serviront à éliminer $y_{4,t}$, $y_{4,t-1}$, $y_{4,t-2}$, $y_{4,t-3}$, de l'équation (4), et conduiront à

$$\left.\begin{aligned}
&y_{5,t} - (B_2 + B_3 + B_4 + B_5)y_{5,t-1}\\
&\quad + (B_2B_3 + B_2B_4 + B_2B_5 + B_3B_4 + B_3B_5 + B_4B_5)y_{5,t-2}\\
&\quad - (B_2B_3B_4 + B_2B_3B_5 + B_2B_4B_5 + B_3B_4B_5)y_{5,t-3}\\
&\quad + B_2B_3B_4B_5y_{5,t-4}\\
&\quad - A_5D_4 - C_5(1 - B_2 - B_3 - B_4 + B_2B_3 + B_2B_4 + B_3B_4 - B_2B_3B_4)
\end{aligned}\right\} = 0 \; (5),$$

en faisant

$$D_4 = A_4D_3 + C_4(1 - B_2 - B_3 + B_2B_3).$$

La composition de ces équations est facile à saisir; et si l'on représente le dernier résultat par

$$y_{x,t} - M_xy_{x,t-1} + N_xy_{x,t-2} - P_xy_{x,t-3} \ldots \pm T_xy_{x,t-x+1} - D_x = 0 \qquad (x),$$

les coefficiens M_x, N_x, $P_x \ldots\ldots D_x$, y seront formés d'après la loi déjà bien évidente de ceux que nous avons calculés précédemment. On peut aussi les déduire successivement les uns des autres, en éliminant

$$y_{x-1,t}, \quad y_{x-1,t-1}, \quad y_{x-1,t-2}, \quad y_{x-1,t-3}, \ldots \text{etc.},$$

entre l'équation

$$y_{x-1,t} - M_{x-1}y_{x-1,t-1} + N_{x-1}y_{x-1,t-2} - P_{x-1}y_{x-1,t-3} \ldots - D_{x-1} = 0 \, (x-1),$$

et les suivantes, dont le nombre doit être égal à $x - 1$,

$$\begin{aligned}
y_{x,t} &= A_xy_{x-1,t} + B_xy_{x,t-1} + C_x,\\
y_{x,t-1} &= A_xy_{x-1,t-1} + B_xy_{x,t-2} + C_x,\\
y_{x,t-2} &= A_xy_{x-1,t-2} + B_xy_{x,t-3} + C_x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et en comparant la résultante avec l'équation (x); car on trouvera

$$M_x = M_{x-1} + B_x,$$
$$N_x = N_{x-1} + B_x M_{x-1};$$
$$P_x = P_{x-1} + B_x N_{x-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_x = A_x D_{x-1} + C_x(1 - M_{x-1} + N_{x-1} - P_{x-1} + \text{etc.}),$$

équations qui ne sont que du premier ordre, et qui ne renferment que la seule variable x.

La valeur de $y_{x,t}$, tirée de l'équation (x), contiendra un nombre x de constantes arbitraires, qui seront surabondantes, puisque la proposée n'étant que du premier ordre, ne doit avoir dans son intégrale que la fonction arbitraire $f(t)$, introduite pour $y_{1,t}$; il faudra donc déterminer ces arbitraires par la substitution de l'expression de $y_{x,t}$, dans la proposée et par la comparaison des termes semblables en x.

1097. L'équation générale

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & A_x y_{x,t-1} + A'_x y_{x,t-2} + A''_x y_{x,t-3} + \text{etc.} \\ & + B_x y_{x-1,t} + B'_x y_{x-1,t-1} + B''_x y_{x-1,t-2} \ldots + N_x, \end{aligned}$$

donne d'abord

$$\begin{aligned} y_{2,t} &= A_2 y_{2,t-1} + A'_2 y_{2,t-2} + A''_2 y_{2,t-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + B_2 y_{1,t} + B'_2 y_{1,t-1} + B''_2 y_{1,t-2} \ldots\ldots + N_2 \ldots\ldots (2), \\ y_{3,t} &= A_3 y_{3,t-1} + A'_3 y_{3,t-2} + A''_3 y_{3,t-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + B_3 y_{2,t} + B'_3 y_{2,t-1} + B''_3 y_{2,t-2} \ldots\ldots + N_3 \ldots\ldots, \\ y_{3,t-1} &= A_3 y_{3,t-2} + A'_3 y_{3,t-3} + A''_3 y_{3,t-4} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + B_3 y_{2,t-1} + B'_3 y_{2,t-2} + B''_3 y_{2,t-3} \ldots\ldots + N_3 \ldots\ldots, \\ y_{3,t-2} &= A_3 y_{3,t-3} + A'_3 y_{3,t-4} + A''_3 y_{3,t-5} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + B_3 y_{2,t-2} + B'_3 y_{2,t-3} + B''_3 y_{2,t-4} \ldots\ldots + N_3 \ldots\ldots, \end{aligned}$$

etc.

Si l'on multiplie respectivement la troisième, la quatrième, etc., de ces équations, par A_2, A'_2, etc., et qu'on les retranche de la seconde, en écrivant le résultat ainsi,

$$\begin{aligned} & y_{3,t} - A_3 y_{3,t-1} - A'_3 y_{3,t-2} - A''_3 y_{3,t-3} \ldots\ldots \\ & \quad - A_2[y_{3,t-1} - A_3 y_{3,t-2} - A'_3 y_{3,t-3} \ldots\ldots] \\ & \quad\quad - A'_2[y_{3,t-2} - A_3 y_{3,t-3} \ldots\ldots] \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= B_3[y_{2,t} - A_2\, y_{2,t-1} - A'_2 y_{2,t-2} \ldots\ldots] \\ &+ \qquad\quad B'_3[y_{2,t-1} - A_2 y_{2,t-2} \ldots\ldots] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ N_3[1 - A_2 - A'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots], \end{aligned}$$

on reconnaitra sur-le-champ la possibilité d'éliminer les quantités

$$\begin{aligned} y_{2,t} - A_2 y_{2,t-1} - A'_2 y_{2,t-2} \ldots, \\ y_{2,t-1} - A_2 y_{2,t-2} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

au moyen de l'équation (2), qui les donnera successivement en $y_{1,t}$, $y_{1,t-1}$, $y_{1,t-2}$, etc., et de parvenir à un résultat de la forme

$$y_{3,t} - a_3 y_{3,t-1} - a'_3 y_{3,t-2} - a''_3 y_{3,t-3} \ldots = u_{3,t},$$

dans lequel on n'a plus à considérer que la seule variable t, et qui s'intègre par les méthodes des nos 1039, 1046.

La même marche conduira à des équations semblables par rapport à $y_{4,t}, y_{5,t}, \ldots y_{x,t}$. Les coefficiens a_x, a'_x, etc., seront aisés à former par induction; il n'en sera pas ainsi de la fonction $u_{x,t}$; mais on y parviendra en déduisant de l'équation

$$y_{x,t} = a_x y_{x,t-1} + a'_x y_{x,t-2} \ldots + u_{x,t} \ldots (x),$$

les suivantes,

$$\begin{aligned} &B_x y_{x-1,t} = B_x a_{x-1} y_{x-1,t-1} + B_x a'_{x-1} y_{x-1,t-2} \ldots + B_x u_{x-1,t}, \\ &B'_x y_{x-1,t-1} = B'_x a_{x-1} y_{x-1,t-2} + B'_x a'_{x-1} y_{x-1,t-3} \ldots + B'_x u_{x-1,t-1}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dont la somme, faite membre à membre, est

$$\begin{aligned} &B_x y_{x-1,t} + B'_x y_{x-1,t-1} + \text{etc.} \\ &= a_{x-1}[B_x y_{x-1,t-1} + B'_x y_{x-1,t-2} + \text{etc.}] \\ &+ a'_{x-1}[B_x y_{x-1,t-2} + \text{etc.}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on y substitue, pour les quantités

$$\begin{aligned} &B_x y_{x-1,t} + B'_x y_{x-1,t-1} + \text{etc.}, \\ &B_x y_{x-1,t-1} + B'_x y_{x-1,t-2} + \text{etc.}, \\ &B_x y_{x-1,t-2} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

leurs valeurs tirées de l'équation proposée, on la changera en

$$\begin{aligned} y_{x,t} &- A_x y_{x,t-1} - A'_x y_{x,t-2} \ldots - N_x \\ &= a_{x-1}[y_{x,t-1} - A_x y_{x,t-2} \ldots - N_x] \\ &+ a'_{x-1}[y_{x,t-2} - A_x y_{x,t-3} \ldots - N_x] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et en ordonnant les différens termes de cette dernière, par rapport aux valeurs successives de $y_{x,t}$, on aura

$$\begin{aligned} y_{x,t} = &(a_{x-1} + A_x) y_{x,t-1} \\ &+ (a'_{x-1} - a_{x-1} A_x + A'_x) y_{x,t-2} \\ &+ (a''_{x-1} - a'_{x-1} A_x - a_{x-1} A'_x + A''_x) y_{x,t-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.} \\ &+ (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.}) N_x; \end{aligned}$$

comparant avec l'équation (x), on en conclura

$$\begin{aligned} a_x &= a_{x-1} + A_x, \\ a'_x &= a'_{x-1} - a_{x-1} A_x + A'_x, \\ a''_x &= a''_{x-1} - a'_{x-1} A_x - a_{x-1} A'_x + A''_x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{x,t} &= B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.} \\ &\quad + (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - a''_{x-1} - \text{etc.}) N_x. \end{aligned}$$

Les coefficiens a_x, a'_x, a''_x, etc., ne dépendent que de la seule variable x : il n'en est pas de même de la fonction $u_{x,t}$; mais cependant l'équation qui la renferme se traite avec assez de facilité en observant que quand on prend pour $y_{1,t}$ une fonction arbitraire de t, on a aussi $u_{1,t} = f(t)$, d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} u_{2,t} &= (1 - a_1 - a'_1 - \text{etc.}) N_2 + B_2 \, f(t) + B'_2 \, f(t-1) + \text{etc.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{x,t} &= C_x + b_x \, f(t) + b'_x \, f(t-1) + \text{etc.}, \\ u_{x-1,t} &= C_{x-1} + b_{x-1} f(t) + b'_{x-1} f(t-1) + \text{etc.}, \\ u_{x-1,t-1} &= C_{x-1} + b_{x-1} f(t-1) + b'_{x-1} f(t-2) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

etc.

Lorsqu'on met les valeurs de $u_{x-1,t}$, $u_{x-1,t-1}$, etc., dans l'équation en $u_{x,t}$, obtenue précédemment, elle devient

$$\begin{aligned} u_{x,t} = &(1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.})N_x \\ &+ (B_x + B'_x + \text{etc.} \qquad)C_{x-1} \\ &+ B_x b_{x-1}\,\text{f}(t) + (B_x b'_{x-1} + B'_x b_{x-1})\text{f}(t-1) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

d'où, par la comparaison avec la valeur hypothétique de $u_{x,t}$, on tire

$$\begin{aligned} b_x &= B_x b_{x-1}, \\ b'_x &= B_x b'_{x-1} + B'_x b_{x-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_x &= (B_x + B'_x + \text{etc.})C_{x-1} + (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.})N_x. \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations, et l'addition des constantes, donneront les valeurs complètes de b_x, b'_x, etc., C_x. Les constantes se détermineront en observant que lorsque $x = 1$, on doit avoir $u_{x,t} = \text{f}(t)$, d'où il suit $C_1 = 0$, $b_1 = 1$, $b'_1 = 0$, $b''_1 = 0$, etc.

L'intégration de l'équation (x) introduira un nombre x de constantes arbitraires qui pourront être des fonctions de x; mais ces fonctions doivent, pour satisfaire à la proposée, cesser d'être arbitraires, puisque l'intégrale de cette dernière ne doit renfermer d'autre arbitraire que $\text{f}(t)$. On les déterminera par la substitution de l'expression générale de $y_{x,t}$ dans l'équation proposée.

1098. Pour appliquer cette méthode à un exemple particulier, occupons-nous de l'équation

$$y_{x,t} = 2y_{x,t-1} + 2y_{x-1,t-1},$$

qui, lorsqu'on y fait

$$y_{0,1} = 0, \quad y_{1,1} = 1, \quad y_{2,1} = 0, \quad y_{3,1} = 0, \quad \text{etc.},$$

fournit cette table à double entrée

	1	2	3	4	5.....x	
1	1	0	0	0	0	etc.
2	2	2	0	0	0	
3	4	8	4	0	0	
4	8	24	24	8	0	
5	16	64	96	64	16	
6	32	160	320	320	160	
7	64	384	960	1280	960	
.	....	....	....	....	....	
t						

Nous aurons, dans cet exemple,

$$A_x = 2, \quad A'_x = 0, \quad \text{etc.}, \quad B_x = 0, \quad B'_x = 2, \quad B''_x = 0, \quad \text{etc.};$$

les équations du numéro précédent nous donneront

$$\left.\begin{array}{l} a_x = a_{x-1} + 2, \\ a'_x = a'_{x-1} - 2a_{x-1}, \\ a''_x = a''_{x-1} - 2a'_{x-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{x,t} = 2u_{x-1,t}, \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \Delta a_x = +2, \\ \Delta a'_x = -2a_x, \\ \Delta a''_x = -2a'_x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

d'où nous conclurons

$$a_x = c + 2\Sigma 1 = c + 2x = c + 2[x]^{1},$$

et seulement $a_{x-1} = 2(x-1)$, en ne faisant commencer l'équation proposée que lorsque $x = 1$. Nous aurons ensuite

$$a'_x = c' - 4\Sigma[x]^{1} = c' - 4\frac{[x]^{2}}{2},$$

et il faudra encore supprimer la constante c', pour que $N_{x-1} = 0$, lorsqne $x = 1$; passant à

$$a''_x = c'' + 8\Sigma\frac{[x]^{2}}{2} = c'' + 8\frac{[x]^{3}}{2.3},$$

et supprimant c'', nous aurons cette suite de valeurs

$$a_x = 2\frac{[x]^{1}}{1}, \quad a'_x = -2^2\frac{[x]^{2}}{1.2}, \quad a''_x = 2^3\frac{[x]^{3}}{1.2.3}, \quad \text{etc.},$$

dont la loi est évidente. Il ne nous reste plus que l'équation....... $u_{x,t} = 2u_{x-1,t}$, dans laquelle on doit regarder t comme constant. Nous en tirerons $u_{x,t} = \gamma . 2^x$; et comme $u_{x,t}$ doit s'évanouir quand $x = 1$, il faut que $\gamma = 0$.

Ces divers résultats nous conduisent à l'équation

$$\left.\begin{array}{l} y_{x,t} - 2[0]^{-1}[x]^{1}y_{x,t-1} + 2^2[0]^{-2}[x]^{2}y_{x,t-2} - 2^3[0]^{-3}[x]^{3}y_{x,t-3} \\ \qquad + 2^4[0]^{-4}[x]^{4}y_{x,t-4} - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

à laquelle on satisfait en prenant $y_{x,t} = \lambda^t$, la fonction λ étant donnée

par l'équation

$$1 - \overset{-1}{[o]}\,\overset{1}{[x]}\,\frac{2}{\lambda} + \overset{-2}{[o]}\,\overset{2}{[x]}\,\frac{2^2}{\lambda^2} - \overset{-3}{[o]}\,\overset{3}{[x]}\,\frac{2^3}{\lambda^3} + \text{etc.} = 0\,;$$

qui, n'étant autre chose que $\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)^x = 0$, et ne donnant par conséquent pour λ que la seule valeur $\lambda = 2$, ne mène qu'à une expression particulière de $y_{x,t}$; c'est pourquoi nous ferons $y_{x,t} = \Pi_{x,t}2^t$. La substitution de cette valeur changera l'équation ci-dessus en

$$\left.\begin{array}{r} \Pi_{x,t} - \overset{-1}{[o]}\overset{1}{[x]}\Pi_{x,t-1} + \overset{-2}{[o]}\overset{2}{[x]}\Pi_{x,t-2} - \overset{-3}{[o]}\overset{3}{[x]}\Pi_{x,t-3} \\ + \overset{-4}{[o]}\overset{4}{[x]}\Pi_{x,t-4} - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

qui revient à $\Delta_t{}^x\Pi_{x,t} = 0$ (883); mais on satisfait à cette équation en prenant pour $\Pi_{x,t}$ une fonction qui, par rapport à t, soit rationnelle et entière et du degré $x-1$. On pourra donc donner à la fonction $\Pi_{x,t}$ la forme

$$\Pi_{x,t} = C_x\overset{-x+1}{[o]}\,\overset{x-1}{[t-1]} + C'_x\overset{-x+2}{[o]}\,\overset{x-2}{[t-1]} + C''_x\overset{-x+3}{[o]}\,\overset{x-3}{[t-1]} + \text{etc.} \quad (984);$$

substituant ensuite dans l'expression de $y_{x,t}$, puis cette dernière dans l'équation proposée, en observant que

$$\begin{array}{l} \overset{-x+1}{[o]}\,\overset{x-1}{[t-1]} = \overset{-x+1}{[o]}\,\overset{x-1}{[t-2]} + \overset{-x+2}{[o]}\,\overset{x-2}{[t-2]}, \\ \overset{-x+2}{[o]}\,\overset{x-2}{[t-1]} = \overset{-x+2}{[o]}\,\overset{x-2}{[t-2]} + \overset{-x+3}{[o]}\,\overset{x-3}{[t-2]}, \\ \text{etc.}; \end{array}$$

et faisant varier, par rapport à x, les arbitraires C_x, C'_x, etc., il viendra

$$\begin{array}{l} C_x\overset{-x+1}{[o]}\,\overset{x-1}{[t-2]} + (C_x + C'_x)\overset{-x+2}{[o]}\overset{x-2}{[t-2]} + (C'_x + C''_x)\overset{-x+3}{[o]}\overset{x-3}{[t-2]} + \text{etc.} \\ = C_x\overset{-x+1}{[o]}\,\overset{x-1}{[t-2]} + (C'_x + C_{x-1})\overset{-x+2}{[o]}\overset{x-2}{[t-2]} + (C''_x + C'_{x-1})\overset{-x+3}{[o]}\overset{x-3}{[t-2]} + \text{etc.} \end{array}$$

La comparaison des termes semblables donnera

$C_x = C_x$, $\quad C_x + C'_x = C'_x + C_{x-1}$, $\quad C'_x + C''_x = C''_x + C'_{x-1}$, etc.,
ce qui se réduit à $\quad C_x = C_{x-1}$, $\quad C'_x = C'_{x-1}$, etc.,
d'où l'on doit conclure $\quad C_x = c$, $\quad C'_x = c'$, etc.,

c et c' désignant ici des constantes; pour déterminer ces dernières, on

prendra dans la première ligne de la table de la page 295, les valeurs de $y_{1,1}$, $y_{2,1}$, etc.

Quand $x=1$, on a

$$\overset{-x+1}{[0]}\,\overset{x-1}{[t-1]}=1,\quad \overset{-x+2}{[0]}\,\overset{x-2}{[t-1]}=0,\quad \overset{-x+3}{[0]}\,\overset{x-3}{[t-1]}=0,\quad \text{etc.},$$

d'où il résulte $y_{1,1}=c.2^t$, $y_{1,1}=2c$, et par conséquent $c=\frac{1}{2}$; quand $x=2$, il vient $y_{2,1}=2^t(\frac{1}{2}\overset{-1}{[0]}\,\overset{1}{[t-1]}+c')$, expression d'où l'on tire $y_{2,1}=2c'$ et $c'=0$, puisque, dans la table, $y_{2,1}=0$. En poursuivant de cette manière, on trouvera successivement $c''=0$, $c'''=0$, et on obtiendra

$$y_{x,t}=2^{t-1}\overset{-x+1}{[0]}\,\overset{x-1}{[t-1]},$$

pour le terme général de la série comprise dans la table citée.

La complication de la méthode que nous venons d'exposer, ne paraît être due qu'à celle du sujet; cette méthode a d'ailleurs, sur celle du n° 1085, qui paraît beaucoup plus simple, l'avantage d'offrir un véritable procédé d'intégration, fondé sur la nature même des équations aux différences partielles, tandis que le succès de l'autre ne tient qu'à l'effet d'une substitution particulière aux équations du premier degré à coefficiens constans; je regrette, pour cette raison, de ne pouvoir m'étendre davantage sur les diverses applications que M. Laplace a faites de sa méthode, et d'être obligé de renvoyer à son Mémoire; mais pour terminer cette matière, je vais rapporter une méthode proposée par M. Paoli, dans laquelle se trouve comprise celle de Lagrange, et qui s'applique à un genre d'équations dont l'ordre est indéterminé.

1099. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & B_x y_{x,t-1} + C_x y_{x,t-2} \ldots + X_x y_{x,t-x} \\ & + A'_x y_{x-1,t} + B'_x y_{x-1,t-1} + C'_x y_{x-1,t-2} \ldots + X'_x y_{x-1,t-x} \end{aligned}$$

dont l'ordre, relativement à la variable t, change à chaque valeur de x. Supposons que l'intégrale cherchée ait la forme

$$y_{x,t}=ma^t\overset{x}{[\alpha_x]}+nb^t\overset{x}{[\beta_x]}+pc^t\overset{x}{[\gamma_x]}+\text{etc.},$$

dans laquelle $\overset{x}{[\alpha_x]}=\alpha_x\alpha_{x-1}\alpha_{x-2}\ldots\ldots\alpha_1$, et ainsi des autres, et les quantités a, b, c, ... m, n, p, ... désignent des constantes. Tirant de

cette expression les valeurs de $y_{x,t}$, $y_{x,t-1}$, etc., pour les substituer dans la proposée, nous aurons

$$ma^t[\overset{x}{\alpha_x}] + nb^t[\overset{x}{\beta_x}] + pc^t[\overset{x}{\gamma_x}] + \text{etc.}$$
$$= \quad mB_x a^{t-1}[\overset{x}{\alpha_x}]\ldots\ldots + mX_x a^{t-x}[\overset{x}{\alpha_x}]$$
$$+ mA'_x a^t[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}] + mB'_x a^{t-1}[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}]\ldots + mX'_x a^{t-x}[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}]$$
$$+ nB_x b^{t-1}[\overset{x}{\beta_x}]\ldots\ldots + nX_x b^{t-x}[\overset{x}{\beta_x}]$$
$$+ nA'_x b^t[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}] + nB'_x b^{t-1}[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}]\ldots + nX'_x b^{t-x}[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}]$$
$$+ pB_x c^{t-1}[\overset{x}{\gamma_x}]\ldots\ldots + pX_x c^{t-x}[\overset{x}{\gamma_x}]$$
$$+ pA'_x c^t[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}] + pB'_x c^{t-1}[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}]\ldots + pX'_x c^{t-x}[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}]$$
$$+ \text{etc.};$$

ayant introduit un nombre suffisant de fonctions indéterminées α_x, β_x, γ_x, etc., dans l'équation proposée, nous y pourrons satisfaire en posant

$$ma^t[\overset{x}{\alpha_x}] = \quad mB_x a^{t-1}[\overset{x}{\alpha_x}]\ldots\ldots + mX_x a^{t-x}[\overset{x}{\alpha_x}]$$
$$+ mA'_x a^t[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}] + mB'_x a^{t-1}[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}]\ldots + mX'_x a^{t-x}[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}],$$
$$nb^t[\overset{x}{\beta_x}] = \quad nB_x b^{t-1}[\overset{x}{\beta_x}]\ldots\ldots + nX_x b^{t-x}[\overset{x}{\beta_x}]$$
$$+ nA'_x b^t[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}] + nB'_x b^{t-1}[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}]\ldots + nX'_x b^{t-x}[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}],$$
$$pc^t[\overset{x}{\gamma_x}] = \quad pB_x c^{t-1}[\overset{x}{\gamma_x}]\ldots\ldots + pX_x c^{t-x}[\overset{x}{\gamma_x}]$$
$$+ pA'_x c^t[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}] + pB'_x c^{t-1}[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}]\ldots + pX'_x c^{t-x}[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}],$$

etc.

Les quantités m, n, p, etc., disparaissent de ces équations, par la seule division, et demeurent par conséquent arbitraires ; on peut aussi chasser les fonctions $[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}]$, $[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}]$, $[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}]$, etc., puisque

$$[\overset{x}{\alpha_x}] = \alpha_x[\overset{x-1}{\alpha_{x-1}}], \quad [\overset{x}{\beta_x}] = \beta_x[\overset{x-1}{\beta_{x-1}}], \quad [\overset{x}{\gamma_x}] = \gamma_x[\overset{x-1}{\gamma_{x-1}}]\ldots\ldots$$

Les équations simplifiées par ces réductions donneront respectivement

$$\alpha_x = \frac{A'_x + B'_x a^{-1}\ldots + X'_x a^{-x}}{1 - B_x a^{-1}\ldots - X_x a^{-x}},$$
$$\beta_x = \frac{A'_x + B'_x b^{-1}\ldots + X'_x b^{-x}}{1 - B_x b^{-1}\ldots - X_x b^{-x}},$$
$$\gamma_x = \frac{A'_x + B'_x c^{-1}\ldots + X'_x c^{-x}}{1 - B_x c^{-1}\ldots - X_x c^{-x}},$$

etc.,

d'où l'on déduira les valeurs de $[\overset{\bullet}{\alpha_x}]$, $[\overset{\bullet}{\beta_x}]$, $[\overset{\bullet}{\gamma_x}]$, etc.; mais pour faire usage de celles-ci, il faudra les réduire en séries descendantes, suivant les puissances de a, b, c, etc. Si l'on a

$$[\overset{\bullet}{\alpha_x}] = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{etc.},$$
$$[\overset{\bullet}{\beta_x}] = A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{etc.},$$
$$[\overset{\bullet}{\gamma_x}] = A + A'c^{-1} + A''c^{-2} + A'''c^{-3} + \text{etc.},$$
etc.,

on en conclura

$$\begin{aligned} y_{x,t} = & A(ma^t + nb^t + pc^t + \text{etc.}) \\ & + A'(ma^{t-1} + nb^{t-1} + pc^{t-1} + \text{etc.}) \\ & + A''(ma^{t-2} + nb^{t-2} + pc^{t-2} + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et en raisonnant ici comme dans le n° 1085, on transformera cette expression dans la suivante,

$$y_{x,t} = A\varphi(t) + A'\varphi(t-1) + A''\varphi(t-2) + \text{etc.},$$

qui sera l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences.

La méthode ci-dessus se réduit visiblement à faire $y_{x,t} = a^t[\overset{\bullet}{\alpha_x}]$; à tirer de la substitution, dans l'équation proposée, la valeur de α_x, et à convertir ensuite $[\overset{\bullet}{\alpha_x}]$ en une série de la forme

$$A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{etc.},$$

d'où l'on déduit sur-le-champ

$$y_{x,t} = A\varphi(t) + A'\varphi(t-1) + A''\varphi(t-2) + A'''\varphi(t-3) + \text{etc.}$$

1100. Prenons pour premier exemple l'équation

$$y_{x,t} = xy_{x,t-1} + y_{x-1,t-x+1},$$

qui engendre la série

	1	2	3	4	5	6.....x
1	1	0	0	0	0	0.....
2	1	1	0	0	0	0.....
3	1	3	0	0	0	0.....
4	1	7	1	0	0	0.....
5	1	15	6	0	0	0.....
6	1	31	25	0	0	0.....
7	1	63	90	1	0	0.....
8	1	127	301	10	0	0.....
.	....					
t						

lorsqu'on fait $y_{1,1}=1$, $y_{x,0}=0$, $y_{x,-1}=0$, etc. Chaque terme de cette série est égal à celui qui le précède dans la colonne où il est placé, multiplié par x et augmenté de celui qui, dans la colonne précédente, s'en trouve éloigné de $x-1$ rangs horizontaux : pour le troisième terme de la septième ligne, par exemple, on a $x=3$, $t=7$ et $t-x+1=5$, et par là on trouve

$$y_{3,7}=3\times 25+15=90.$$

Faisant, comme le prescrit la règle ci-dessus, $y_{x,t}=a^t[\alpha_x]^{x}$, l'équation proposée se change en $\alpha_x=xa^{-1}\alpha_x+a^{-x+1}$ et donne......... $\alpha_x=\frac{a^{-x+1}}{1-xa^{-1}}$, d'où l'on conclut

$$[\alpha_x]^{x}=\frac{a^{-x+1}a^{-x+2}a^{-x+3}\ldots\ldots a^{0}}{(1-xa^{-1})[1-(x-1)a^{-1}][1-(x-2)a^{-1}]\ldots\ldots(1-a^{-1})}$$
$$=\frac{a^{-\frac{1}{2}x(x-1)}}{(1-a^{-1})(1-2a^{-1})(1-3a^{-1})\ldots\ldots(1-xa^{-1})}.$$

Soit

$$\frac{1}{(1-a^{-1})(1-2a^{-1})(1-3a^{-1})\ldots\ldots(1-xa^{-1})}=A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{etc.};$$

on aura premièrement $A=1$; puis, pour développer le premier membre, on mettra le dénominateur sous la forme

$$1+Pa^{-1}+Qa^{-2}+Ra^{-3}+\text{etc.},$$

en posant

$$P=-1-2-3\ldots-x,$$
$$Q=1.2+1.3\ldots\ldots+2.3+\text{etc.},$$
$$R=-1.2.3-\text{etc.},$$
etc.

Ces quantités, qui sont les produits indiqués par la lettre A, dans les nos 985 et 1025, peuvent s'exprimer par la somme des puissances de la progression 1, 2, 3, 4, etc., au moyen des formules du no 96, qui donnent

$$P=-S_1,$$
$$Q=-\frac{S_2+PS_1}{2}=-\frac{S_2-S_1^2}{2},$$
$$R=-\frac{S_3+PS_2+QS_1}{3}=-\frac{S_3-S_1S_2-\frac{S_1S_2-S_1^3}{2}}{3}$$
etc. ;

et on aura ensuite, pour déterminer A, A', A'', A''', etc., les équations

$$A = 1,$$
$$PA + A' = 0,$$
$$QA + PA' + A'' = 0,$$
$$RA + QA' + PA'' + A''' = 0,$$
etc.

Au lieu de tirer immédiatement de ces dernières équations les valeurs des coefficiens A, A', A'', A''', etc., il sera plus commode de comparer chacune de ces équations à sa correspondante, dans la suite de celles du n° 96; on aura ainsi

$$P + S_1 = P + \frac{A'}{A},$$
$$Q + \tfrac{1}{2} PS_1 + \tfrac{1}{2} S_2 = Q + P\frac{A'}{A} + \frac{A''}{A},$$
$$R + \tfrac{1}{3} QS_1 + \tfrac{1}{3} PS_2 + \tfrac{1}{3} S_3 = R + Q\frac{A'}{A} + P\frac{A''}{A} + \frac{A'''}{A},$$
etc.,

d'où l'on conclura

$$\frac{A'}{A} = S_1,$$
$$\frac{A''}{A} = \frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2},$$
$$\frac{A'''}{A} = \frac{S_3}{3} + S_1\frac{S_2}{3} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3},$$
....
$$\frac{A^{(m+1)}}{A} = \frac{S_{m+1}}{m+1} + S_1\frac{S_m}{m+1} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_{m-1}}{m+1} + \text{etc. } (*),$$

(*) Ces formules ne sont qu'un cas particulier de celles que donne M. Paoli, pour réduire en série, par le moyen de sommes de puissances, une fraction rationnelle, formules trop élégantes pour ne pas trouver place ici.

Si l'on a la fraction

$$\frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)\ldots\ldots}{(1-a'z)(1-b'z)(1-c'z)\ldots\ldots} = A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.},$$

et qu'on prenne les logarithmes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} l(1-az)+l(1-bz)+l(1-cz)\ldots\ldots \\ -l(1-a'z)-l(1-b'z)-l(1-c'z)\ldots\ldots \end{array}\right\} = l(A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.});$$

et par conséquent

$$[a_x]^x = a^{-\frac{1}{2}x(x-1)} + S_1\, a^{-\frac{1}{2}x(x-1)-1} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)a^{-\frac{1}{2}x(x-1)-2} + \text{etc.};$$

---

puis, en différentiant, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{a}{1-az} - \dfrac{b}{1-bz} - \dfrac{c}{1-cz}\ldots\ldots \\ +\dfrac{a'}{1-a'z} + \dfrac{b'}{1-b'z} + \dfrac{c'}{1-c'z}\ldots\ldots \end{array}\right\} = \frac{A' + 2A''z + 3A'''z^2 + \text{etc.}}{A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.}};$$

les termes du premier membre étant développés en série, il en résulte

$$\left.\begin{array}{l} \quad a' + a'^2z + a'^3z^2 + \text{etc.} \\ +\, b' + b'^2z + b'^3z^2 + \text{etc.} \\ +\, c' + c'^2z + c'^3z^2 + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\, a - a^2z - a^3z^2 - \text{etc.} \\ -\, b - b^2z - b^3z^2 - \text{etc.} \\ -\, c - c^2z - c^3z^2 - \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \frac{A' + 2A''z + 3A'''z^2 + \text{etc.}}{A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.}};$$

et si l'on fait

$$S_1 = a' + b' + c'\ldots\ldots - a - b - c\ldots\ldots$$
$$S_2 = a'^2 + b'^2 + c'^2\ldots\ldots - a^2 - b^2 - c^2\ldots\ldots$$
$$S_3 = a'^3 + b'^3 + c'^3\ldots\ldots - a^3 - b^3 - c^3\ldots\ldots$$
etc.,

on aura

$$S_1 + S_2z + S_3z^2 + \text{etc.} = \frac{A' + 2A''z + 3A'''z^2 + \text{etc.}}{A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.}},$$

d'où l'on tirera

$$A' = AS_1,$$
$$2A'' = A'S_1 + AS_2,$$
$$3A''' = A''S_1 + A'S_2 + AS_3,$$
$$4A'''' = A'''S_1 + A''S_2 + A'S_3 + AS_4,$$
etc.,

$$\frac{A'}{A} = S_1,$$
$$\frac{A''}{A} = \frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2},$$
$$\frac{A'''}{A} = \frac{S_3}{5} + S_1\frac{S_2}{3} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3},$$
$$\frac{A''''}{A} = \frac{S_4}{4} + S_1\frac{S_3}{4} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_2}{4} + \left[\frac{S_3}{3} + S_1\frac{S_2}{3} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right]\frac{S_1}{4},$$

. . . .

$$\frac{A^{(m+1)}}{A} = \frac{S_{m+1}}{m+1} + S_1\frac{S_m}{m+1} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_{m-1}}{m+1}$$
$$+ \left[\frac{S_3}{3} + S_1\frac{S_2}{3} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right]\frac{S_{m-2}}{m+1} + \text{etc.}$$

par le moyen de cette dernière expression, on aura

$$y_{x,t}=\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}\right)+S_{,}\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}-1\right)$$
$$+\left(\frac{S_x}{2}+S_{,}\frac{S_{,}}{2}\right)\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}-2\right)+\text{ etc.}$$

Ces formules sont principalement applicables, lorsque les quantités

a, b, c.....a′, b′, c′.....

constituent des séries dont on peut obtenir facilement la somme, lorsque leurs différences premières, par exemple, sont constantes; dans ce cas, on peut aussi trouver immédiatement les coefficiens des puissances de z, dans le développement du produit

$$(1-az)(1-bz)(1-cz),\quad\text{etc.},$$

par un moyen que nous allons exposer, parce qu'il peut être utile dans plusieurs occasions, ainsi que l'a montré Lagrange.

Soit $a,\quad a+k,\quad a+2k,\quad a+3k,\quad a+(m-1)k,$

une suite de quantités croissant par une différence constante et égale à k; on fera

$$(x+a)(x+a+k)(x+a+2k)\ldots\ldots[x+a+(m-1)k]$$
$$=x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}+A'''x^{m-3}\ldots\ldots+A^{(m)}\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

si l'on substitue $x+k$ à x, dans les deux membres de cette équation, elle deviendra

$$(x+a+k)(x+a+2k)(x+a+3k)\ldots\ldots(x+a+mk)$$
$$=(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots.+A^{(m)};$$

en comparant son premier membre avec celui de la précédente, on voit sans peine que le second,

$$(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots\ldots+A^{(m)}$$
$$=(x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}\ldots\ldots+A^{(m)})\,\frac{x+a+mk}{x+a};$$

développant cette nouvelle équation, on obtiendra successivement

$$(x+a)\{(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots\ldots+A^{(m)}\}$$
$$=(x+a+mk)\{x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A^{(m)}\},$$

et

$$x^{m+1}+\frac{m}{1}kx^m+\frac{m(m-1)}{1.2}k^2x^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^3x^{m-2}+\text{ etc.}$$
$$+\;ax^m+\frac{m}{1}akx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}ak^2x^{m-2}+\text{ etc.}$$

Si l'on fait $x=0$, les sommes S_1, S_2, S_3, etc., s'évanouiront, et il ne restera que $y_{0,t}=\varphi(t)$, en sorte que la détermination de la fonc-

---

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & +\ A'x^m & +\ \frac{m-1}{1}A'kx^{m-1} & +\ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} & A'k^2x^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & + & A'ax^{m-1} & +\ \frac{m-1}{1} & A'akx^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & + & A''x^{m-1} & +\ \frac{m-2}{1} & A''kx^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & & & + & A''ax^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & & & + & A'''x^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & & & & & +\ \text{etc.} \\
= x^{m+1} & +\ A'x^m & +\ A''x^{m-1} & + & A'''x^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & +\ ax^m & +\ A'ax^{m-1} & + & A''ax^{m-2} & +\ \text{etc.} \\
 & +\ mkx^m & +\ A'mkx^{m-1} & + & A''mkx^{m-2} & +\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Cette dernière équation devant être identique, donne

$$1=1,$$

$$mk+a+A'=A'+a+mk,$$

$$\frac{m(m-1)}{1.2}k^2+\frac{m}{1}ak+\frac{m-1}{1}A'k+A'a+A''=A''+A'a+A'mk,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^3+\frac{m(m-1)}{1.2}ak^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'k^2$$
$$+\frac{m-1}{1}A'ak+\frac{m-2}{1}A''k+A''a+A'''=A'''+A''a+A''mk,$$

etc.,

d'où l'on déduit

$$A'=\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}k;$$

$$2A''=\frac{m-1}{1}A'a+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'k+\frac{m(m-1)}{1.2}ak+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^2,$$

$$3A'''=\frac{m-2}{1}A''a+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}A''k+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'ak$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A'k^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}ak^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}k^3,$$

etc.

La loi de ces expressions est déjà assez évidente pour nous dispenser d'aller plus loin. Nous observerons que, pour les ramener à celles de Lagrange, il faudrait faire $a=1$, $k=1$, et écrire $m-1$ au lieu de m (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1771, page 126). Les A désigneraient alors les produits indiqués dans les n°s 985 et 1025.

tion φ dépendra de la colonne qui précéderait la première de la table de la page 300, et qui n'est pas donnée.

Maintenant, voyons comment nous passerons de l'une à l'autre : faisons $x=1$; l'équation proposée nous donnera $y_{1,t}=y_{1,t-1}+y_{0,t}$, d'où $y_{0,t}=y_{1,t}-y_{1,t-1}$, ce qui nous montre que la valeur de $y_{0,t}$ doit toujours être nulle, tant que t est un nombre entier positif différent de l'unité, puisque la table citée donne, dans tous ces cas, $y_{1,t}=1$. Pour obtenir les valeurs de $y_{1,t}$, lorsque t est nul ou négatif, il faut continuer en arrière la série résultante de l'équation proposée, ce qui s'effectuera en formant, par le moyen de cette équation, le tableau suivant :

$y_{1,0}=y_{1,-1}+y_{0,0}$	$y_{1,1}=y_{1,0}+y_{0,1}$	$y_{1,2}=y_{1,1}+y_{0,2}$	etc.
$y_{2,0}=2y_{2,-1}+y_{1,-1}$	$y_{2,1}=2y_{2,0}+y_{1,0}$	$y_{2,2}=2y_{2,1}+y_{1,1}$	
$y_{3,0}=3y_{3,-1}+y_{2,-2}$	$y_{3,1}=3y_{3,0}+y_{2,-1}$	$y_{3,2}=3y_{3,1}+y_{2,0}$	
etc.	etc.	etc.	

A la troisième ligne de la troisième colonne, on trouve l'équation $y_{3,2}=3y_{3,1}+y_{2,0}$, qui, par le moyen des valeurs de $y_{3,2}$, $y_{3,1}$, tirées de la table, donne $y_{2,0}=0$; cette valeur, substituée dans la seconde ligne de la deuxième colonne, qui est $y_{2,1}=2y_{2,0}+y_{1,0}$, conduit à $y_{1,0}=0$. En prolongeant plus loin le tableau, on trouverait dans la quatrième colonne, à la quatrième ligne, $y_{4,3}=4y_{4,2}+y_{3,0}$, équation de laquelle il résulte $y_{3,0}=0$; cette valeur, mise dans la troisième ligne de la deuxième colonne, montre que $y_{2,-1}=0$; et par la seconde ligne de la première colonne, on a alors $y_{1,-1}=0$; puis par la première ligne de la même colonne, $y_{0,0}=0$. On s'assurera, par la même voie, que les valeurs de $y_{1,t}$ sont toutes nulles lorsque t est nul ou négatif; on conclura donc de là que $y_{0,1}=y_{1,1}-y_{1,0}=1$: c'est la seule valeur de $y_{0,t}$ qui ne soit pas nulle.

Cela posé, puisque $y_{0,t}=\varphi(t)$, on aura

$$\varphi(t-1)=y_{0,t-1},\qquad \varphi(t-2)=y_{0,t-2},\qquad \text{etc.},$$

et d'après ce qui précède, l'expression de $y_{x,t}$ rapportée sur la pag. 304, se réduit, pour chaque cas particulier de la question qui nous occupe, au seul terme dans lequel

$$t-\frac{x(x-1)}{2}-m-1=1;$$

il vient alors

$$m+1=t-\frac{x(x-1)}{2}-1;$$

mettant cette valeur dans l'expression générale du coefficient $A^{(m+1)}$, donnée plus haut, on obtiendra

$$y_{x,t} = \frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1} + S_1 \frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-2}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}$$
$$+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-3}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}$$
$$+\left[\frac{S_3}{3}+S_1\frac{S_2}{3}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right]\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-4}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1} + \text{etc.}$$

Soit, pour appliquer cette formule, $x=3$, $t=8$; les quatre termes écrits ci-dessus suffiront pour ce cas particulier, puisqu'on a $m+1=4$; et on trouvera

$$S_1=6, \quad S_2=14, \quad S_3=36, \quad S_4=98,$$

d'où l'on déduira

$$y_{3,8} = \frac{98}{4} + \frac{6.36}{4} + (7+18)\frac{14}{4}$$
$$+[12+2.14+(7+18)2]\frac{6}{4} = \frac{1204}{4} = 301.$$

1101. C'est par le moyen des équations aux différences, que M. Laplace s'est proposé d'éclaircir la difficulté qui s'est élevée sur la nature des fonctions arbitraires, qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, et dont nous avons parlé dans le n° 804.

Sur la nature des fonctions arbitraires des intégrales aux différentielles partielles.

La plus grande partie de cette discussion ayant roulé sur l'équation différentielle partielle des cordes vibrantes, qui est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

M. Laplace a formé, par analogie, l'équation aux différences

$$y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t} = y_{x,t+1} - 2y_{x,t} + y_{x,t-1},$$

qui n'est autre chose que

$$\Delta^2_x y_{x-1,t} = \Delta^2_t y_{x,t-1},$$

qui se réduit d'ailleurs à

$$y_{x+1,t} + y_{x-1,t} = y_{x,t+1} + y_{x,t-1} \qquad (1),$$

et à laquelle satisfait

$$y_{x,t} = \varphi(x+t) + \psi(x-t) \qquad (2),$$

qui est l'intégrale complète de l'équation différentielle partielle.

Cette intégrale, rapportée à l'équation aux différences, et assujétie aux conditions qui résultent des circonstances physiques du problème des cordes vibrantes, est d'abord réduite par M. Laplace, à la forme

$$y_{x,t}=\varphi(x+t)+\varphi(x-t) \qquad (2'),$$

afin de satisfaire à la condition $\frac{dy_{x,t}}{dt}=0$, quel que soit x, lorsque $t=0$; et il ne s'agit plus que de déterminer la fonction φ de manière que $y_{x,t}$ s'évanouisse, quel que soit t, lorsque $x=0$ ou $=n$.

Si l'on fait $t=0$, dans l'équation $(2')$, on en tire $\varphi(x)=\frac{1}{2}y_{x,0}$, d'où

$$\varphi(x+t)=\tfrac{1}{2}y_{x+t,0}, \quad \varphi(x-t)=\tfrac{1}{2}y_{x-t,0},$$

et

$$y_{x,t}=\tfrac{1}{2}y_{x+t,0}+\tfrac{1}{2}y_{x-t,0} \qquad (1').$$

Posant alors

$$x=0 \quad \text{et} \quad y_{0,t}=0, \quad \text{on a d'abord} \quad y_{-t,0}=-y_{t,0},$$

au moyen de quoi toutes les valeurs à indices négatifs se déduisent de celles qui ont des indices positifs. Faisant ensuite

$$x=n \quad \text{et} \quad y_{n,t}=0, \quad \text{il vient} \quad y_{n+t,0}=-y_{n-t,0};$$

puis changeant t en $n+t$ dans cette dernière, t en $n+t$ dans le résultat, et ainsi de suite, on formera les valeurs

$$y_{2n+t,0}=-y_{-t,0}=y_{t,0},$$
$$y_{3n+t,0}=y_{n+t,0}=-y_{n-t,0},$$
etc.,

desquelles on conclura aisément

$$y_{2rn+t,0}=y_{t,0},$$
$$y_{(2r+1)n+t,0}=-y_{n-t,0};$$

ainsi toutes les valeurs des quantités $y_{x,t}$ ne dépendront que de celles qui répondent aux indices compris entre 0 et n; et avec l'équation $(1')$ on en déduira les valeurs quelconques de $y_{x,t}$.

Voici maintenant la construction géométrique des relations précédentes.

FIG. 8. Ayant pris le polygone $ABCDE$, *fig.* 8, tel que la distance AE de ses extrémités soit égale à n, mais d'ailleurs entièrement arbitraire, et l'ayant posé sur la ligne AX, où se comptent les x, les ordonnées de ce polygone représenteront les valeurs de $y_{x,0}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$. On le placera ensuite au-dessous de la ligne des x, de manière

que le point E demeure à la même place, et que par conséquent les ordonnées se succèdent dans un ordre inverse, puis on le remettra dans sa première position. En continuant ainsi, tant dans le sens des x négatifs que des x positifs, on formera un polygone indéfini, dont les ordonnées satisferont aux conditions

$$y_{-1,0} = -y_{1,0}, \quad y_{2n+1,0} = y_{1,0}, \quad y_{(n+1)n+1,0} = -y_{n-1,0},$$

et on aura les grandeurs de

$$y_{x,t} = \tfrac{1}{2} y_{x+t,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-t,0},$$

en prenant la demi-somme des ordonnées correspondantes aux abscisses $x+t$ et $x-t$.

1102. Cette construction, dès qu'on n'y assujétit plus les variables x et t à changer, par des différences égales à l'unité, devient celle qu'Euler a donnée pour l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

L'accord des deux procédés paraît d'abord tout simple, puisque l'intégrale

$$y_{x,t} = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

satisfaisant à la fois à l'équation aux différences et à l'équation différentielle, il semble, en conséquence, que les fonctions peuvent être discontinues, aussi bien dans un cas que dans l'autre, c'est-à-dire qu'on peut prendre comme on veut la courbe ou le contour qui tient lieu du polygone $ABCDE$, lorsque les différences des variables deviennent infiniment petites.

Pour effectuer ce passage, on peut changer x en ax', t en at'; alors les différences des nouvelles variables x' et t' étant $\frac{1}{a}$, seront infiniment petites, si on suppose que a soit infini, ce qui revient à regarder les indices x et t comme infinis, ainsi que le fait M. Laplace; ou bien encore, il est facile de s'assurer que la correspondance des équations (1) et (2) subsisterait avec tout ce qui s'en suit, quand même on ferait varier x et t, par des différences quelconques h, ce qui changerait l'équation (1) en

$$y_{x+h,t} - 2y_{x,t} + y_{x-h,t} = y_{x,t+h} - 2y_{x,t} + y_{x,t-h},$$

dont la limite est bien évidemment

$$\frac{d^2y_{x,t}}{dx^2} = \frac{d^2y_{x,t}}{dt^2}.$$

Cela posé, M. Laplace met à la discontinuité des fonctions arbitraires une restriction fondée sur ce que l'équation

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0},$$

revenant à

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2}(y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}), \text{ ou à } \Delta_t y_{x,0} = \tfrac{1}{2} \Delta^2_x y_{x-1,0},$$

doit, dans le passage des différences aux différentielles, se changer en

$$\frac{dy_{x,0}}{dt} dt = \frac{1}{2} \frac{d^2 y_{x,0}}{dx^2} dx^2,$$

équation qui ne satisfait à la condition $\frac{dy_{x,t}}{dt} = 0$, quel que soit x, lorsque $t=0$, qu'autant que le second membre $\frac{d^2 y_{x,0}}{dx^2} dx^2$, demeure infiniment petit du second ordre, ce qui exige que la quantité $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$; dont il dérive puisse devenir infiniment petite de cet ordre, c'est-à-dire que deux élémens contigus du polygone primitif ne fassent point entr'eux d'angle fini, et qu'ainsi il ne soit formé, au plus, que de courbes qui se touchent.

1103. Ces conclusions, que M. Laplace a généralisées, n'ont point été admises par Euler, ni par Lagrange, ni par M. Monge. Arbogast, dans le Mémoire que j'ai cité au n° 804, y oppose d'abord l'identité d'intégrale pour l'équation aux différences, et l'équation différentielle, identité de laquelle on doit inférer « qu'il n'est pas nécessaire d'arrondir » les angles (du polygone primitif) pour passer d'une équation à l'autre » :

Ensuite, que si l'on développe, au moyen du théorème de Taylor, l'équation (1), en y remplaçant par h la différence 1, commune aux deux variables indépendantes x et t, on parvient à l'équation

$$\frac{d^2 y_{x,t}}{dx^2} + \frac{d^4 y_{x,t}}{dx^4} \frac{h^2}{3.4} + \text{etc.} = \frac{d^2 y_{x,t}}{dt^2} + \frac{d^4 y_{x,t}}{dt^4} \frac{h^2}{3.4} + \text{etc.},$$

qui se vérifie, quelle que soit h, à cause que l'équation différentielle particlle

$$\frac{d^2 y_{x,t}}{dx^2} = \frac{d^2 y_{x,t}}{dt^2} \quad \text{donne} \quad \frac{d^4 y_{x,t}}{dx^4} = \frac{d^4 y_{x,t}}{dt^4}, \quad \text{etc.} \quad (779);$$

ainsi l'équation aux différences et l'équation différentielle ayant lieu en même temps, doivent être satisfaites de la même manière :

Enfin, que la génération des coefficiens différentiels d'une fonction quelconque $f(x)$, par le développement de $f(x+h)$ (2 et 18), n'en-

traîne pas nécessairement l'existence de trois valeurs consécutives, pour la formation de $\frac{d^2y}{dx^2}$, et ainsi des autres.

A ces raisons, j'ajouterai que Lagrange, qui, après avoir embrassé l'opinion d'Euler sur la discontinuité des fonctions arbitraires, s'en était éloigné encore plus que M. Laplace, y est revenu tout-à-fait, dans la deuxième édition de sa *Mécanique analytique* (t. Ier, p. 418), et s'accorde sur ce sujet, entièrement avec M. Monge.

Pour compléter sur ce point l'histoire de la science, il ne sera peut-être pas inutile de dire que l'opinion à laquelle s'est fixé M. Laplace, a été proposée d'abord par Condorcet (voy. les *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris*, année 1771, p. 69). Il l'appuyait sur l'élimination des fonctions arbitraires, qui suppose que ces fonctions ont des valeurs communes dans le passage aux différentielles successives, d'où il concluait que leur forme ne doit pas changer brusquement d'un ordre à l'autre, c'est-à-dire d'un point au suivant; mais je renverrai au Mémoire d'Arbogast, pour l'examen de cette dernière condition; et j'annoncerai aussi qu'en reprenant un cas singulier du problème des cordes vibrantes, M. Poisson, dans un Mémoire qu'il vient de lire à l'Académie des Sciences, établit que ce cas ne peut être résolu exactement, à moins qu'on ne limite la discontinuité des fonctions, comme le fait M. Laplace.

Des équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions aux différences.

1104. Condorcet, à qui l'on doit la théorie générale des équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions différentielles, a donné les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences soit intégrable; nous avons remis jusqu'à présent à traiter cet objet, parce qu'il est plus curieux qu'utile.

Soit V une fonction quelconque des variables x, y, z, et de leurs différences jusqu'à l'ordre n inclusivement; si on la regarde comme la différence complète d'une fonction $V_{,}$, Δx étant indéterminé, aussi bien que les différences des autres variables, on aura

$$V = \Delta V_{,}, \qquad dV = d\Delta V_{,} = \Delta dV_{,},$$

d'où l'on déduira successivement

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d\Delta V_{,}}{dx}, \quad \frac{dV}{d\Delta x} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta x}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 x} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 x}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 x} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 x}, \quad \text{etc.},$$
$$\frac{dV}{dy} = \frac{d\Delta V_{,}}{dy}, \quad \frac{dV}{d\Delta y} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta y}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 y} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 y}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 y} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 y}, \quad \text{etc.},$$
$$\frac{dV}{dz} = \frac{d\Delta V_{,}}{dz}, \quad \frac{dV}{d\Delta z} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta z}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 z} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 z}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 z} = \frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 z}, \quad \text{etc.};$$

mais en transposant la caractéristique Δ, dans $\frac{d\Delta V_{,}}{dx}$ (page 97, note), on obtient $\Delta\frac{dV_{,}}{dx}$; puis en observant que

$$\begin{aligned}
dV = {} & \frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{d\Delta x}\,d\Delta x + \frac{dV}{d\Delta^2 x}\,d\Delta^2 x + \frac{dV}{d\Delta^3 x}\,d\Delta^3 x + \text{etc.} \\
& + \frac{dV}{dy}\,dy + \text{etc.} \\
& + \frac{dV}{dz}\,dz + \text{etc.}, \\
dV_{,} = {} & \frac{dV_{,}}{dx}\,dx + \frac{dV_{,}}{d\Delta x}\,d\Delta x + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}\,d\Delta^2 x + \frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x}\,d\Delta^3 x + \text{etc.} \\
& + \frac{dV_{,}}{dy}\,dy + \text{etc.} \\
& + \frac{dV_{,}}{dz}\,dz + \text{etc.},
\end{aligned}$$

prenant ensuite les différences de chaque terme de cette dernière expression, qui donnent

$$\begin{aligned}
&\Delta\frac{dV_{,}}{dx}\,dx = \Delta\frac{dV_{,}}{dx}.\,dx + \frac{dV_{,}}{dx}\,d\Delta x + \Delta\frac{dV_{,}}{dx}.d\Delta x, \\
&\Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}\,d\Delta x = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}.d\Delta x + \frac{dV_{,}}{d\Delta x}\,d\Delta^2 x + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}.d\Delta^2 x, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

pour former le développement de $\Delta dV_{,}$, et comparant enfin ce développement terme à terme, avec celui de dV, on aura les équations suivantes,

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx} &= \Delta\frac{dV_{,}}{dx}, \\
\frac{dV}{d\Delta x} &= \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \frac{dV_{,}}{dx} + \Delta\frac{dV_{,}}{dx}, \\
\frac{dV}{d\Delta^2 x} &= \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} + \frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}, \\
\frac{dV}{d\Delta^3 x} &= \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

pareillement, par rapport aux variables y et z,

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dy} &= \Delta\frac{dV_{,}}{dy}, \\
\frac{dV}{d\Delta y} &= \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta y} + \frac{dV_{,}}{dy} + \Delta\frac{dV_{,}}{dy},
\end{aligned}$$

$$\frac{dV}{d\Delta^2 y} = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y} + \frac{dV_{,}}{d\Delta y} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta y},$$
$$\frac{dV}{d\Delta^3 y} = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^3 y} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dV}{dz} = \Delta\frac{dV_{,}}{dz};$$
$$\frac{dV}{d\Delta z} = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta z} + \frac{dV_{,}}{dz} + \Delta\frac{dV_{,}}{dz},$$
$$\frac{dV}{d\Delta^2 z} = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z} + \frac{dV_{,}}{d\Delta z} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta z},$$
$$\frac{dV}{d\Delta^3 z} = \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^3 z} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z} + \Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il reste maintenant à éliminer les coefficiens différentiels de $V_{,}$; on y parvient, de proche en proche, par un procédé semblable à celui qu'on a mis en usage dans le n° 552. En prenant d'abord la différence de la seconde des équations relatives à la variable x, on a le résultat

$$\Delta\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \Delta\frac{dV_{,}}{dx} + \Delta^2\frac{dV_{,}}{dx},$$

qui devient

$$\Delta\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \frac{dV}{dx} + \Delta\frac{dV}{dx},$$

en vertu de la première équation $\frac{dV}{dx} = \Delta\frac{dV_{,}}{dx}$.

Prenant ensuite la différence seconde de la troisième équation, on aura

$$\Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x} = \Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} + \Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta x};$$

équation de laquelle on éliminera les termes $\Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x}$, $\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta x}$, par le moyen de celle que nous venons d'obtenir et de sa différence, ce qui donnera

$$\Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x} = \Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} - \frac{dV}{dx} - 2\Delta\frac{dV}{dx} - \Delta^2\frac{dV}{dx} + \Delta\frac{dV}{d\Delta x} + \Delta^2\frac{dV}{d\Delta x}.$$

Si l'on prend encore la différence troisième de la quatrième équation, qu'on en chasse les termes $\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}$, $\Delta^4\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}$, à l'aide de la précédente

et de sa différence, on obtiendra

$$\Delta^3 \frac{dV}{d\Delta^3 x} = \Delta^4 \frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x} + \frac{dV}{dx} + 3\Delta \frac{dV}{dx} + 3\Delta^2 \frac{dV}{dx} + \Delta^3 \frac{dV}{dx}$$
$$\ldots\ldots - \Delta \frac{dV}{d\Delta x} - 2\Delta^2 \frac{dV}{d\Delta x} - \Delta^3 \frac{dV}{d\Delta x}$$
$$+ \Delta^2 \frac{dV}{d\Delta^2 x} + \Delta^3 \frac{dV}{d\Delta^2 x}.$$

En suivant la marche que nous venons de tracer, et en observant que puisque V est de l'ordre n, $V_{,}$ doit être de l'ordre $n-1$, d'où il suit que $\frac{dV_{,}}{d\Delta^n x} = 0$, on arrivera enfin à

$$\Delta^n \frac{dV}{d\Delta^n x} = \pm \left\{ \frac{dV}{dx} + \frac{n}{1}\Delta \frac{dV}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 \frac{dV}{dx} \ldots\ldots + \Delta^n \frac{dV}{dx} \right\}$$
$$\mp \left\{ \Delta \frac{dV}{d\Delta x} + \frac{(n-1)}{1}\Delta^2 \frac{dV}{d\Delta x} \ldots\ldots + \Delta^n \frac{dV}{d\Delta x} \right\}$$
$$\pm \left\{ \Delta^2 \frac{dV}{d\Delta^2 x} \ldots\ldots + \Delta^n \frac{dV}{d\Delta^2 x} \right\}$$
$$\mp \text{ etc.}$$

Il est visible que les équations relatives aux autres variables y, z, doivent être absolument de la même forme; mais que s'il y avait une variable dont la différence première fût constante, elle ne fournirait point d'équation de condition.

On déduirait aisément de ce qui précède les équations qui doivent avoir lieu pour que la fonction V soit la différence seconde d'une fonction $V_{,,}$, en formant d'abord celles qui doivent avoir lieu pour que $V_{,}$ soit la différence première de $V_{,,}$, et qui sont semblables aux précédentes, mais seulement de l'ordre $n-1$; puis chassant ensuite les coefficiens différentiels de $V_{,}$, par le moyen des expressions de leurs différences, que l'on obtiendrait à peu près comme ci-dessus. Nous laissons au lecteur, que cette matière pourrait intéresser, le soin de développer ces calculs, qui n'exigent que de la patience et de l'attention; nous ne nous arrêterons pas non plus à montrer comment on peut trouver les équations de condition relatives à l'intégrabilité des équations aux différences; car il est évident que si $V=0$ désigne l'équation proposée, il faut chercher les équations de condition relatives à la fonction MV, qui doivent être employées à la détermination du facteur M, après avoir été réduites, autant qu'il est possible, par la suppression des termes dont l'équation $V=0$ et ses différences, indiquent la nullité.

1105. Nous avons déjà fait remarquer, dans le dernier chapitre du second volume de cet Ouvrage (851), l'analogie que les équations de condition relatives aux différentielles, ont avec les équations qui donnent les maximums et les minimums des formules intégrales indéterminées; il existe une semblable liaison entre les équations de condition relatives aux différences et celles qui donnent les maximums et les minimums des fonctions indéterminées, exprimées par des intégrales aux différences.

En prenant la variation de ces fonctions, on a $\delta\Sigma V = \Sigma\delta V$; et lorsqu'on cherche leurs maximums ou leurs minimums, il faut que $\Sigma\delta V = 0$; mais il convient de séparer l'expression de $\Sigma\delta V$ en deux parties, en intégrant autant qu'il est possible les divers termes de δV, ce qui fournit deux espèces de résultats, les uns dégagés du signe Σ, et les autres qui ne peuvent admettre d'intégration tant qu'on n'assigne aucune relation particulière entre les variables qui entrent dans la fonction V. On doit égaler séparément à zéro chacune de ces parties, pour obtenir les équations qui déterminent la forme de la fonction cherchée et celles qui sont relatives aux limites de l'intégrale.

S'il s'agissait de chercher les conditions d'après lesquelles la fonction V doit être une différence exacte, on verrait facilement que dans cette hypothèse δV doit être pareillement une différence exacte, sans qu'il soit besoin, pour la rendre intégrable, de supposer aucune relation entre les variables de la fonction V. Il suit de là qu'après avoir intégré autant qu'il est possible chaque terme de δV, la partie qui reste sous le signe Σ doit s'évanouir d'elle-même, ce qui fournit évidemment des équations de condition absolument semblables à celles qui résultent de la même partie de la même formule, pour les maximums et les minimums. Quant à la partie dégagée du signe Σ, ce n'est autre chose que la fonction primitive de $\Sigma\delta V$; et si on l'intègre par rapport à la caractéristique δ, le résultat sera l'expression de ΣV.

En prenant, comme ci-dessus,

$$dV = \frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{d\Delta x}\,d\Delta x + \frac{dV}{d\Delta^2 x}\,d\Delta^2 x + \text{etc.} + \frac{dV}{dy}\,dy + \text{etc.},$$

on en conclura

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta V}{\delta\Delta x}\,\Delta\delta x + \frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\Delta^2\delta x + \text{etc.} + \frac{\delta V}{\delta y}\,\delta y + \text{etc.}$$

Si l'on intègre, par rapport au signe Σ, d'après les formules du n° 959,

chaque terme de cette dernière expression, on aura successivement

$$\Sigma \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \Delta \delta x = \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \delta x - \Sigma \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \delta x_1,$$

$$\Sigma \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \Delta^2 \delta x = \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \Delta \delta x - \Sigma \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \Delta \delta x_1$$

$$= \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \Delta \delta x - \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \delta x_1 + \Sigma \Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \delta x_2,$$

etc.

Il en serait de même à l'égard des autres variables y, z, etc.; et en ne considérant que les termes qui demeurent soumis au signe Σ, on formera l'équation

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta V}{\delta x} \delta x - \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \delta x_1 + \Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \delta x_2 \ldots \mp \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta^n x} \delta x_n \\ + \frac{\delta V}{\delta y} \delta y - \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta y} \delta y_1 + \Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 y} \delta y_2 \ldots \mp \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta^n y} \delta y_n \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} = 0;$$

dans laquelle il faudra réduire les variations δx, $\delta x_1, \ldots \delta x_n$, δy, δy_1, etc., au plus petit nombre possible. Cette réduction s'opère sur-le-champ, en substituant aux quantités

$$\frac{\delta V}{\delta x}, \quad \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta x}, \quad \Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x}, \quad \text{etc.},$$

les suivantes

$$\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)}, \quad \Delta \frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta \Delta x(n-1)}, \quad \Delta^2 \frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta \Delta^2 x(n-2)}, \quad \text{etc.},$$

qui en désignent les valeurs ultérieures, lorsque x se change en x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, etc., parce qu'il est évident que $\Sigma \frac{\delta V}{\delta x} \delta x$ ne diffère de $\Sigma \frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)} \delta x_n$ que d'une constante, que $\Sigma \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \delta x_1$ ne diffère de..... $\Sigma \frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta \Delta x(n-1)} \delta x_n$ que d'une constante, et ainsi des autres termes relatifs à x, et de ceux que donnent les autres variables. D'après ces considérations, il ne restera que les seules variations indépendantes δx_n, δy_n, etc., dont il faudra par conséquent égaler séparément à zéro les coefficiens; on aura donc, par rapport à la variable x, l'équation

$$\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)} - \Delta \frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta \Delta x(n-1)} + \Delta^2 \frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta \Delta^2 x(n-2)} \ldots \mp \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta^n x} = 0;$$

Maintenant on sait que

$$\frac{\delta V'_{x(n)}}{\delta x(n)} = \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{n}{1}\Delta\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\frac{\delta V}{\delta x} \ldots + \Delta^n\frac{\delta V}{\delta x},$$

$$\Delta\frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta\Delta x(n-1)} = \Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta x} + \frac{n-1}{1}\Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta x} \ldots + \Delta^n\frac{\delta V}{\delta\Delta x},$$

$$\Delta^2\frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta\Delta^2 x(n-2)} = \Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x} \ldots + \Delta^n\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}$$

etc.,

et la substitution de ces valeurs, dans l'équation précédente, fait précisément retomber sur l'équation de condition relative à x, obtenue dans le numéro précédent.

1106. La question la plus générale qu'on puisse se proposer sur les variations, par rapport aux différences, consiste à trouver la variation d'une fonction qui n'est donnée que par une équation aux différences. Pour la résoudre, on multiplie la variation de l'équation proposée par un facteur; on intègre ensuite le résultat par parties, comme ci-dessus; et en égalant séparément à zéro les termes qui contiennent encore, sous le signe Σ, la variation de la fonction cherchée, on se procure une équation aux différences et du premier degré, qui sert à déterminer le facteur. Ce calcul est trop facile à effectuer, d'après celui du n° 857, pour qu'il soit besoin de nous y arrêter.

1107. Pour donner un exemple de l'application du Calcul des différences à la recherche des maximums et des minimums, nous résoudrons, d'après Lagrange, cette question : *Trouver, entre tous les polygones qui ont un même nombre de côtés donnés, celui dont l'aire est la plus grande.* Soit $AMM'M''$, etc., *fig.* 9, ce polygone, rapporté à une ligne AB, menée par l'un de ses angles; la différence de son aire est le trapèze $PMM'P'$, dont l'aire, mesurée par $\left(\frac{PM+P'M'}{2}\right)PP'$, aura pour expression $(y+\frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$; celle de l'aire du polygone entier sera en conséquence l'intégrale $\Sigma(y+\frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$, prise entre les limites marquées par les points extrêmes du polygone : on aura, de plus FIG. 9.

$$MM' = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{M'R}^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Maintenant, les conditions de la question proposée donneront les équations

$$\delta\Sigma(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta x = 0, \quad \delta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 0,$$

dont la première exprime que l'aire du polygone cherché doit être un maximum ou un minimum, et la seconde, que ses côtés sont invariables. En développant ces équations, on obtient

$$\Sigma\{\Delta x(\delta y + \tfrac{1}{2}\Delta\delta y) + (y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta\delta x)\} = 0,$$

$$\frac{\Delta x\Delta\delta x + \Delta y\Delta\delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0;$$

on conclut de la seconde de celles-ci, $\Delta\delta x = -\frac{\Delta y\Delta\delta y}{x}$; substituant dans la première, on la change en

$$\Sigma\left\{\Delta x\delta y + \left(\tfrac{1}{2}\Delta x - y\tfrac{\Delta y}{\Delta x} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\} = 0;$$

et faisant, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}\Delta x - y\,\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = z,$$

il restera à intégrer par parties la fonction $z\Delta\delta y$. On en déduira

$$\Sigma z\Delta\delta y = z\delta y - \Sigma\Delta z.\delta y_1,$$

résultat qu'on transformera en $z\delta y - \Sigma\Delta z_{,}.\delta y$, si l'on désigne par $z_{,}$ la valeur que prend z lorsqu'on y met $x - \Delta x$, au lieu de x; et la première équation du problème deviendra

$$z\delta y + \Sigma(\Delta x - \Delta z_{,})\delta y = 0.$$

Dans le cas où le polygone coupe l'axe en deux points, c'est-à-dire où la ligne AB passe par deux angles opposés, la première et la dernière ordonnées sont nulles, ainsi que leurs différences, et l'on a $\delta y = 0$; il ne reste que l'équation

$$\Sigma(\Delta x - \Delta z_{,})\delta y = 0,$$

qui donne $\Delta x - \Delta z_{,} = 0$, ou $x - z_{,} = C$, ce qui revient à ..., $x + \Delta x - z = C$, et fournit par conséquent l'équation

$$x + \Delta x - \tfrac{1}{2}\Delta x + \frac{y\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = C.$$

En la multipliant par $2\Delta x$, il viendra

$$(2x + \Delta x)\Delta x + (2y + \Delta y)\Delta y = 2C\Delta x,$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + y^2 = 2Cx + C',$$

équation appartenant à un cercle dont le centre est placé sur l'axe des x, et qui se réduit à $x^2+y^2=2Cx$, lorsqu'on veut que x et y soient nuls en même temps. Il résulte de là que le polygone demandé doit être inscrit dans une demi-circonférence de cercle.

Si la partie de l'axe des abscisses, comprise entre les deux points extrêmes du polygone, c'est-à-dire si la base de ce polygone était donnée, le dernier δx, serait nécessairement nul; et comme l'équation.... $\Delta\delta x=-\frac{\Delta y\Delta\delta y}{\Delta x}$, donne $\delta x=-\Sigma\frac{\Delta y\Delta\delta y}{\Delta x}$, il faudrait que la valeur totale de l'intégrale $\Sigma\frac{\Delta y\Delta\delta y}{\Delta x}$ fût nulle aussi bien que celle de

$$\Sigma\left\{\Delta x\delta y+\left(\frac{1}{2}\Delta x-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\};$$

or on peut appliquer évidemment ici ce qui a été dit n° 873, sur la combinaison des conditions simultanées auxquels les maximums et les minimums des intégrales aux différentielles pouvaient être assujétis, et l'on aura en conséquence

$$\Sigma\left\{\Delta x\delta y+\left(\frac{1}{2}\Delta x+k\frac{\Delta y}{\Delta x}-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\}=0,$$

k désignant le coefficient indéterminé par lequel on a multiplié la formule $\Sigma\frac{\Delta y\Delta\delta y}{\Delta x}$ avant de l'ajouter à celle que donne la condition primitive du maximum. Si l'on fait, comme ci-dessus,

$$k\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{1}{2}\Delta x-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}=z,$$

on obtiendra encore l'équation $x+\Delta x-z=C$, de laquelle on tirera ensuite

$$-2k\Delta y+(2x+\Delta x)\Delta x+(2y+\Delta y)\Delta y=2C\Delta x,$$
$$-2ky\ \ +x^2+y^2=2Cx+C:$$

cette dernière équation est celle d'un cercle dont le centre est situé d'une manière quelconque par rapport aux coordonnées : ainsi *parmi tous les polygones que l'on peut construire sur des côtés donnés, celui qui sera inscriptible dans un cercle renfermera le plus d'aire.*

1108. Si les côtés du polygone ne sont pas donnés chacun en particulier, mais qu'on en ait seulement la somme, alors l'équation....

$\delta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$ doit être remplacée par $\delta\Sigma\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$, ou par

$$\Sigma\frac{\Delta x\Delta\delta x+\Delta y\Delta\delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0,$$

équation qui doit être combinée avec celle du maximum,

$$\Sigma\{\Delta x\delta y+\tfrac{1}{2}\Delta x\Delta\delta y+(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta\delta x\}=0;$$

comme nous l'avons indiqué plus haut, et d'après laquelle on a

$$\Sigma\left\{\Delta x\delta y+\left(\frac{1}{2}\Delta x+\frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)\Delta\delta y\right.$$
$$\left.+\left(y+\frac{1}{2}\Delta y+\frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)\Delta\delta x\right\}=0.$$

Pour abréger, faisons

$$\frac{1}{2}\Delta x+\frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=z,\qquad y+\frac{1}{2}\Delta y+\frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=u;$$

nous aurons

$$\Sigma(\Delta x\delta y+z\Delta\delta y+u\Delta\delta x)=0;$$

en intégrant cette équation par parties, de même que celle du numéro précédent, elle donnera

$$z\delta y+u\delta x+\Sigma\{(\Delta x-\Delta z_{,})\delta y-\Delta u_{,}\delta x\}=0,$$

d'où l'on déduira

$$\Delta x-\Delta z_{,}=0,\quad \Delta u_{,}=0,\quad x-z_{,}=C,\quad u_{,}=C',$$

ou

$$x+\frac{1}{2}\Delta x-\frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=C,\qquad y+\frac{1}{2}\Delta y+\frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=C'.$$

Si on multiplie la première de ces équations par $2\Delta x$, la seconde par $2\Delta y$, puis qu'on les ajoute, on formera la suivante,

$$(2x+\Delta x)\Delta x+(2y+\Delta y)\Delta y=2C\Delta x+2C'\Delta y,$$

dont l'intégrale est

$$x^2+y^2=2Cx+2C'y+C''^2,$$

et appartient à un cercle quelconque. Faisant aussi disparaître les radicaux dans les équations d'où celle-ci est tirée, on obtiendra

$$\frac{k^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=(C-x-\tfrac{1}{2}\Delta x)^2,\qquad \frac{k^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=(C'-y-\tfrac{1}{2}\Delta y)^2;$$

en ajoutant ces résultats, il viendra

$$\begin{aligned} k^2 &= (C - x - \tfrac{1}{2}\Delta x)^2 + (C' - y - \tfrac{1}{2}\Delta y)^2 \\ &= C^2 + C'^2 - 2Cx - 2C'y + x^2 + y^2 \\ &- (C - x)\Delta x - (C' - y)\Delta y + \tfrac{1}{4}\Delta x^2 + \tfrac{1}{4}\Delta y^2; \end{aligned}$$

mais par l'intégrale déjà obtenue, on a

$$-2Cx - 2C'y + x^2 + y^2 = C''^2,$$

$$-2(C - x)\Delta x - 2(C' - y)\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 = 0;$$

il restera donc seulement

$$k^2 = C^2 + C'^2 + C''^2 - \tfrac{1}{4}(\Delta x^2 + \Delta y^2),$$

résultat d'après lequel il est visible que la quantité $\Delta x^2 + \Delta y^2$ doit être constante, et que par conséquent les côtés du polygone cherché doivent être tous égaux.

Les termes $z\delta y$ et $u\delta x$ s'évanouissent d'eux-mêmes, lorsque les points extrêmes du polygone sont donnés; mais dans le cas où la base seule serait donnée, c'est-à-dire où l'on aurait la dernière valeur de $x = a$, la première étant zéro, il faudrait, pour faire disparaître le premier de ces termes, prendre $z = 0$, lorsque $x = a$, ce qui, en vertu de l'équation

$$x - z_{,} = C,$$

donnerait $C = a$, et conduirait à l'équation

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2C'y + C''^2.$$

Il suit de là que, *parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés et d'un même périmètre, celui qui renferme le plus d'aire, est le polygone régulier inscrit au cercle.*

CHAPITRE IV.

Théorie des suites, tirée de la considération de leurs Fonctions génératrices.

1109. Les chapitres précédens ont dû montrer que ce que le Calcul aux différences offrait de plus achevé, consistait dans les formules d'interpolation, dans quelques séries générales pour l'intégration des fonctions d'une seule variable, et dans l'intégration des équations du premier degré à coefficiens constans. M. Laplace, en 1779, parvint à tirer ces diverses théories d'une même source, savoir, de la considération de ce qu'il appela les *fonctions génératrices;* sous ce nouveau point de vue, elles présentent un ensemble aussi simple que lumineux, et constituent une nouvelle espèce de calcul qu'il peut être utile de cultiver. Nous allons donc le faire connaître dans ce chapitre, qui, pour être entendu, n'exigera, sur les différences et sur les intégrales, que les notions les plus simples, et pourra ainsi former un traité élémentaire sur ce sujet.

Des Fonctions d'une seule variable. Une série quelconque étant représentée par

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 \ldots . + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \text{etc.};$$

le second membre est le développement du premier, suivant les puissances de la variable t, u est la fonction génératrice de ce second membre; mais parce qu'il est contenu implicitement dans son terme général $y_x t^x$, nous dirons que u est la *fonction génératrice* de y_x qui sera le *coefficient* de t^x dans le développement de la fonction u, et de là naît un *calcul direct,* quand on veut déterminer les coefficiens par le moyen des fonctions génératrices, et un *calcul inverse,* quand on veut remonter, des coefficiens, aux fonctions génératrices.

1110. La première question qui va nous occuper aura pour but de déduire du coefficient y_x, relatif à la fonction génératrice u, celui de quelques autres fonctions liées à celle-là d'une manière fort simple.

1°. Il est visible que le coefficient de t^x doit être égal à y_{x-1} dans ut, à y_{x-2} dans ut^2, et en général à y_{x-m} dans ut^m.

2°. Le même coefficient de t^x doit être égal à y_{x+1} dans le développement de $\frac{u}{t}$, à y_{x+2} dans celui de $\frac{u}{t^2}$, et en général à y_{x+n} dans celui de $\frac{u}{t^n}$.

D'après cela, le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, ou $\frac{u}{t}-u$, est évidemment égal à $y_{x+1}-y_x$, ou à Δy_x; puis à cause que

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 = u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right),$$

on aura pour le coefficient de t^x, dans le développement de cette dernière fonction, $\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$, ou $\Delta^2 y_x$, etc.

En continuant ainsi, on reconnaîtra sans peine que le coefficient de t^x, dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est égal à $\Delta^n y_x$.

Il suit de là aussi que $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est la fonction génératrice de $\Delta^n y_x$, et que $ut^m\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est celle de $\Delta^n y_{x-m}$.

3°. Passons à la fonction plus générale

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right),$$

dans laquelle a, a', a'', ... $a^{(n)}$, représentent des constantes; le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction que l'on peut mettre sous la forme

$$au+\frac{a'u}{t}+\frac{a''u}{t^2}\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}u}{t^n},$$

sera, d'après ce qui précède,

$$ay_x+a'y_{x+1}+a''y_{x+2}\ldots\ldots+a^{(n)}y_{x+n}.$$

Comme cette dernière expression revient souvent, M. Laplace la désigne par ∇y_x; et en conséquence, la fonction génératrice de ∇y_x est

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right).$$

Il compose ensuite, avec ∇y_x, l'expression

$$a\nabla y_x + a'\nabla y_{x+1} + a''\nabla y_{x+2} \ldots + a^{(n)}\nabla y_{x+n},$$

qu'il désigne par $\nabla^2 y_x$, et dont la fonction génératrice est

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^2.$$

En suivant cette notation, il forme une suite d'expressions $\nabla^3 y_x, \ldots \nabla^p y_x$, dont les fonctions génératrices sont respectivement

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^3,$$

. . . .

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p.$$

4°. Ces résultats, combinés avec les précédens, font voir que la fonction génératrice de l'expression $\Delta^q \nabla^p y_{x-m}$ est

$$ut^m \left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q;$$

et de même, que celle de $\Delta^q \nabla^p y_{x+m}$ est

$$\frac{u}{t^m}\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q.$$

1111. Il suit de là que rien n'est plus facile que d'obtenir le coefficient de t^x dans le développement de us^p, si s désigne une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$; il suffit pour cela de développer s^p suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et en représentant un terme quelconque de ce dernier développement par $\frac{K}{t^m}$, le terme affecté de t^x dans le produit $\frac{Ku}{t^m}$, aura pour coefficient celui de t^{x+m} dans u, multiplié par K, ou Ky_{x+m}, ce qui revient à changer la puissance m de $\frac{1}{t}$ en y_{x+m}. On voit par là qu'en écrivant dans s^p, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, et développant ensuite suivant les puissances de y_x, il n'y aura qu'à changer $(y_x)^0$ en y_x, $(y_x)^1$ en $y_{x+1}, \ldots (y_x)^m$ en y_{x+m}, pour avoir le développement du terme général de us^p.

Soit, par exemple, $s = \frac{1}{t} - 1$; on aura $s^p = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^p$; substituant

y_x à $\frac{1}{t}$, développant ensuite, et faisant le changement indiqué, il viendra

$$y_{x+p} - \frac{p}{1} y_{x+p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} y_{x+p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y_{x+p-3} + \text{etc.},$$

pour le terme général du développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$, c'est-à-dire l'expression de $\Delta^p y_x$ (numéro précédent), ce qui s'accorde avec le n° 883.

On formerait d'une manière analogue le développement de $\nabla^p y_x$, en prenant

$$s = a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}.$$

1112. On introduira les différences de y_x au lieu des valeurs successives de cette fonction, si l'on développe s^p suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, en sorte qu'un terme quelconque $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$ de ce développement donne $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$; $K\Delta^m y_x$, sera le coefficient de t^x dans ce dernier; et puisqu'il faut substituer $\Delta^m y_x$ à $\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$, il est visible qu'il suffit de changer d'abord $\frac{1}{t}-1$ en Δy_x, ou $\frac{1}{t}$ en $1+\Delta y_x$, puis de développer le résultat suivant les puissances de Δy_x, et d'écrire ensuite $\Delta^0 y_x$, ou y_x, au lieu de $(\Delta y_x)^0$, Δy_x au lieu de $(\Delta y_x)^1$, et en général, $\Delta^m y_x$ au lieu de $(\Delta y_x)^m$.

Si l'on prend, par exemple, $s = \frac{1}{t}$, qu'on écrive $s = 1 + \frac{1}{t} - 1$, et qu'on développe $\left\{1 + \left(\frac{1}{t}-1\right)\right\}^p$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$; en faisant les changemens indiqués ci-dessus, on obtiendra

$$y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \text{etc.},$$

pour l'expression du terme général de $\frac{u}{t^p}$, et par conséquent de y_{x+p}(1110), ce qui s'accorde avec le n° 882.

1113. Le développement de $\Sigma^p y_x$ s'obtient avec la même facilité, en observant que s'il a z pour fonction génératrice, le coefficient y_x, qui revient à $\Delta^p \Sigma^p y_x$, aura pour fonction génératrice $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$ (1110), et que par conséquent on pourra poser

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p = u,$$

avec la restriction cependant de ne prendre dans le développement du premier membre que les termes où l'exposant de t n'est pas négatif. puisqu'on n'en suppose pas de tels dans le second ; mais alors le développement de z étant de la forme

$$A + Bt + Ct^2 \ldots + Nt^{p-1} + Pt^p + \text{etc.},$$

celui de $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^p$ deviendrait la série

$$\frac{A}{t^p} + \frac{B'}{t^{p-1}} + \frac{C'}{t^{p-2}} \ldots + \frac{N'}{t} + P' + \text{etc.},$$

dont les p premiers termes ne sauraient entrer dans u, lorsqu'on se borne aux indices positifs de y. Si donc on veut rendre complètement exacte l'équation posée ci-dessus, il faudra écrire

$$z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^p = u + \frac{A}{t^p} + \frac{A'_1}{t^{p-1}} \ldots + \frac{A'_{p-1}}{t} + \text{etc.},$$

et alors A, A'_1, A'_2, ... A'_{p-1}, seront les p constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale $\Sigma^p y_x$ (961).

On tirera de là, abstraction faite de ces constantes,

$$z = u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-p};$$

il ne s'agira plus que de passer de la fonction génératrice au coefficient, d'après les préceptes donnés dans les numéros précédens.

Ce résultat rend évidente l'analogie des intégrales avec les puissances négatives, déjà remarquée dans le n° 966; car il montre qu'on peut, en changeant seulement le signe de l'exposant p, passer de la fonction génératrice de $\Delta^p y_x$, égale à $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$, à celle de $\Sigma^p y_x$, égale à $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-p}$, et réciproquement.

Après avoir montré comment la considération des fonctions génératrices conduit aux formules fondamentales du Calcul aux différences, entrons dans quelques détails sur les applications.

1114. L'interpolation des suites n'est, au fond, que la manière de passer du terme y_x et de ceux qui le précèdent ou qui le suivent, à un terme y_{x+n}, dans lequel n représente un nombre quelconque ; or, y_{x+n} est évidemment le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^n}$: toutes les manières de

développer $\frac{1}{t^n}$ doivent donc fournir des formules propres à l'interpolation. On a déjà vu, dans le n° 1112, la plus simple de ces manières, qui consiste à développer $\left\{1+\left(\frac{1}{t}-1\right)\right\}^r$, suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$: en voici encore quelques autres.

Soit, premièrement, $\frac{1}{t}=1+\alpha\frac{1}{t^r}$, et qu'on développe $\frac{1}{t^n}$ suivant les puissances de α, par le moyen du théorème du n° 109; on trouvera

$$\frac{u}{t^n}=u\left\{1+\frac{n}{1}\alpha+\frac{n(n+2r-1)}{1.2}\alpha^2+\frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3}\alpha^3 + \frac{n(n+4r-1)(n+4r-2)(n+4r-3)}{1.2.3.4}\alpha^4+\text{etc.}\right\}.$$

Mais de $\frac{1}{t}=1+\alpha\frac{1}{t^r}$, on tire $\alpha=t^r\left(\frac{1}{t}-1\right)$; et puisque le coefficient de t^x est Δy_{x-r} dans $u\alpha$, $\Delta^2 y_{x-2r}$ dans $u\alpha^2$, et ainsi de suite (1110), on aura

$$\begin{aligned} y_{x+n} = y_x &+ \frac{n}{1}\Delta y_{x-r} + \frac{n(n+2r-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x-2r} \\ &+ \frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_{x-3r} \\ &+ \frac{n(n+4r-1)(n+4r-2)(n+4r-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 y_{x-4r} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

formule qui, par le changement de x en $n-r$, de n en r, de r en 1 et de y_{x+n} en $\Delta^r u_n$, devient celle du n° 925.

1115. Secondement, si l'on prend $t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=z$, et qu'on cherche la valeur de $\frac{1}{t^n}$ en z, on aura des formules analogues à celles des n°s 901 et 902. Pour développer $\frac{1}{t^n}$ suivant les puissances de z, il faut observer que $\frac{1}{t^n}$ est le coefficient de α^n dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{t}}$, puis chercher à introduire z au lieu de t, sans faire entrer dans le résultat les radicaux que donnerait l'équation proposée entre t et z. Or, en multipliant par $1-\alpha t$ les deux termes de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{t}}$, on aura $\frac{1-\alpha t}{1-\alpha\left(\frac{1}{t}+t\right)+\alpha^2}$; et comme l'équation $t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=z$ donne $\frac{1}{t}+t=2+z$, il viendra $\frac{1-\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$; mais il est facile de

voir que

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{\alpha z}{(1-\alpha)^4}+\frac{\alpha^2 z^2}{(1-\alpha)^6}+\frac{\alpha^3 z^3}{(1-\alpha)^8}+\text{etc.}:$$

il reste donc à développer chacune des fractions du second membre de cette équation, et à rassembler les quantités qui multiplient α^n dans le résultat final.

Le coefficient de α^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^s}$ est $\frac{d^r.(1-\alpha)^{-s}}{1.2.3\ldots.r d\alpha^r}$; en faisant $\alpha=0$, après les différentiations, ce qui donne

$$\frac{s(s+1)(s+2)\ldots.(s+r-1)}{1.2.3\ldots.r}.$$

Par cette formule, le coefficient de α^n est

$$\frac{n+1}{1} \quad \text{dans} \quad \frac{1}{(1-\alpha)^2};$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \quad \text{dans} \quad \frac{\alpha}{(1-\alpha)^4},$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.5} \quad \text{dans} \quad \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^6},$$

etc.;

en nommant donc Z le coefficient de α^n, dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, nous aurons

$$Z=\frac{n+1}{1}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}z+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.};$$

expression qu'il est facile de changer en

$$Z=\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{1.2.3}z+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4][(n+1)^2-9]}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.}$$

Si l'on y met $n-1$, au lieu de n, elle donnera le coefficient de α^n dans le développement de $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, savoir,

$$Z'=\frac{n}{1}+\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}z+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.};$$

mais il est évident que le coefficient de α^x, dans le développement de

$\frac{1-\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, ou de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}-\frac{\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, est $Z-Z't$, et que par conséquent

$$\frac{u}{t^n}=u(Z-Z't);$$

la question proposée revient donc à chercher le coefficient de t^x dans le second membre de cette équation, celui de la même puissance de t dans le premier étant y_{x+n}. Or, un terme quelconque de uZ pouvant être représenté par $Kuz^r=Kut^r\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, donnera, d'après le n° 1110, $K\Delta^{2r}y_{x-r}$, tandis qu'un terme quelconque de utZ', représenté par $Kutz^r$, donnera $K\Delta^{2r}y_{x-r-1}$; on aura donc

$$\begin{aligned} y_{x+n}=\frac{(n+1)}{1}y_x &+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-1} \\ &+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-2}+\text{etc.} \\ -\frac{n}{1}\,y_{x-1} &-\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-2} \\ &-\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-3}-\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous déduirons de la valeur précédente de $\frac{1}{t^n}$ de nouvelles expressions de y_{x+n}, en y changeant n en $n-1$; car en désignant par Z'' ce que devient dans ce cas Z', qui représente ce que devient alors Z, nous transformerons l'équation

$$\frac{1}{t^n}=Z-Z't \quad \text{en} \quad \frac{1}{t^{n-1}}=Z'-Z''t;$$

de cette dernière nous tirerons $\frac{1}{t^n}=\frac{Z'}{t}-Z''$, et prenant la moitié de la somme des deux valeurs de $\frac{1}{t^n}$, nous aurons

$$\frac{1}{t^n}=\tfrac{1}{2}Z-\tfrac{1}{2}Z''+\tfrac{1}{2}(1+t)\left(\frac{1}{t}-1\right)Z'.$$

Mettons pour Z, Z' et Z'', leurs valeurs, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}Z-\tfrac{1}{2}Z''&=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{n+1}{1}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}z+\text{etc.}\right\} \\ &-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{n-1}{1}+\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}z+\text{etc.}\right\} \\ &=1+\frac{n^2}{1.2}z+\frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}z^2+\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6}z^3+\text{etc.}; \end{aligned}$$

puis chassant x, il viendra

$$\frac{u}{t^n} = u\left\{1 + \frac{n^2}{1.2}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^4 + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6}t^3\left(\frac{1}{t}-1\right)^6 + \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}u(1+t)\left\{\frac{n}{1}\left(\frac{1}{t}-1\right) + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

et formant les coefficiens de t^x, pour chaque membre, d'après les règles du n° 1110, on en conclura

$$y_{x+n} = y_x + \frac{n^2}{1.2}\Delta^2 y_{x-1} + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^4 y_{x-2} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6 y_{x-3} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n}{1}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \text{etc.},$$

formule semblable à celle du n° 901.

Si l'on en prend la différence en faisant varier n de l'unité, on aura

$$\Delta y_{x+n} = \frac{1}{2}(2n+1)\Delta^2 y_{x-1} + \frac{1}{2}\frac{(2n+1)(n+1)n}{1.2.3}\Delta^4 y_{x-2}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4.5}\Delta^6 y_{x-3} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{1.2}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \text{etc.}:$$

écrivons maintenant y'_x au lieu de Δy_x, et $\frac{n'-1}{2}$ au lieu de n; nous changerons ce dernier résultat en

$$y'_{x+\frac{1}{2}(n'-1)} = \frac{1}{2}(y'_x + y'_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n'^2-1}{2.4}(\Delta^2 y'_{x-1} + \Delta^2 y'_{x-2})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n'^2-1)(n'^2-9)}{2.4.6.8}(\Delta^4 y'_{x-2} + \Delta^4 y'_{x-3}) + \text{etc.}$$
$$+\frac{n'}{2}\Delta y'_{x-1} + \frac{n'(n'^2-1)}{2.4.6}\Delta^3 y'_{x-2}$$
$$+\frac{n'(n'^2-1)(n'^2-9)}{2.4.6.8.10}\Delta^5 y'_{x-3} + \text{etc.},$$

formule qui rentre dans celle du n° 902.

1116. Nous allons parvenir, dans cet article, à une formule d'interpolation plus générale que les précédentes, et qui convient à toutes les séries qui tendent sans cesse à devenir récurrentes. Soit

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots + \frac{p}{t^{m-1}} + \frac{q}{t^m};$$

la question se réduit à trouver une expression de $\frac{1}{t^n}$, ordonnée suivant les puissances de z, et qui ne contienne que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à $\frac{1}{t^m}$. La méthode qui s'offre la première est l'élimination des puissances $\frac{1}{t^m}$, $\frac{1}{t^{2m}}$, $\frac{1}{t^{3m}}$, etc. de $\frac{1}{t^n}$, suivant le procédé indiqué dans le n° 1088; mais cette méthode devient impraticable lorsque le nombre n est un peu grand; et pour arriver à un développement général, il faut avoir recours à d'autres artifices analytiques : voici celui que M. Laplace emploie.

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$ par

$$(a-z)\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} \ldots + p\theta + q,$$

et substituant, dans le nouveau numérateur seulement, pour z sa valeur, il vient

$$\frac{b\theta^{m-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c\theta^{m-2}\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e\theta^{m-3}\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right) \ldots + q\left(1-\frac{\theta^m}{t^m}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)(a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^m)};$$

les deux termes de cette fraction étant divisés par $1-\frac{\theta}{t}$, elle prend la forme

$$\frac{\left.\begin{array}{r} b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q \\ + \frac{\theta}{t}(c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}(e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\theta^{m-1}}{t^{m-1}} \end{array}\right\}}{a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^m}.$$

Maintenant, la quantité $\frac{1}{t^n}$ pouvant être considérée comme le coeffi-

cient de θ^n dans le développement de $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$, sera aussi le coefficient de θ^n dans le développement de la fonction précédente, développement qui ne dépend que de celui de

$$\frac{1}{a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^m}.$$

Faisons, pour abréger,

$$a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} + e\theta^{m-3} \ldots + p\theta + q = V;$$

nous aurons

$$\frac{1}{V - z\theta^m} = \frac{1}{V} + \frac{z\theta^m}{V^2} + \frac{z^2\theta^{2m}}{V^3} + \frac{z^3\theta^{3m}}{V^4} + \text{etc.},$$

expression dans laquelle il reste à développer, suivant les puissances de θ, les quantités

$$\frac{1}{V}, \quad \frac{1}{V^2}, \quad \frac{1}{V^3}, \quad \frac{1}{V^4}, \quad \text{etc.}$$

On y parviendra en décomposant la fraction $\frac{1}{V^i}$ en fractions simples, suivant les procédés du nº 375, et convertissant chacune de ces dernières en séries; alors si l'on désigne par $Z_{i-1,r}$, le coefficient de θ^r, formé par la réunion des termes correspondans de ces séries, les coefficiens de θ^n dans les quantités

$$\frac{1}{V}, \quad \frac{z\theta^m}{V^2}, \quad \frac{z^2\theta^{2m}}{V^3}, \quad \frac{z^3\theta^{3m}}{V^4}, \quad \text{etc.},$$

seront respectivement

$$Z_{0,n}, \quad Z_{1,n-m}z, \quad Z_{2,n-2m}z^2, \quad Z_{3,n-3m}z^3, \quad \text{etc.};$$

le coefficient total de θ^n, dans le développement de $\frac{1}{V-z\theta^m}$, sera donc

$$Z_{0,n} + Z_{1,n-m}z + Z_{2,n-2m}z^2 + Z_{3,n-3m}z^3 + \text{etc.}$$

Substituant cette série dans l'expression de $\frac{1}{t^n}$, on obtiendra

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n} = \quad & b[Z_{0,n-m+1} + zZ_{1,n-2m+1} + z^2Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}] \\
+ \quad & c[Z_{0,n-m+2} + zZ_{1,n-2m+2} + z^2Z_{2,n-3m+2} + \text{etc.}] \\
+ \quad & e[Z_{0,n-m+3} + zZ_{1,n-2m+3} + z^2Z_{2,n-3m+3} + \text{etc.}] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{t}\begin{cases} \quad c[Z_{0,n-m+1} + zZ_{1,n-2m+1} + z^2Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}] \\ + e[Z_{0,n-m+2} + zZ_{1,n-2m+2} + z^2Z_{2,n-3m+2} + \text{etc.}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \\
&+\frac{1}{t^2}\begin{cases} \quad e[Z_{0,n-m+1} + zZ_{1,n-2m+1} + z^2Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\frac{1}{t^{m-1}} \quad q[Z_{0,n-m+1} + zZ_{1,n-2m+1} + z^2Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}].
\end{aligned}
$$

Les quantités

$$
\begin{aligned}
&ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots\ldots + qy_{x+m}, \\
&a\nabla y_x + b\nabla y_{x+1} + c\nabla y_{x+2} \ldots\ldots + q\nabla y_{x+m}, \\
&a\nabla^2 y_x + b\nabla^2 y_{x+1} + c\nabla^2 y_{x+2} \ldots\ldots + q\nabla^2 y_{x+m}, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

ont été désignées respectivement par ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, $\nabla^3 y_x$, etc., dans le n° 1110, et il suit aussi de ce numéro, que le coefficient de t^x, dans la fonction $\frac{uz^r}{t^r}$ est $\nabla^r y_{x+r}$; si donc on multiplie par u l'expression de $\frac{1}{t^n}$, trouvée ci-dessus, on aura celle de $\frac{u}{t^n}$, fonction génératrice de y_{x+n}; et prenant les coefficiens du second membre, suivant la remarque que nous venons de faire, on en déduira cette formule

$$
\begin{aligned}
y_{x+n} = \; & y_x\{bZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} + eZ_{0,n-m+3} \ldots + qZ_{0,n}\} \\
+ \; & \nabla y_x\{bZ_{1,n-2m+1} + cZ_{1,n-2m+2} + eZ_{1,n-2m+3} \ldots + qZ_{1,n-m}\} \\
+ \; & \nabla^2 y_x\{bZ_{2,n-3m+1} + cZ_{2,n-3m+2} + eZ_{2,n-3m+3} \ldots + qZ_{2,n-2m}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \; & y_{x+1}\{cZ_{0,n-m+1} + eZ_{0,n-m+2} \ldots + qZ_{0,n-1}\} \\
+ \; & \nabla y_{x+1}\{cZ_{1,n-2m+1} + eZ_{1,n-2m+2} \ldots + qZ_{1,n-m-1}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \; & y_{x+2}\{eZ_{0,n-m+1} \ldots + qZ_{0,n-2}\} \\
+ \; & \nabla y_{x+2}\{eZ_{1,n-2m+1} \ldots + qZ_{1,n-m-2}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + qy_{x+m-1}Z_{0,n-m+1} + q\nabla y_{x+m-1}Z_{1,n-2m+1} + q\nabla^2 y_{x+m-1}Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Les diverses séries dont cette expression est composée étant ordonnées suivant les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x, \ldots \nabla y_{x+1}$, $\nabla^2 y_{x+1}$, etc., sont convergentes toutes les fois que ces quantités vont en décroissant, à mesure que l'exposant de leur caractéristique augmente; on en tirera, par conséquent des valeurs de y_{x+n}, qui seront d'autant plus approchées, que

la convergence sera plus rapide. Ces valeurs seraient entièrement exactes, si l'on avait $\nabla^r y_x = 0$, puisqu'alors chacune des séries qui les forment ne renfermerait qu'un nombre de termes limité.

L'équation $\nabla^r y_x = 0$ développée, revenant à

$$a\nabla^{r-1}y_x + b\nabla^{r-1}y_{x+1} + c\nabla^{r-1}y_{x+2} \ldots + q\nabla^{r-1}y_{x+m} = 0,$$

appartient à une série récurrente dont le terme général serait exprimé par $\nabla^{r-1}y_x$ (1050), ce qui fait voir que la formule d'interpolation obtenue ci-dessus, donnera l'expression du terme général de toutes les séries qui, par des combinaisons d'un nombre m de termes, effectuées d'après les formules ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, etc., conduiront enfin à une série récurrente.

Si l'on avait simplement $\nabla y_x = 0$, ou

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots + qy_{x+m} = 0,$$

on en conclurait

$$ay_n + by_{n+1} + cy_{n+2} \ldots + qy_{n+m} = 0,$$

en changeant x en n; et faisant $x = 0$ dans la valeur de y_{x+n}, il en résulterait

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_0\{bZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} + cZ_{0,n-m+3} \ldots + qZ_{0,0}\} \\ & + y_1\{cZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} \ldots + qZ_{0,-1}\} \\ & + y_2\{cZ_{0,n-m+1} \ldots\ldots + qZ_{0,-2}\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + qy_{m-1}Z_{0,n-m+1}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression offre l'intégrale complète de l'équation aux différences posée précédemment; y_0, y_1, y_2, ... y_{m-1}, en sont les constantes arbitraires.

Si l'on se proposait l'équation $\nabla^2 y_x = 0$, la formule générale donnerait pour ce cas un résultat dans lequel entreraient, comme arbitraires, les quantités y_0, ∇y_0, y_1, $\nabla y_1 \ldots y_{m-1}$, ∇y_{m-1} : leur nombre est égal à $2m$, parce que l'équation $\nabla^2 y_x = 0$ monte à l'ordre marqué par $2m$; car son développement est

$$\left.\begin{aligned} & a\{ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots\ldots + qy_{x+m}\} \\ & + b\{ay_{x+1} + by_{x+2} + cy_{x+3} \ldots\ldots + qy_{x+m+1}\} \\ & + c\{ay_{x+2} + by_{x+3} + cy_{x+4} \ldots\ldots + qy_{x+m+2}\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + q\{ay_{x+m} + by_{x+m+1} + cy_{x+m+2} \ldots + qy_{x+2m}\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Il en serait de même des équations plus élevées $\nabla^3 y_x = 0$, $\nabla^4 y_x = 0$, etc.

1117. En faisant $y_x = y'_x + y''_x$, on parviendra encore, par les formules précédentes, à l'intégrale de l'équation $\nabla^n y_x + X_x = 0$, dans laquelle X_x désigne une fonction quelconque de x : la fonction génératrice u deviendra, dans cette hypothèse, $u = u' + u''$, u' et u'' représentant les fonctions génératrices de y'_x et de y''_x. Supposons que $u''z^i = \lambda$, et que X_{x+n} soit le coefficient de t^{x+n} dans le développement de λ; nous aurons $X_{x+n} = \nabla^i y''_{x+n}$ (1110); mais

$$\frac{1}{z^i} = \frac{t^{mi}}{(at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} \dots + q)^i},$$

et le coefficient de t^{x+n}, dans le développement de cette fonction, sera évidemment le même que celui de θ^{x+n-mi} dans le développement de

$$\frac{1}{(a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} \dots + q)^i}, \quad \text{ou de} \quad \frac{1}{F^i},$$

coefficient qui, d'après le numéro précédent, sera désigné par...... $Z_{i-1,x+n-mi}$. Il suit de là que y''_{x+n}, coefficient de t^{x+n} dans u'', ou dans $\frac{\lambda}{z^i}$, sera

$$X_{x+n-mi}Z_{i-1,0} + X_{x+n-mi-1}Z_{i-1,1} \dots + X_0 Z_{i-1,x+n-mi},$$

et reviendra par conséquent à $\Sigma X_r Z_{i-1,x+n-mi-r}$, en prenant l'intégrale depuis $r=0$ jusqu'à $r=x+n-mi$; maintenant, si l'on écrit dans l'expression générale de y_{x+n} du numéro précédent, $y'_{x+n} + y''_{x+n}$, puis qu'on fasse $x=0$, et qu'on mette pour y''_n sa valeur $\Sigma X_r Z_{i-1,n-mi-r}$, on aura

$$y'_n + \Sigma X_r Z_{i-1,n-mi-r} =$$

$$\begin{cases} \quad y_0\{bZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} \dots + qZ_{0,n}\} \\ + \nabla y_0\{bZ_{1,n-2m+1} + cZ_{1,n-2m+2} \dots + qZ_{1,n-m}\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \nabla^{i-1}y_0\{bZ_{i-1,n-im+1} + cZ_{i-1,n-im+2} \dots + qZ_{i-1,n-im+m}\} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \quad y_1\{cZ_{0,n-m+1} \dots\dots\dots\dots + qZ_{0,n-1}\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \nabla^{i-1}y_1\{cZ_{i-1,n-im+1} \dots\dots\dots\dots + qZ_{i-1,n-im+m-1}\} \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ qy_{m-1}Z_{0,n-m+1} + q\nabla y_{m-1}Z_{1,n-2m+1} \dots\dots + q\nabla^{i-1}y_{m-1}Z_{i-1,n-im+1}.$$

Cette série s'arrêtera toutes les fois qu'on aura $\nabla^i y_n = 0$, ou $\nabla^i y'_n + \nabla^i y''_n = 0$, ou enfin $\nabla^i y'_n + X_n = 0$: elle donnera alors l'intégrale de cette dernière équation; et les quantités y_0, $\nabla y_0, \dots y_1$, ∇y_1, etc., tiendront lieu des constantes arbitraires.

1118. Tout ce qui précède repose sur le développement en série de la fonction $\frac{1}{V^{n}}$ (1116), recherche qui renferme implicitement celle du terme général d'une suite récurrente; c'est pourquoi nous allons nous en occuper en détail. Nous prendrons, au lieu de la fraction $\frac{1}{V^{n}}$, la fraction $\frac{U}{V}$, U et V étant des fonctions rationnelles et entières de x, l'une du degré $s-1$, l'autre du degré s. Supposant que $V=Q(x-a)^{n}$, nous aurons, par le n° 380,

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x-a)^{n}}+\frac{A_{1}}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_{2}}{(x-a)^{n-2}}\dots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{P}{Q},$$

et les constantes A, $A_{1}, \dots A_{n-1}$, seront données par les équations

$$\begin{aligned}
A &= \frac{u}{q},\\
A_{1} &= \frac{1}{1.dx}\,d.\frac{U}{Q},\\
A_{2} &= \frac{1}{1.2.dx^{2}}\,d^{2}.\frac{U}{Q},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_{n-1} &= \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)dx^{n-1}}\,d^{n-1}.\frac{U}{Q},
\end{aligned}$$

u et q étant ce que deviennent U et Q, lorsqu'on y change x en a, substitution qu'il faut faire aussi dans

$$\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q},\quad \frac{1}{dx^{2}}d^{2}.\frac{U}{Q},\dots\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{Q},$$

après les différentiations.

Le coefficient de x^{r}, dans le développement de $\frac{A}{(x-a)^{n}}$, ordonné suivant les puissances positives de x, sera

$$\mp\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{1.2.3\dots r}\,\frac{A}{a^{n+r}};$$

dans celui de $\frac{A_{1}}{(x-a)^{n-1}}$, sera

$$\pm\frac{(n-1)n(n+1)\dots(n+r-2)}{1.2.3\dots r}\,\frac{A_{1}}{a^{n+r-1}};$$

dans celui de $\frac{A_{2}}{(x-a)^{n-2}}$, sera

$$\mp\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\dots(n+r-3)}{1.2.3\dots r}\,\frac{A_{2}}{a^{n+r-2}},$$

etc.;

en réunissant ces diverses parties, et faisant usage de la notation du n° 982, il viendra

$$[0]^{-r}\left\{\mp[n+r-1]^{r}\frac{A}{a^{n+r}}\pm[n+r-2]^{r}\frac{A_1}{a^{n+r-1}}\mp[n+r-3]^{r}\frac{A_2}{a^{n+r-2}}\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -[r]^{r}\frac{A_{n-1}}{a^{r+1}}\right\}.$$

Mettant pour les numérateurs A, A_1, ... A_{n-1}, leurs valeurs, on aura

$$[0]^{-r}\left\{\mp\frac{[n+r-1]^{r}}{a^{n+r}}\frac{u}{q}\pm\frac{[n+r-2]^{r}[0]^{-1}}{a^{n+r-1}}\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}\mp\frac{[n+r-3]^{r}[0]^{-2}}{a^{n+r-2}}\frac{1}{dx^2}d^2.\frac{U}{Q}\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{[r]^{r}[0]^{-n+1}}{a^{r+1}}\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{Q}\right\},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$[0]^{-n+1}\left\{\mp\frac{[n+r-1]^{n-1}}{a^{n+r}}\frac{u}{q}\pm[0]^{-1}[n-1]^{1}\frac{[n+r-2]^{n-2}}{a^{n+r-1}}\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}\mp[0]^{-2}[n-1]^{2}\frac{[n+r-3]^{n-3}}{a^{n+r-2}}\frac{1}{dx^2}d^2.\frac{U}{Q}\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{[r]^{0}}{a^{r+1}}\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{Q}\right\};$$

en observant,,ponr e premier terme, que

$$[0]^{-r}[n+r-1]^{r}=\frac{[n+r-1]^{n+r-1}}{[r]^{r}[n-1]^{n-1}}=\frac{[n+r-1]^{n-1}}{[n-1]^{n-1}}=[n+r-1]^{n-1}[0]^{-n+1},$$

pour le second, que

$$[0]^{-r}[n+r-2]^{r}[0]^{-1}=\frac{[0]^{-1}[n+r-2]^{n+r-2}}{[r]^{r}[n-2]^{n-2}}=[0]^{-1}[n-1]^{1}\frac{[n+r-2]^{n-2}}{[n-1]^{n-1}}=[0]^{-1}[n-1]^{1}[n+r-2]^{n-2}[0]^{-n+1},$$

et de même des termes suivans. Cela posé, puisque

$$\frac{[n+r-1]^{n-1}}{x^{n+r}}=\pm\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{1}{x^{r+1}};$$

il est visible que le développement ci-dessus revient à

$$-[0]^{-n+1}\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{Qx^{r+1}}\ (91),$$

pourvu qu'après les différentiations on change x en a. Voilà donc une

expression fort simple du coefficient de x^r dans la partie du développement de $\frac{U}{V}$, qui résulte du facteur $(x-a)^n$ de son dénominateur. Si l'on suppose que ce dénominateur se décompose dans les facteurs $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc., on obtiendra de semblables expressions pour les parties résultantes des facteurs $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc., et le terme général du développement de la fraction rationnelle $\frac{U}{V}$, ordonné suivant les puissanees positives de x, sera par conséquent

$$-\overset{-n+1}{[o]}\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-b)^p(x-c)^q\ldots},$$
$$-\overset{-p+1}{[o]}\frac{1}{dx^{p-1}}d^{p-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-a)^n(x-c)^q\ldots},$$
$$-\overset{-q+1}{[o]}\frac{1}{dx^{q-1}}d^{q-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-a)^n(x-b)^p\ldots},$$
etc.,

pourvu qu'après les différentiations on substitue, au lieu de x, a dans la première ligne, b dans la seconde, c dans la troisième, etc.

Quand même les quantités a, b, c, etc., seraient imaginaires, on n'en parviendrait pas moins au terme général demandé : il contiendrait à la vérité des expressions imaginaires; mais on s'en débarrasserait en combinant convenablement les termes fournis par un même couple de facteurs imaginaires.

1119. En appliquant ce qui précède à la fraction

$$\frac{1}{a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}\ldots+p\theta+q}$$

du n° 1116, il faut supposer que

$$a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}\ldots+p\theta+q=a(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma)\text{ etc.};$$

et prenant

$$\frac{1}{V^s}=\frac{1}{a^s(\theta-\alpha)^s(\theta-\beta)^s(\theta-\gamma)^s\text{ etc.}},$$

le coefficient de θ^r, ou $Z_{s-1,r}$ aura pour expression

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)a^s d\theta^{s-1}}d^{s-1}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\theta^{r+1}(\alpha-\beta)^s(\theta-\gamma)^s\text{ etc.}}\\+\frac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\gamma)^s\text{ etc.}}\\+\frac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\beta)^s\text{ etc.}}\\+\text{ etc.},\end{array}\right.$$

en observant de faire, après la différentiation, $\theta = \alpha$ dans la première ligne, $\theta = \beta$ dans la seconde, $\theta = \gamma$ dans la troisième, et ainsi de suite.

1120. La décomposition de la fraction génératrice d'une série récurrente, en fractions partielles, exigeant la résolution d'une équation algébrique, et introduisant, en conséquence, des irrationnelles dans un sujet qui réellement n'en comporte pas (*voyez* le *Compl. des Élém. d'Alg.*), n'est, au fond, qu'une méthode indirecte; car en considérant que la fraction rationnelle quelconque

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots\ldots + A_{n-1} x^{n-1}}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \ldots\ldots + B_n x^n}$$

revient à

$$(A_0 + A_1 x \ldots\ldots + A_{n-1} x^{n-1})(B_0 + B_1 x \ldots\ldots + B_n x^n)^{-1},$$

on voit que la question est liée immédiatement à celle du développement du polynome

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^m \text{ (\textit{Int.} 19 et 20)},$$

et ne repose que sur des expressions rationnelles.

On pourrait la traiter aussi par les procédés indiqués dans les n°s 122 et suiv., ou par la formule au moyen de laquelle Lagrange exprime le terme général du développement de la fraction

$$\frac{\mathrm{f}(y)}{a - y + \varphi(y)} \text{ (110)};$$

mais on doit observer que cette formule exige aussi qu'on sache développer les puissances du polynome cité plus haut.

1121. Dans la note XI de son *Traité de la Résolution des Équations numériques*, Lagrange applique sa formule au développement des fractions de la forme

$$\frac{P + Qx}{(1 - 2x\cos\alpha + x^2)^m},$$

auxquelles on peut réduire tous les groupes fournis par les facteurs imaginaires du dénominateur d'une fraction rationnelle quelconque $\frac{U}{V}$ (383).

Occupons-nous, en premier lieu, de

$$\frac{P + Qx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

et donnons-lui la forme

$$\frac{1}{2\cos\omega}\cdot\frac{P+Qx}{\frac{1}{2\cos\omega}-x+\frac{1}{2\cos\omega}x^2};$$

nous aurons

$$f(x)=P+Qx,\quad \varphi(x)=\frac{x^2}{2\cos\omega},\quad a=\frac{1}{2\cos\omega},$$

d'où nous déduirons

$$f(a)=P+Qa,$$
$$\varphi(a)=\frac{a^2}{2\cos\omega},\quad \varphi(a)^2=\frac{a^4}{4\cos\omega^2},\quad \varphi(a)^3=\frac{a^6}{8\cos\omega^3},\quad \text{etc.},$$
$$\frac{f(a)}{a^{n+1}}=Pa^{-n-1}+Qa^{-n},$$
$$\frac{f(a)\varphi(a)}{a^{n+1}}=\frac{Pa^{-n+1}}{2\cos\omega}+\frac{Qa^{-n+2}}{2\cos\omega},$$
$$\frac{f(a)\varphi(a)^2}{a^{n+1}}=\frac{Pa^{-n+3}}{4\cos\omega^2}+\frac{Qa^{-n+4}}{4\cos\omega^2},$$
etc. ;

passant aux coefficiens différentiels, et les substituant dans la formule générale, que nous diviserons par $2\cos\omega$, nous obtiendrons, pour le coefficient de x^n, l'expression

$$P\left\{\frac{a^{-n-1}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)a^{-n}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-3)(n-2)a^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\}$$
$$+Q\left\{\frac{a^{-n}}{2\cos\omega}-\frac{(n-2)a^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-4)(n-3)a^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\};$$

mettant au lieu de a sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$, nous parviendrons à

$$P\left\{(2\cos\omega)^n-\frac{n-1}{1}(2\cos\omega)^{n-2}+\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-4}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}(2\cos\omega)^{n-6}+\text{etc.}\right\}$$
$$+Q\left\{(2\cos\omega)^{n-1}-\frac{n-2}{1}(2\cos\omega)^{n-3}+\frac{(n-4)(n-3)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-5}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3}(2\cos\omega)^{n-7}+\text{etc.}\right\},$$

expression qui ne doit point contenir de puissances négatives de $\cos\omega$, puisque le développement cherché n'en saurait renfermer de telles.

On la simplifie beaucoup en la comparant avec la formule

$$\sin nx=\sin x\left\{2^{n-1}\cos x^{n-1}-\frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos x^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos x^{n-5}\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos x^{n-7}+\text{etc.}\right\},$$

obtenue dans le n° 1052 ; car on voit alors que la série qui multiplie P n'est autre chose que le développement de $\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}$, et que celle qui multiplie Q répond à $\frac{\sin n\omega}{\sin\omega}$: on a donc pour le terme général du développement de la fraction $\frac{P+Qx}{1-2x\cos\omega+x^2}$, cette expression très-simple

$$\left\{P\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}+Q\frac{\sin n\omega}{\sin\omega}\right\}x^n,$$

qu'Euler a donnée le premier, dans son *Introduction à l'Analyse de l'infini*.

La formule générale s'applique également aux fractions

$$\frac{P+Qx}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2},\quad \frac{P+Qx}{(1-2x\cos\omega+x^2)^3},\quad \text{etc.}$$

Arbogast a reconnu, mais sans le dire expressément, que le développement assigné par Lagrange, à la première de ces fractions, était fautif (*Du Calcul des Dérivations*, p. 182); l'erreur vient de ce que, pour donner à cette fraction la forme $\frac{f(x)}{[a-x+\varphi(x)]^2}$, il faut écrire...... $\frac{1}{(2\cos\omega)^2}\cdot\frac{P+Qx}{\left(\frac{1}{2\cos\omega}-x+\frac{1}{2\cos\omega}x^2\right)^2}$, et que dans son calcul, Lagrange, au lieu du facteur $\frac{1}{(2\cos\omega)^2}$, a seulement employé $\frac{1}{2\cos\omega}$, ce qui rend trop forts d'une unité tous les exposans de la quantité $2\cos\omega$; en sorte que le véritable résultat, ainsi que me l'a appris feu M. Français, ami et collaborateur d'Arbogast, est

$$\begin{aligned}&P\left\{\frac{(n+1)a^{-n-2}}{(2\cos\omega)^2}-\frac{(n-1)na^{-n-1}}{(2\cos\omega)^3}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)a^{-n}}{2(2\cos\omega)^4}-\text{etc.}\right\}\\ +\,&Q\left\{\frac{na^{-n-1}}{(2\cos\omega)^2}-\frac{(n-2)(n-1)a^{-n}}{(2\cos\omega)^3}+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)a^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^4}-\text{etc.}\right\};\end{aligned}$$

et mettant pour a sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$, il viendra

$$\begin{aligned}&P\{(n+1)(2\cos\omega)^n-(n-1)n(2\cos\omega)^{n-2}\\ &\qquad+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}(2\cos\omega)^{n-4}-\text{etc.}\}\\ +\,&Q\{n(2\cos\omega)^{n-1}-(n-2)(n-1)(2\cos\omega)^{n-3}\\ &\qquad+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-5}-\text{etc.}\},\end{aligned}$$

en observant de ne faire entrer dans cette expression aucune des puissances négatives de $\cos\omega$.

1122. Reprenons le Calcul des fonctions génératrices. M. Laplace donne encore au développement de $\frac{1}{t^x}$ une nouvelle forme qui le conduit à une formule d'interpolation dépendante à la fois des différences et des fonctions désignées par la caractéristique ∇; mais forcé par l'abondance des matières, d'omettre plusieurs détails intéressans, nous renvoyons pour ceux-ci au Mémoire même d'où ce qui précède est tiré, ou à la première partie de la *Théorie analytique des Probabilités*, et nous allons passer à l'usage des fonctions génératrices dans la *transformation* des suites.

Transformation des suites. Toute suite n'étant autre chose qu'un développement de la fonction Σy_x, prise depuis $x=0$ jusqu'à x infini, il est évident que les diverses manières d'exprimer ce développement fourniront des suites équivalentes, ou des transformées de la même suite. Soit la suite

$$y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_x + y_{x+1} + \text{etc.},$$

et faisons

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \text{etc.};$$

il est facile de voir, par le n° 1110, que le coefficient de t^x, dans la fonction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$, exprimera la somme des termes de la suite proposée, depuis y_x inclusivement jusqu'à l'infini. En multipliant les deux termes de cette fraction par

$$a + b + c + e + \text{etc.} \ldots - \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \text{etc.}\right),$$

on rend le numérateur divisible par $1-\frac{1}{t}$, et il se change en

$$u\left\{\begin{array}{l} b + c + e + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t}(c + e + \text{etc.}) + \frac{1}{t^2}(e + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{array}\right\};$$

puis posant

$$a + b + c + e + \text{etc.} = K,$$
$$a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \text{etc.} = z,$$

on aura

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}} = \frac{b + c + e + \text{etc.} + \frac{1}{t}(c + e + \text{etc.}) + \frac{1}{t^2}(e + \text{etc.}) + \text{etc.}}{K - z}\, u,$$

équation dont le second membre, développé par rapport à z, prend la forme

$$u\left\{\begin{array}{l} b+c+e+\text{etc.} \\ +\frac{1}{t}\,(c+e+\text{etc.}) \\ +\frac{1}{t^2}\,(e+\text{etc.}) \\ +\text{etc.}\end{array}\right\}\left\{\frac{1}{K}+\frac{z}{K^2}+\frac{z^2}{K^3}+\frac{z^3}{K^4}+\text{etc.}\right\};$$

mais le coefficient de t^x dans $\frac{uz^r}{t^r}$ étant égal à $\nabla^r y_{x+r}$ (1110), le même coefficient, dans le développement de la formule ci-dessus, sera

$$\begin{array}{l}(b+c+e+\text{etc.})\left\{\frac{y_x}{K}+\frac{\nabla y_x}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_x}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_x}{K^4}+\text{etc.}\right\} \\ +\quad(c+e+\text{etc.})\left\{\frac{y_{x+1}}{K}+\frac{\nabla y_{x+1}}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_{x+1}}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_{x+1}}{K^4}+\text{etc.}\right\} \\ +\quad(e+\text{etc.})\left\{\frac{y_{x+2}}{K}+\frac{\nabla y_{x+2}}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_{x+2}}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_{x+2}}{K^4}+\text{etc.}\right\} \\ +\text{etc.}\end{array}$$

Cette nouvelle série, équivalente à la proposée, depuis y_x jusqu'à l'infini, deviendra convergente, si les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, etc. vont en décroissant; elle s'arrêtera même si l'on a $\nabla^r y_x=0$, et donnera alors la somme des suites récurrentes. En faisant $x=0$, on transformerait la série proposée, à partir de son origine.

En général, si z représente une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par Πy_x, $\Pi^2 y_x$, $\Pi^3 y_x$, etc., les coefficiens de t^x dans uz uz^2, uz^3, etc., on parviendra à ordonner, suivant les puissances de z, le développement de $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$, en multipliant les deux termes de cette fraction par $K-z$, K étant une quantité égale à ce que devient z lorsque $t=1$, afin que $K-z$ soit divisible par $1-\frac{1}{t}$.

Représentons par

$$q+\frac{q'}{t}+\frac{q''}{t^2}+\frac{q'''}{t^3}+\text{etc.}$$

le quotient de la division; nous aurons

$$\begin{array}{l}\frac{u}{1-\frac{1}{t}}=\frac{uq}{K}\left(1+\frac{z}{K}+\frac{z^2}{K^2}+\frac{z^3}{K^3}+\text{etc.}\right) \\ \qquad+\frac{uq'}{Kt}\left(1+\frac{z}{K}+\frac{z^2}{K^2}+\frac{z^3}{K^3}+\text{etc.}\right) \\ \qquad+\text{etc.};\end{array}$$

et passant des fonctions génératrices aux coefficiens, suivant la convention établie ci-dessus, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\Sigma y_x = {} & \frac{qy_x}{K} + \frac{q\Pi y_x}{K^2} + \frac{q\Pi^2 y_x}{K^3} + \text{etc.}\\ & + \frac{q'y_{x+1}}{K} + \frac{q'\Pi y_{x+1}}{K^2} + \frac{q'\Pi^2 y_{x+1}}{K^3} + \text{etc.}\\ & + \frac{q''y_{x+2}}{K} + \frac{q''\Pi y_{x+2}}{K^2} + \frac{q''\Pi^2 y_{x+2}}{K^3} + \text{etc.}\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Pour avoir toute la série, c'est-à-dire l'intégrale Σy_x, prise depuis $x=0$ jusqu'à x infini, il faut faire, dans la formule ci-dessus $x=0$.

1123. Je ne puis quitter ce sujet, sans faire connaître une transformation purement algébrique et fort simple, qu'Euler a employée avec succès, dans son *Calcul différentiel;* elle consiste à faire, dans la série

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.},$$

$x = \frac{y}{1 \pm y}$. En prenant le signe $+$, on a

$$\begin{aligned} x &= y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \text{etc.};\\ x^2 &= y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 5y^6 - 6y^7 + \text{etc.},\\ x^3 &= y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \text{etc.},\\ x^4 &= y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \text{etc.},\\ &\text{etc.},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$S = ay \begin{array}{r|} -a\\ +b\\ \\ \\ \\ \end{array} y^2 \begin{array}{r|} +a\\ -2b\\ +c\\ \\ \\ \end{array} y^3 \begin{array}{r|} -a\\ +3b\\ -3c\\ +d\\ \\ \end{array} y^4 \begin{array}{r|} +a\\ -4b\\ +6c\\ -4d\\ +e \end{array} y^5 - \text{etc.}$$

Les coefficiens des puissances de y, dans cette série, sont les différences du premier terme a de la série

$$a + b + c + d + e + \text{etc.}$$

qu'on obtient en faisant $x=1$ dans la proposée; et l'on conclut de là que

$$S = ay + \Delta a.y^2 + \Delta^2 a.y^3 + \Delta^3 a.y^4 + \text{etc.}$$

Cette dernière série sera convergente si les différences des coefficiens des termes de la première vont en décroissant.

Lorsqu'on fait $x = \frac{y}{1+y}$, on a $y = \frac{x}{1-x}$, et la série est transformée en

$$S = a\,\frac{x}{1-x} + \Delta a.\frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 a.\frac{x^3}{(1-x)^3} + \Delta^3 a.\frac{x^4}{(1-x)^4} + \text{etc.}$$

Quand la série $a + b + c + d + e +$ etc. a des différences constantes, on obtient exactement la somme S. Si l'on avait, par exemple,

$$4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \text{etc.},$$

on trouverait, en prenant les différences des coefficiens numériques,

$$a = 4, \quad \Delta a = 11, \quad \Delta^2 a = 14, \quad \Delta^3 a = 6, \quad \Delta^4 a = 0, \quad \text{etc.}$$

ce qui donnerait

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11x^2}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{4x - x^2 + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

Non-seulement on arrive de cette manière à la limite de la série proposée, ou à sa fonction génératrice, mais on trouve encore la somme d'un nombre quelconque de ses termes. En effet, la série proposée étant

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots + px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{etc.},$$

on aura

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{etc.}$$
$$= x^n \left\{ p\,\frac{x}{1-x} + \Delta p.\frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 p.\frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{etc.} \right\};$$

et en retranchant cette partie de l'expression totale de S, il viendra, pour la somme des termes, depuis le premier jusqu'à celui qui est multiplié par x^n, inclusivement,

$$(a - x^n p)\,\frac{x}{1-x} + (\Delta a - x^n \Delta p)\,\frac{x}{(1-x)^2} + (\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p)\,\frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{etc.}$$

Avec un peu d'attention, on reconnaît facilement que la série transformée n'est convergente par elle-même que dans un très-petit nombre

de cas, lorsque les différences Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, etc., ne décroissent pas très-rapidement; mais si l'on donne à x le signe $-$, la série proposée et la transformée deviendront respectivement

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{etc.},$$
$$S = a\frac{x}{1+x} - \Delta a.\frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 a.\frac{x^3}{(1+x)^3} - \Delta^3 a.\frac{x^4}{(1+x)^4} + \text{etc.},$$

en changeant le signe de chaque terme; et la seconde sera convergente lorsqu'on y supposera $x=1$ et $x<1$: le premier de ces cas mérite une attention particulière.

1124. On a, quand $x=1$,

$$S = a - b + c - d + e - \text{etc.},$$
$$S = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \text{etc.};$$

et par ces formules on trouve les limites d'un grand nombre de séries divergentes.

Si l'on propose, par exemple,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.},$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.},$$
$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.},$$
etc.,

on trouve pour la première série $a=1$, $\Delta a = 0$, $\Delta^2 a = 0$, etc., et par conséquent $S=\frac{1}{2}$, comme on l'a vu dans le n° 6 de l'Introduction (*); pour la deuxième série $a=1$, $\Delta a=1$, $\Delta^2 a=0$, etc., $S=\frac{1}{4}$; pour la troisième $a=1$, $\Delta a=3$, $\Delta^2 a=2$, $\Delta^3 a=0$, etc., $S=0$, etc.

On arriverait encore à la limite cherchée, si la série transformée était de celles que l'on sait sommer; mais, sans nous arrêter à ces exemples, passons à la série excessivement divergente,

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \text{etc.}$$

Pour obtenir les différences du premier terme, on formera la table suivante.

(*) Ce n'est là qu'une des limites dont cette série est susceptible (*voyez* la note de la page 160).

Termes.	Differ. 1res.	Differ. 2es.	Differ. 3es.
1			
2	1		
6	4	3	
24	18	14	11
120	96	78	64
720	600	504	426
5040	4320	3720	3216
40320	35280	30960	27240
362880	322560	287280	256320
3628800	3265920	2943360	2656080
etc.			

On aura, d'après ce tableau,

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\frac{2119}{128}-\frac{16687}{256}$$
$$+\frac{148329}{512}-\frac{1468457}{1024}+\frac{16019531}{2048}-\frac{190899411}{4096}+\text{etc.},$$

série un peu moins divergente que la proposée. Réunissons les deux premiers termes, et représentons le reste par S'; nous aurons

$$S=\frac{1}{4}+S' \quad \text{et} \quad S'=\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\text{etc.};$$

et en transformant la série S', comme la proposée, nous en diminuerons la divergence, car nous trouverons

$$S'=\frac{3}{2^4}-\frac{5}{2^6}+\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\frac{615}{2^{12}}-\frac{4401}{2^{14}}+\frac{36585}{2^{16}}$$
$$-\frac{342207}{2^{18}}+\frac{3565323}{2^{20}}-\frac{40866525}{2^{22}}+\text{etc.}$$

Les deux premiers termes de cette série, réduits à un seul, donnent $S'=\frac{7}{2^6}+S''$, en désignant par S'' l'assemblage de tous les autres; et transformant encore la série S'', il viendra

$$S''=\frac{21}{2^9}-\frac{15}{2^{12}}+\frac{159}{2^{15}}-\frac{429}{2^{18}}+\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26283}{2^{24}}+\frac{338835}{2^{27}}$$
$$-\frac{2771097}{2^{30}}+\text{etc.}$$

Réunissant dans cette dernière les quatre premiers termes, et désignant le reste par S''', nous aurons

$$S''=\frac{153}{2^{12}}+\frac{843}{2^{18}}+S''', \qquad S'''=\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26283}{2^{24}}+\text{etc.}$$

Si l'on s'arrête après les quatre premiers termes de S''', on aura

$$S''' = \frac{15645}{2^{14}} - \frac{60417}{2^{20}},\quad \text{d'où l'on conclura}\quad S = 0{,}40082038,$$

résultat qui n'est encore exact que dans les deux premiers chiffres décimaux, à cause de l'extrême divergence de la série proposée. Nous donnerons dans la suite un moyen plus expéditif pour obtenir la valeur approchée de S, qui est $0{,}4036526377$, lorsqu'on se borne à dix décimales.

1125. La transformation qui nous occupe étant appliquée aux séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.},$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.},$$

dont la première exprime le logarithme népérien de 2, et la seconde la longueur de la huitième partie de la circonférence du cercle (*Int.* 29 et 43), conduit à des résultats fort élégans.

En prenant la différence des termes de la première, on trouve

$$\begin{array}{llllll}
\text{diff. 1}^{\text{res}}, & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2.3}, & -\frac{1}{3.4}, & -\frac{1}{4.5}, & -\frac{1}{5.6}, & \text{etc.},\\
\text{diff. 2}^{\text{es}}, & \frac{1}{3}, & +\frac{2}{2.3.4}, & +\frac{2}{3.4.5}, & +\frac{2}{4.5.6}, & \text{etc.},\\
\text{diff. 3}^{\text{es}}, & & -\frac{1}{4}, & -\frac{2.3}{2.3.4.5}, & -\frac{2.3}{3.4.5.6}, & \text{etc.},\\
\text{diff. 4}^{\text{es}}, & & & +\frac{1}{5}, & +\frac{2.3.4}{2.3.4.5.6}, & \text{etc.},\\
\text{etc.}, & & & & &
\end{array}$$

et l'on en conclut

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \text{etc.}$$

On obtient pour la seconde série,

$$\begin{array}{lllll}
\text{diff. 1}^{\text{res}}, & -\frac{2}{1.3}, & -\frac{2}{3.5}, & -\frac{2}{5.7}, -\frac{2}{7.9}, & \text{etc.},\\
\text{diff. 2}^{\text{es}}, & & +\frac{2.4}{1.3.5}, & +\frac{2.4}{3.5.7}, +\frac{2.4}{5.7.9}, & \text{etc.},\\
\text{diff. 3}^{\text{es}}, & & & -\frac{2.4.6}{1.3.5.7}, -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}, & \text{etc.},
\end{array}$$

ce qui donne

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2}+\frac{1.2}{3.5.2}+\frac{1.2.3}{3.5.7.2}+\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9.2}+\text{etc.},$$

ou

$$2S=1+\frac{1}{3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}+\text{etc.}$$

La même méthode donne facilement la limite de la série

$$l2-l3+l4-l5+l6-l7+l8-l9+\text{etc.},$$

parce que les différences des logarithmes consécutifs vont en décroissant; mais pour abréger l'opération, il faut former immédiatement la valeur du résultat des huit premiers termes de cette série, valeur qu'on trouve égale à $-0{,}3911005$. Nous supprimerons le détail du reste du calcul, qui n'offre aucune difficulté, et nous dirons seulement qu'Euler a trouvé pour résultat $0{,}4891606$; la différence de ce nombre avec le précédent est $0{,}0980601$, et, comme logarithme, répond au nombre $1{,}253315$: telle est la limite de la série proposée.

1126. Les théorèmes des n°s 930, 940, 963, 966 et 968, se déduisent, avec la plus grande facilité, de la théorie des fonctions génératrices. Développemens des différences, des différentielles et des intégrales.

Il est visible que

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m=u\left\{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^n-1\right\}^m;$$

on tire de là

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m=u\left\{\frac{n}{1}\left(\frac{1}{t}-1\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\text{etc.}\right\}^m;$$

les coefficiens de t^x, dans le développement des termes

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right),\quad u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2,\quad u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3,\quad \text{etc.},$$

fournis par le second membre, seront respectivement

$$\Delta y_x,\quad \Delta^2 y_x,\quad \Delta^3 y_x,\quad \text{etc.},$$

et par conséquent on obtiendra le coefficient de t^x dans le développement de ce membre, en développant la quantité $\{(1+\Delta y_x)^n-1\}^m$, pourvu qu'on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de Δy_x (1112).

Mais d'un autre côté, le coefficient de t^x, dans le développement de $\frac{u}{t^n} - u$, est égal à $y_{x+n} - y_x$; désignant cette nouvelle espèce de différence par la caractéristique $\Delta' y_x$, les coefficiens de t^x, dans le développement des fonctions

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right), \quad u\left(\frac{1}{t^n}-1\right), \quad u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^3, \quad \text{etc.},$$

seront respectivement

$$\Delta' y_x, \quad \Delta'^2 y_x, \quad \Delta'^3 y_x, \quad \text{etc.};$$

et nous conclurons de là que

$$\Delta'^m y_x = \{(1 + \Delta y_x)^n - 1\}^m \quad (1);$$

cette formule rentre dans celle du n° 940, lorsqu'on fait dans celle-ci $h = 1$, et comprend par conséquent celle du n° 930, pour la même valeur de h.

Si la caractéristique Σ' représente l'intégrale relative aux différences marquées par Δ', dans lesquelles x varie de la quantité n, les considérations du n° 1113, appliquées à ce cas, feront voir que $\Sigma'^m y_x$ est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^{-m}$, abstraction faite des constantes arbitraires introduites par l'intégration; et comme on a

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^{-m} = u\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n - 1\right\}^{-m},$$

on en conclura, de même que ci-dessus,

$$\Sigma'^m y_x = \{(1 + \Delta y_x)^n - 1\}^{-m} \quad (2);$$

mais il faudra observer de changer les puissances négatives de Δy_x, en termes de la forme Σy_x, $\Sigma^2 y_x$, etc., parce que le coefficient de t^x, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-r}$, est $\Sigma^r y_x$ (1113). Avec cette attention, l'équation que nous venons d'obtenir comprend celles des n°s 963, 966 et 968.

Si l'on change x en $\frac{x'}{k}$, la quantité x' variera de k, lorsque x variera de l'unité, et nk sera la variation de x', relativement à la caractéristique Δ', c'est-à-dire que x' deviendra $x' + k$ dans $\Delta y_{x'}$, et $x' + nk$

dans $\Delta' y_{x'}$; il est visible que les équations (1) et (2) subsisteront encore dans cette hypothèse : nous pouvons donc les regarder comme ayant lieu lorsque x devient $x+k$, par rapport à la caractéristique Δ, pourvu que nous supposions qu'il se change en $x+nk$, par rapport à la caractéristique Δ'. Si nous concevons maintenant que k représente une quantité infiniment petite, ou l'accroissement $\mathrm{d}x$, et que n soit infiniment grand, nous pourrons écrire $n\mathrm{d}x=\alpha$, α désignant une quantité finie, et changer Δy_x en $\mathrm{d}y_x$; mais les équations (1) et (2) devenant alors

$$\Delta'^m y_x = \{(1+\mathrm{d}y_x)^n - 1\}^m,$$
$$\Sigma'^m y_x = \frac{1}{\{(1+\mathrm{d}y_x)^n - 1\}^m},$$

doivent être ramenées à l'homogénéité, conformément aux lois du Calcul différentiel. Pour y parvenir, il suffit de remarquer que

$$(1+\mathrm{d}y)^n = e^{n\,\mathrm{l}(1+\mathrm{d}y)},$$

en supprimant, pour plus de simplicité, l'indice de y. Développant ensuite l'exposant de e, on arrive à l'équation

$$n\mathrm{l}(1+\mathrm{d}y)^n = \frac{\alpha}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{1} - \frac{(\mathrm{d}y)^2}{2} + \text{etc.}\right),$$

dont le second membre se réduit à son premier terme, lorsque $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont infiniment petits : ainsi, dans l'hypothèse présente,

$$(1+\mathrm{d}y)^n = e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Par le moyen de cette valeur, on a

$$\Delta'^m y = \left(e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^m \qquad (3),$$
$$\Sigma'^m y = \frac{1}{\left(e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} - 1\right)^m} \qquad (4),$$

en observant de transporter à la caractéristique d les exposans de $\mathrm{d}y$, et de changer les puissances négatives en intégrales. Ces équations sont les mêmes que celles du n° 968.

Considérons l'accroissement n comme infiniment petit, ou comme $\mathrm{d}x$, $\Delta'^m y_x$ se changera en $\mathrm{d}^m y$, $\Sigma'^m y_x$ en $\frac{1}{\mathrm{d}x^m}\int^m y\,\mathrm{d}x^m$, et $(1+\Delta y_x)^n$ en $(1+\Delta y)^{\mathrm{d}x} = e^{\mathrm{d}x\,\mathrm{l}(1+\Delta y)}$, en écrivant $\mathrm{d}x$ pour n. Le développement de cette expression est $1+\mathrm{d}x\,\mathrm{l}(1+\Delta y)+$ etc.; substituant dans les équations (1) et (2), elles donnent

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \{l(1+\Delta y)\}^n \qquad (5),$$

$$\int^n y\, dx^n = \frac{1}{\{l(1+\Delta y)\}^n} \qquad (6),$$

équations semblables à celles des nos 937 et 967.

La route qui vient de nous conduire à ces formules a l'avantage de nous découvrir la cause de l'analogie des puissances avec les différences et les intégrales, puisqu'elle nous montre que les fonctions génératrices des différences de y_x, sont les produits de la fonction u par les puissances positives de la quantité $\frac{1}{t}-1$, tandis que celles des intégrales sont les produits de u par les puissances négatives de la même quantité.

1127. M. Laplace a obtenu, ainsi qu'il suit, pour les séries de la forme,

$$y_0 + y_1 at + y_2 a^2 t^2 \ldots\ldots + y_x a^x t^x + \text{etc.},$$

des formules analogues à celles du numéro précédent. En nommant u la somme de cette suite, ou la fonction génératrice de $y_x a^x$, on a l'équation identique

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m = u\left\{a^n\left(1+\frac{1}{at}-1\right)^n-1\right\}^m;$$

et d'après le numéro précédent, le coefficient de t^x, dans la fonction $u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m$, sera égal à $\Delta'^m . a^x y_x$, en supposant que x varie de la quantité n. Mais le coefficient de la puissance x de t, dans le développement de $u\left(\frac{1}{at}-1\right)^r$, est $a^x \Delta^r y_x$, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, en observant que le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{at}-1\right)$, ou $\frac{u}{at}-u$, est $\frac{a^{x+1}y_{x+1}}{a} - a^x y_x = a^x(y_{x+1}-y_x) = a^x \Delta y_x$, et continuant ainsi de proche en proche. Si donc on développe suivant les puissances de $\frac{1}{at}-1$, le second membre de l'équation identique posée plus haut, on pourra, dans le passage des fonctions génératrices aux coefficiens, remplacer les puissances de $\frac{1}{at}-1$ par celles de Δy_x, multipliées par le facteur commun a^x, et transporter, après le développement, les exposans des puissances de Δy_x à la caractéristique Δ. Avec cette attention, on aura

l'équation

$$\Delta'^m . a^x y_x = a^x \{a^n(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m \qquad (7);$$

puis en écrivant $-m$, au lieu de m, on aura encore, comme dans le numéro précédent,

$$\Sigma'^m . a^x y_x = \frac{a^x}{\{a^n(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m} \qquad (8).$$

Si l'on substitue rx' à x, et qu'on désigne par y' ce que devient alors y, la différence de x' sera $\frac{1}{r}$: en supposant r infini, cette différence se changera en dx'; on aura $\Delta y_x = dy'$; on fera ensuite $a^r = p$, pour obtenir $a^x = p^{x'}$ et $a^x y_x = p^{x'} y'$. Maintenant, si l'on prend n infiniment grand, et qu'on pose $\frac{n}{r} = \alpha$, la quantité α pourra être finie, et exprimer le changement qu'éprouve x', lorsque x devient $x+n$, d'où il résulte que $\Delta'^m . p^{x'} y'$, $\Sigma'^m . p^{x'} y'$, désignent pour l'ordre m la différence et l'intégrale de la fonction $p^{x'} y'$, lorsque x' se change en $x'+\alpha$. Remplaçant, dans les équations (7) et (8), Δy_x par dy', il viendra

$$\Delta'^m . p^{x'} y' = p^{x'} \{p^\alpha (1+dy')^n - 1\}^m,$$

$$\Sigma'^m . p^{x'} y' = \frac{p^{x'}}{\{p^\alpha (1+dy')^n - 1\}^m};$$

et ramenant la quantité $(1+dy')^n$ à l'homogénéité, comme dans le numéro précédent, on aura $(1+dy')^n = e^{\alpha \frac{dy'}{dx'}}$, d'où il suit

$$\Delta'^m . p^{x'} y' = p^{x'} \left(p^\alpha e^{\alpha \frac{dy'}{dx'}} - 1\right)^m \qquad (9),$$

$$\Sigma'^m . p^{x'} y' = \frac{p^{x'}}{\left(p^\alpha e^{\alpha \frac{dy'}{dx'}} - 1\right)^m} \qquad (10).$$

Si, dans les équations (7) et (8), l'on suppose n infiniment petit, c'est-à-dire qu'on y substitue dx, $\Delta'^m . a^x y_x$ se changera en $d^m . a^x y_x$, et $\Sigma'^m . a^x y_x$ en $\frac{1}{dx^m} \int^m a^x y_x dx^m$; et puisque

$$a^n (1+\Delta y_x)^n = 1 + dx \{ \mathrm{l}\, a(1+\Delta y_x) \} \ (1126),$$

on en conclura

$$\frac{d^m . a^x y_x}{dx^m} = a^x \{ \mathrm{l}\, a(1+\Delta y_x) \}^m \qquad (11),$$

$$\int^m . a^x y_x dx^m = \frac{a^x}{\{ \mathrm{l}\, a(1+\Delta y_x) \}^m} \qquad (12).$$

Telles sont les formules que nous avons annoncées dans le n° 969, où nous avons donné, d'après Euler, un cas particulier de celle qui est marquée (10). Les théorèmes désignés par (7), (8), (9), (10), (11) et (12), appartiennent à M. Laplace, qui a considérablement étendu cette matière, dans la première partie de sa *Théorie analytique des Probabilités.*

1128. Aux formules rapportées précédemment, il en a joint de nouvelles, qu'il a obtenues en considérant les produits de plusieurs fonctions génératrices, ainsi qu'il suit.

Soit u fonction de t, et y_x coefficient de t^x,
u' de t', y'_x de t'^x,
u'' de t'', y''_x de t''^x,
etc.;

on aura $y_x y'_x y''_x$ pour le coefficient de $t^x t'^x t''^x$ etc., dans le développement de $uu'u''$ etc.; le dernier produit sera donc la fonction génératrice de $y_x y'_x y''_x$ etc.; et par conséquent $\frac{uu'u'' \text{ etc.}}{tt't'' \text{ etc.}}$ celle de...... $y_{x+1} y'_{x+1} y''_{x+1}$ etc.; d'où il résulte que

$$\frac{uu'u'' \text{ etc.}}{tt't'' \text{ etc.}} - uu'u'' \text{ etc.}, \quad \text{ou} \quad uu'u'' \text{ etc. } \left\{\frac{1}{tt't'' \text{ etc.}} - 1\right\}$$

est la fonction génératrice de

$$y_{x+1} y'_{x+1} y''_{x+1} \text{ etc.} - y_x y'_x y''_x \text{ etc.} = \Delta . y_x y'_x y''_x \text{ etc.},$$

et que

$$uu'u'' \text{ etc. } \left\{\frac{1}{tt't'' \text{etc.}} - 1\right\}^n \quad \text{est celle de} \quad \Delta^n . y_x y'_x y''_x \text{ etc.}$$

Maintenant, si l'on désigne par z la fonction génératrice de...... $\Sigma^n . y_x y'_x y''_x$ etc., celle du produit $y_x y'_x y''_x$ etc., égal à $\Delta^n \Sigma^n . y_x y'_x y''_x$ etc., sera, d'après ce qui précède,

$$z\left\{\frac{1}{tt't'' \text{etc.}} - 1\right\}^n;$$

on pourra donc poser

$$uu'u'' \text{ etc.} = z\left\{\frac{1}{tt't'' \text{etc.}} - 1\right\}^n, \text{ d'où } z = uu'u'' \text{ etc. } \left\{\frac{1}{tt't'' \text{etc.}} - 1\right\}^{-n}.$$

Telle est la fonction génératrice de $\Sigma^n . y_x y'_x y''_x$ etc., qui ne diffère encore de celle de $\Delta^n . y_x y'_x y''_x$ etc. que par le signe de l'exposant n, ce qui est tout-à-fait semblable à ce qu'on a vu dans le n° 1113. Ces deux remarques mènent à des formules très-élégantes.

1129. En ne considérant d'abord que les deux variables y_x et y'_x, la fonction génératrice $uu'\left(\frac{1}{tt'}-1\right)^n$ peut se mettre sous la forme

$$uu'\left\{\left(\frac{1}{t}-1\right)+\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t'}-1\right)\right\}^n,$$

et par son développement, donne l'équation identique

$$uu'\left(\frac{1}{tt'}-1\right)^n = uu'\left\{\left(\frac{1}{t}-1\right)^n+\frac{n}{1}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'}-1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2+\text{etc.}\right\},$$

où l'on voit que les produits

$$uu'\left(\frac{1}{t}-1\right)^n = u'.u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n,$$
$$uu'\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'}-1\right) = u'\left(\frac{1}{t'}-1\right).\frac{u}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1},$$
$$uu'\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2 = u'\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2.\frac{u}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2},$$

etc.,

sont, d'après le numéro précédent, les fonctions génératrices des produits

$$y'_x\Delta^n y_x,\quad \Delta y'_x\Delta^{n-1}y_{x+1},\quad \Delta^2 y'_x\Delta^{n-2}y_{x+2},\quad \text{etc.}$$

Si donc, dans l'équation identique posée ci-dessus, on passe des fonctions génératrices aux coefficiens correspondans, on aura

$$\Delta^n.y_x y'_x = y'_x\Delta^n y_x + \frac{n}{1}\Delta y'_x\Delta^{n-1}y_{x+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y'_x\Delta^{n-2}y_{x+2} + \text{etc.};$$

et si l'on change n en $-n$, il viendra

$$\Sigma^n.y_x y'_x = y'_x\Sigma^n y_x - \frac{n}{1}\Delta y'_x\Sigma^{n+1}y_{x+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 y'_x\Sigma^{n+2}y_{x+2} - \text{etc.},$$

formules qui rentrent dans celles des n°s 962 et 961.

1130. La formule indiquée dans le n° 920, n'est qu'une conséquence très-simple de la théorie précédente ; car en passant des fonctions génératrices à leurs coefficiens, l'équation identique

$$uu'u''\text{ etc.}\left\{\frac{1}{tt't''\text{ etc.}}-1\right\}^n =$$
$$uu'u''\text{ etc.}\left\{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\text{ etc.}-1\right\}^n,$$

donne

$$\Delta^n . y_x y'_x y''_x \text{ etc.} = \{(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'') \text{ etc.} - 1\}^n y_x y'_x y''_x ;$$

pourvu que dans chaque terme du développement du second membre de cette équation on applique les caractéristiques Δ aux variables marquées du même nombre d'accens, et qu'on multiplie ce terme par le produit des variables dont il ne renferme point la caractéristique. Ainsi, dans le cas de trois variables y_x, y'_x, y''_x, il faudra écrire

$$y'_x y''_x \Delta' y_x \text{ pour } \Delta', \quad y''_x \Delta' y_x \Delta'' y'_x \text{ pour } \Delta'\Delta'', \text{ etc.}$$

Le changement de n en $-n$, avec les modifications convenables dans les caractéristiques, donnera l'expression de $\Sigma^n . y_x y'_x y''_x$ etc.

1131. Lorsqu'il s'agit des différentielles, si on les considère comme des différences infiniment petites, et qu'en conséquence on en néglige les ordres supérieurs par rapport aux ordres inférieurs, il faudra, dans le passage de la caractéristique Δ à la caractéristique d, changer l'expression

$$(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'') \text{ etc.} - 1 \quad \text{en} \quad \mathrm{d} + \mathrm{d}' + \mathrm{d}'' + \text{etc.},$$

et l'on aura

$$\mathrm{d}^n . y_x y'_x y''_x \text{ etc.} = \{\mathrm{d} + \mathrm{d}' + \mathrm{d}'' + \text{etc.}\}^n y_x y'_x y''_x \text{ etc.},$$

sous les conditions énoncées dans le numéro précédent.

Pour deux variables, il vient

$$\mathrm{d}^n . y_x y'_x = y'_x \mathrm{d}^n y_x + \frac{n}{1} \mathrm{d}y'_x \mathrm{d}^{n-1} y_x + \frac{n(n-1)}{1.2} \mathrm{d}^2 y'_x \mathrm{d}^{n-2} y_x + \text{etc.},$$

formule semblable à celle du n° 91; et mettant $-n$ à la place de n, on obtient l'expression

$$\int^n y_x y'_x = y'_x \int^n y_x - \frac{n}{1} \mathrm{d}y'_x \int^{n+1} y_x + \frac{n(n+1)}{1.2} \mathrm{d}^2 y'_x \int^{n+2} y_x - \text{etc.},$$

qui, mise sous la forme

$$\int^n y_x y'_x \mathrm{d}x^n = y'_x \int^n y_x \mathrm{d}x^n - \frac{n}{1} \frac{\mathrm{d}y'_x}{\mathrm{d}x} \int^{n+1} y_x \mathrm{d}x^{n+1}$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{\mathrm{d}^2 y'_x}{\mathrm{d}x^2} \int^{n+2} y_x \mathrm{d}x^{n+2} - \text{etc.},$$

comprend comme cas particulier le développement de $\int^n X dx^n$, donné dans le n° 485.

1132. En observant que

$$uu'u'' \text{ etc. } \left\{\frac{1}{t^h t'^{h'} t''^{h''} \text{ etc.}} - 1\right\}^n$$
$$= uu'u'' \text{ etc. } \left\{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^h\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{h'}\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^{h''} \text{etc.} - 1\right\}^n,$$

indiquant par $'\Delta$ la différence prise en faisant varier x de h dans y_x, de h' dans y'_x, de h'' dans y''_x, etc., et passant des fonctions génératrices aux coefficiens, on aura

$$'\Delta^n . y_x y'_x y''_x \text{ etc.} = \{(1+\Delta)^h (1+\Delta')^{h'} (1+\Delta'')^{h''} \text{ etc.} - 1\}^n;$$

d'où, par le changement de n en $-n$, on conclura l'expression de $'\Sigma^n . y_x y'_x y''_x$ etc.

1133. Si l'on réduit à une seule les différences h, h', h'', etc., et qu'on fasse $x = \frac{x'}{dx'}$, $h = \frac{\alpha}{dx'}$, x' et α étant des quantités finies, x et h deviendront infinies; les caractéristiques Δ, Δ', Δ'', etc., qui se rapportent à des différences correspondantes à l'accroissement 1 pour x, indiqueront des différences infiniment petites, et devront par conséquent être remplacées par la caractéristique d. Alors comme

$$(1 + dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} = e^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}}, \text{ (1126)}$$

M. Laplace change l'expression précédente de $'\Delta^n . y_x y'_x y''_x$ etc. en

$$'\Delta^n . y_{x'} y'_{x'} y''_{x'} \text{ etc.} = \left\{e^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'} + \alpha \frac{dy'_{x'}}{dx'} + \alpha \frac{dy''_{x'}}{dx'} + \text{etc.}} - 1\right\}^n,$$

d'où l'on déduirait l'expression de $'\Sigma^n . y_{x'} y'_{x'} y''_{x'}$ etc., en rendant négatif l'exposant n. L'une et l'autre de ces expressions supposent que l'accroissement de x' est égal à α.

1134. Soit u une fonction de deux variables t et t', dont le développement ait la forme — *Des fonctions de deux variables.*

$$\begin{array}{l} y_{0,0} + y_{1,0}t + y_{2,0}t^2 + y_{3,0}t^3 \ldots\ldots + y_{n,0}\, t^n \quad + \text{etc.} \\ \quad + y_{0,1}t' + y_{1,1}tt' + y_{2,1}t^2t' \ldots\ldots + y_{n-1,1}t^{n-1}t' + \text{etc.} \\ \quad\quad + y_{0,2}t'^2 + y_{1,2}tt'^2 \ldots\ldots + y_{n-2,2}t^{n-2}t'^2 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + y_{0,3}t'^3 \ldots\ldots + y_{n-3,3}t^{n-3}t'^3 + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad + y_{0,n}t'^n \quad + \text{etc.,} \end{array}$$

$y_{x,x'}$ désignant le coefficient de $t^x t'^{x'}$, aura u pour fonction génératrice. Si l'on représente par $\Delta_x y_{x,x'}$ la différence de la fonction $y_{x,x'}$, prise seulement par rapport à la variable x, la fonction génératrice de cette différence sera $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$; celle de $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ sera de même $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$. Il est facile de conclure de là que la fonction génératrice de $\Delta_x \Delta_{x'} y_{x,x'}$, ou de $\Delta^{1+1}_{x,x'} y_{x,x'}$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t'}-1\right)$, et qu'en général celle de... $\Delta^{n+n'}_{x,x'} y_{x,x'}$ sera $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}$.

Dans le cas actuel, l'expression $\nabla y_{x,x'}$ sera le symbole d'une quantité de la forme

$$\begin{aligned} A y_{x,x'} &+ B y_{x+1,x'} + C y_{x+2,x'} + \text{etc.} \\ &+ B' y_{x,x'+1} + C' y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ &\qquad + C'' y_{x,x'+2} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

l'expression $\nabla^2 y_{x,x'}$, celui d'une quantité composée en $\nabla y_{x,x'}$, comme la précédente l'est en $y_{x,x'}$, et ainsi de suite; la fonction génératrice de l'expression générale $\nabla^m y_{x,x'}$ sera visiblement de la forme

$$u\left\{\begin{matrix} A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{etc.} \\ + \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{tt'} + \text{etc.} \\ + \frac{C''}{t'^2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}^m,$$

en sorte que

$$ut^r t'^{r'}\left(\frac{1}{t}-1\right)^n\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}\left\{\begin{matrix} A + \frac{B}{t} + \text{etc.} \\ + \frac{B'}{t'} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}^m$$

sera la fonction génératrice de $\Delta^{n+n'}_{x,x'} \nabla^m y_{x-r,x'-r'}$.

2\. Cela posé, lorsque s désignera une fonction des quantités $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t'}$, et que son développement, suivant les puissances de ces quantités, aura un terme général de la forme $\frac{K}{t^p t'^{p'}}$, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $\frac{Ku}{t^p t'^{p'}}$, sera $K y_{x+p,x'+p'}$; et il s'ensuit que le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans us^m, sera... $\nabla^m y_{x,x'}$, si s a la forme convenable. On voit par là que $\nabla^m y_{x,x'}$ s'obtiendra en écrivant dans s^m, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$, et en

développant le résultat suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, puis changeant les produits $K(y_x)^r(y_{x'})^{r'}$ en $Ky_{x+r,x'+r'}$; bien entendu qu'un terme tont constant K, équivalant à $K(y_x)^0(y_{x'})^0$, doit être remplacé par $Ky_{x,x'}$.

Pour introduire dans le calcul les différences de $y_{x,x'}$, il faut développer s^m suivant les puissances des quantités $\frac{1}{t}-1$, $\frac{1}{t'}-1$; un terme quelconque du résultat étant désigné par $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ et multiplié par u, sera $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, et donnera lieu à un développement dans lequel le coefficient de $t^x t'^{x'}$ sera exprimé par $K\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$. Il suit de là que la quantité $\nabla^m y_{x,x'}$ se formera, dans ce cas, en substituant $\Delta_x y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t}-1$, et $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}-1$ dans s, et développant alors s^m suivant les puissances de $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, puis en transportant à la caractéristique Δ les exposans de ces puissances, et mettant ainsi $\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, à la place de $(\Delta_x y_{x,x'})^r(\Delta_{x'} y_{x,x'})^{r'}$.

Si l'on désigne par $\Sigma^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$ l'intégrale du coefficient $y_{x,x'}$, prise un nombre r de fois par rapport à x seul, et un nombre r' de fois par rapport à x' seul, et que l'on représente par z la fonction génératrice de cette intégrale, celle de sa différence $y_{x,x'}$ sera, d'après ce qu'on vient de voir, $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$; et l'on aura par conséquent

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u, \quad \text{d'où} \quad z=\frac{u}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}}:$$

connaissant ainsi la fonction génératrice de $\Sigma^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, on aura cette intégrale en passant des fonctions génératrices aux coefficiens. Nous observerons qu'à cause des quantités arbitraires qu'elle doit comporter, il faut écrire

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t^3}\ldots+\frac{q}{t^r}$$
$$+\frac{a'}{t'}+\frac{b'}{t'^2}+\frac{c'}{t'^3}\ldots+\frac{q'}{t'^{r'}},$$

a, b, c, ...q, étant des fonctions arbitraires de t', et a', b', c', ...q',

des fonctions arbitraires de t; d'où l'on conclut

$$z = \frac{u t^{x} t'^{x'} + a t^{x-1} t'^{x'} + b t^{x-2} t'^{x'} \ldots\ldots + q t'^{x'} + a' t^{x} t'^{x'-1} \ldots\ldots + q' t^{x}}{(1-t)^{x}(1-t')^{x'}}.$$

1135. Appliquons maintenant ces principes à l'interpolation des tables à double entrée, recherche qui consiste à déterminer l'expression de $y_{x+n, x'+n'}$, ou, ce qui revient au même, le coefficient de $t^{x} t'^{x'}$, dans le développement de la fonction $\frac{u}{t^{n} t'^{n'}}$. Il est visible que l'on a l'équation identique

$$\frac{u}{t^{n} t'^{n'}} = u \left(1 + \frac{1-t}{t}\right)^{n} \left(1 + \frac{1-t'}{t'}\right)^{n'} =$$

$$u \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1-t}{t}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} \\ \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{3} + \text{etc.} \\ + \frac{n'}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right) + \frac{n'}{1}\frac{n}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right) \\ \qquad + \frac{n'}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} + \text{etc.} \\ \qquad + \frac{n'(n'-1)}{1.2}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2} \\ \qquad + \frac{n'(n'-1)}{1.2}\frac{n}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2}\left(\frac{1-t}{t}\right) + \text{etc.} \\ \qquad + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

et dans ce développement, le coefficient numérique de............. $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ sera

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r} \cdot \frac{n'(n'-1)(n'-2)\ldots\ldots(n'-r'+1)}{1.2.3\ldots\ldots r'},$$

ou $\overset{-r}{[0]}\overset{r}{[n]}\overset{-r'}{[0]}\overset{r'}{[n']}$. Cela posé, le coefficient de $t^{x} t'^{x'}$, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, étant $\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, le terme général de l'expression de $y_{x+n, x'+n'}$ sera

$$\overset{-r}{[0]}\overset{r}{[n]}\overset{-r'}{[0]}\overset{r'}{[n']}\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'},$$

formule dont on tire la série

$$
\begin{aligned}
y_{x+n,x'+n'} = y_{x,x'} &+ \tfrac{n}{1}\,\Delta_x y_{x,x'} + \tfrac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta^2_x y_{x,x'} + \text{etc.} \\
&+ \tfrac{n'}{1}\,\Delta_{x'} y_{x,x'} + \tfrac{n}{1}\,\tfrac{n'}{1}\,\Delta^{1+1}_{x,x'} y_{x,x'} + \text{etc.} \\
&+ \tfrac{n'(n'-1)}{1.2}\,\Delta^2_{x'} y_{x,x'} + \text{etc.} \\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}
$$

que nous avons déjà obtenue, n° 914, par d'autres considérations. On peut lui donner la forme

$$y_{x+n,x'+n'} = (1 + \Delta_x y_{x,x'})^n (1 + \Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'},$$

en observant de transporter, comme il a été dit dans le numéro précédent, à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, et d'écrire $y_{x,x'}$, au lieu du premier terme 1, que l'on doit regarder comme équivalant à $(\Delta_x y_{x,x'})^0 (\Delta_{x'} y_{x,x'})^0$.

1136. Proposons-nous maintenant d'ordonner le développement de $y_{x+n,x'}$, suivant les quantités $\nabla y_{x,x'}$, $\nabla^2 y_{x,x'}$, etc., et prenons, en conséquence,

$$
\begin{aligned}
z = A + \tfrac{B}{t} + \tfrac{C}{t^2} + \tfrac{D}{t^3} \ldots\ldots &+ \tfrac{p}{t^{n-1}} + \tfrac{q}{t^n} \\
+ \tfrac{B'}{t'} + \tfrac{C'}{t't} + \tfrac{D'}{t't^2} &+ \text{etc.} \\
+ \tfrac{C''}{t'^2} + \tfrac{D''}{t'^2 t} &+ \text{etc.} \\
+ \tfrac{D'''}{t'^3} &+ \text{etc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \tfrac{1}{t'^{n'}}.
\end{aligned}
$$

Soit fait

$$
\begin{aligned}
&A + \tfrac{B'}{t'} + \tfrac{C''}{t'^2} + \tfrac{D'''}{t'^3} \ldots\ldots + \tfrac{1}{t'^{n'}} = a, \\
&B + \tfrac{C'}{t'} + \tfrac{D''}{t'^2} + \text{etc.} = b, \\
&C + \tfrac{D'}{t'} + \text{etc.} = c, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}
$$

il viendra

$$z = a + \tfrac{b}{t} + \tfrac{c}{t^2} \ldots\ldots + \tfrac{q}{t^n},$$

équation semblable à celle que nous avons traitée dans le n° 1116, et

pour laquelle nous avons donné l'expression de $\frac{1}{t^n}$ à la page 332 ; mais dans le cas actuel, il y faut remplacer les coefficiens $a, b, c, \ldots q$, par les valeurs précédentes, ce qui changera la quantité

$$\begin{aligned} & bZ_{0,n-m+1} + bzZ_{1,n-2m+1} + \text{etc.} \\ + & cZ_{0,n-m+2} + czZ_{1,n-2m+2} + \text{etc.} \\ + & \text{etc.} \end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M + Nz + \text{etc.} + \frac{1}{t'}(M_1 + N_1 z + \text{etc.})$$
$$+ \frac{1}{t'^2}(M_2 + N_2 z + \text{etc.}) \ldots\ldots + \frac{1}{t'^n} M_n,$$

la quantité

$$\begin{aligned} & cZ_{0,n-m+1} + czZ_{1,n-2m+1} + \text{etc.} \\ + & eZ_{0,n-m+2} + ezZ_{1,n-2m+2} + \text{etc.} \\ + & \text{etc.} \end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M' + N'z + \text{etc.} + \frac{1}{t'}(M'_1 + N'_1 z + \text{etc.})$$
$$+ \frac{1}{t'^2}(M'_2 + N'_2 z + \text{etc.}) \ldots\ldots + \frac{1}{t'^{n-1}} M'_{n-1},$$

la quantité

$$\begin{aligned} & eZ_{0,n-m+1} + \text{etc.} \\ + & \text{etc.} \end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M'' + N''z + \text{etc.} + \frac{1}{t'}(M''_1 + N''_1 z + \text{etc.})$$
$$+ \frac{1}{t'^2}(M''_2 + N''_2 z + \text{etc.}) \ldots\ldots + \frac{1}{t'^{n-2}} M''_{n-2},$$

et ainsi de suite. Il est facile de voir que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, dans ces expressions, ne doit point surpasser l'exposant n, lorsque cet exposant est entier. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^n} = M + Nz + \text{etc.} & + \frac{1}{t'}(M_1 + N_1 z + \text{etc.}) \\ & + \frac{1}{t'^2}(M_2 + N_2 z + \text{etc.}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{t'^n} M_n \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{t}\left\{\begin{array}{l} M' + N'z + \text{etc.} \\ +\frac{1}{t'}(M'_1 + N'_1 z + \text{etc.}) \\ +\frac{1}{t'^2}(M'_2 + N'_2 z + \text{etc.}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\frac{1}{t'^{n-1}} M'_{n-1} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{t^2}\left\{\begin{array}{l} M'' + N''z + \text{etc.} \\ +\frac{1}{t'}(M''_1 + N''_1 z + \text{etc.}) \\ +\frac{1}{t'^2}(M''_2 + N''_2 z + \text{etc.}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\frac{1}{t'^{n-2}} M''_{n-2} \end{array}\right\}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{1}{t^{m-1}}\left\{\begin{array}{l} M^{(m-1)} + N^{(m-1)}z + \text{etc.} \\ +\frac{1}{t'}(M_1^{(m-1)} + N_1^{(m-1)} z + \text{etc.}) \\ +\frac{1}{t'^2}(M_2^{(m-1)} + N_2^{(m-1)} z + \text{etc.}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\frac{1}{t'^{n-m+1}} M^{(m-1)}_{n-m+1} \end{array}\right\};$$

et comme le symbole $\nabla y_{x,x'}$ désigne la quantité

$$\begin{array}{llll} Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + Cy_{x+2,x'} & + \text{etc.} \\ \quad + B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} & + \text{etc.} \\ \quad\quad + C''y_{x,x'+2} & + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}, \end{array}$$

et que le coefficient de $t^x t'^{x'}$, dans le développement de la fonction $\frac{uz'}{t^r t'^{r'}}$, est exprimé par $\nabla y_{x+r,x'+r'}$ (1134), on conclura de ce qui précède, en passant des fonctions génératrices aux coefficiens, que

$$y_{x+n,x'} = \begin{cases} M y_{x,x'} + N \nabla y_{x,x'} + \text{etc.} \\ + M_1 y_{x,x'+1} + N_1 \nabla y_{x,x'+1} + \text{etc.} \\ + M_2 y_{x,x'+2} + N_2 \nabla y_{x,x'+2} + \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M_n y_{x,x'+n} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} M' y_{x+1,x'} + N' \nabla y_{x+1,x'} + \text{etc.} \\ M'_1 y_{x+1,x'+1} + N'_1 \nabla y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M'_{n-1} y_{x+1,x'+n-1} \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \begin{cases} M^{(m-1)} y_{x+m-1,x'} + N^{(m-1)} \nabla y_{x+m-1,x'} + \text{etc.} \\ + M_1^{(m-1)} y_{x+m-1,x'+1} + N_1^{(m-1)} \nabla y_{x+m-1,x'+1} + \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M^{(m-1)}_{n-m+1} y_{x+m-1,x'+n-m+1}. \end{cases}$$

Cette suite s'arrêtera lorsque quelqu'une des quantités $\nabla y_{x,x'}$, $\nabla^2 y_{x,x'}$, etc., sera nulle.

Si l'on prend $\nabla y_{x,x'} = 0$, et que l'on fasse ensuite $x = 0$ dans l'expression précédente de $y_{x+n,x'}$, on aura

$$\begin{aligned} y_{n,x'} = {} & M y_{0,x'} + M_1 y_{0,x'+1} + M_2 y_{0,x'+2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots + M_n y_{0,x'+n} \\ & + M' y_{1,x'} + M'_1 y_{1,x'+1} + M'_2 y_{1,x'+2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots + M'_{n-1} y_{1,x'+n-1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + M^{(m-1)} y_{m-1,x'} + M_1^{(m-1)} y_{m-1,x'+1} + M_2^{(m-1)} y_{m-1,x'+2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots + M^{(m-1)}_{n-m+1} y_{m-1,x'+n-m+1}; \end{aligned}$$

cette expression s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} y_{n,x'} = {} & \Sigma M_r y_{0,x'+r} + \Sigma M'_r y_{1,x'+r} + \Sigma M''_r y_{2,x'+r} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots + \Sigma M_r^{(m-1)} y_{m-1,x'+r}, \end{aligned}$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = n + 1$, afin d'y comprendre la somme des termes depuis $r = 0$ jusqu'à $r = n$ (943); l'intégrale du second terme étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = n$, et ainsi de suite; enfin l'intégrale du dernier, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = n - m + 2$.

1137. L'expression que nous venons d'obtenir pour $y_{n,x'}$ est évidemment l'intégrale complète de l'équation

$$\begin{aligned} 0 = Ay_{0,x'} &+ By_{n+1,x'} + Cy_{n+2,x'} \ldots\ldots + Py_{n+m-1,x'} + qy_{n+m,x'} \\ &+ B'y_{n,x'+1} + C'y_{n+1,x'+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + C''y_{n,x'+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + y_{n,x'+m}; \end{aligned}$$

et la recherche de cette intégrale se trouve ainsi ramenée à celle des coefficiens M, M_1, ... M', M'_1, etc., qui sont précisément ceux des puissances de $\frac{1}{t}$ dans le développement des fonctions

$$\begin{aligned} &bZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} + \text{etc.}, \\ &cZ_{0,n-m+1} + eZ_{0,n-m+2} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ces développemens seront faciles à former, dès qu'on connaîtra ceux des quantités $Z_{0,n-m+1}$, $Z_{0,n-m+2}$, etc., ou, en général, celui de $Z_{0,r}$; mais on trouvera sans peine, par les formules du n° 1119, que

$$\begin{aligned} Z_{0,r} = &-\frac{1}{a\alpha^{r+1}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots\ldots} \\ &-\frac{1}{a\beta^{r+1}(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots\ldots} \\ &-\frac{1}{a\gamma^{r+1}(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots\ldots} \\ &-\text{etc.}; \end{aligned}$$

et comme α, β, γ, etc., sont les racines de l'équation

$$a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} \ldots\ldots + q = 0,$$

ces quantités seront, dans le cas actuel, des fonctions de $\frac{1}{t}$. Si l'on fait $\frac{1}{t} = s$, et que l'on différentie m fois de suite, par rapport à s, l'expression de $Z_{0,r}$, pour en éliminer les quantités $\frac{1}{\alpha^r}$, $\frac{1}{\beta^r}$, $\frac{1}{\gamma^r}$, etc., on parviendra nécessairement à une équation finale du premier degré, par rapport à la fonction $Z_{0,r}$ et à ses coefficiens différentiels : ces quantités y seront multipliées par des fonctions symétriques des racines α, β, γ, etc., et de leurs différences, fonctions que l'on pourra par conséquent exprimer d'une manière rationnelle, au moyen des coefficiens de l'équation $a\theta^m$ + etc. $= 0$. Faisant ensuite disparaître les dénominateurs des termes du résultat, les quantités $Z_{0,r}$, $\frac{dZ_{0,r}}{ds}$, etc., n'auront pour coefficiens que des fonctions rationnelles de s ou de $\frac{1}{t}$, c'est-à-dire

que les termes de l'équation finale seront de la forme $Ks^m \frac{d^\mu Z_{o,i}}{ds^\mu}$. Cela posé, si λ_i désigne le coefficient de s^i, dans le développement de $Z_{o,r}$, le terme $\lambda_i s^i$ deviendra $i(i-1)\ldots(i-\mu+1)\lambda_i s^{i-\mu}$, en passant dans $\frac{d^\mu Z_{o,r}}{ds^\mu}$, en sorte que $i(i-1)\ldots(i-\mu+1)K\lambda_i$ sera le coefficient de $s^{m+i-\mu}$, dans l'équation finale, et que par conséquent il faudra, pour avoir celui de s^i dans la même équation, changer i en $i-m+\mu$, et λ_i en $\lambda_{i-m+\mu}$: on aura donc

$$(i-m+\mu)(i-m+\mu-1)\ldots\ldots(i-m+1)K\lambda_{i-m+\mu},$$

pour ce coefficient, le même que celui de $\frac{1}{t^i}$. Il est visible que si, dans cette équation différentielle, on remplace les fonctions génératrices par leurs coefficiens, on la transformera en une équation aux différences entre les valeurs successives de λ_i, et dont l'intégration donnera ces valeurs. Par là, l'intégration de l'équation $\nabla y_{x,x'} = 0$ est ramenée à celle d'une équation aux différences à deux variables seulement, et à une intégrale définie.

Pour donner une idée de l'application des formules précédentes, supposons qu'on ait l'équation du premier ordre

$$Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + B'y_{x,x'+1} = 0.$$

Dans cet exemple,

$$z = A + \frac{B}{t} + \frac{B'}{t'}, \quad a = A + \frac{B'}{t'}, \quad b = B, \quad c = 0, \quad \text{etc.};$$

d'où

$$z = a + \frac{b}{t}, \quad a\theta + b = 0, \quad \theta = -\frac{b}{a} = \alpha,$$

$$Z_{o,r} = -\frac{1}{a\alpha^{r+1}} = -\frac{(A+B's)^r}{(-B)^{r+1}},$$

en écrivant s, au lieu de $\frac{1}{t'}$. Différentiant la dernière expression de $Z_{o,r}$, on trouve

$$\frac{dZ_{o,r}}{ds} = -\frac{rB'(A+B's)^{r-1}}{(-B)^{r+1}};$$

et éliminant la fonction $\frac{(A+B's)^r}{(-B)^{r+1}}$, il vient

$$\frac{dZ_{o,r}}{ds}(A+B's) - rB'Z_{o,r} = 0;$$

substituant enfin dans cette équation, à la place des fonctions géné-

ratrices, les coefficiens de $\frac{1}{t'^i}$, on obtient

$$A(i+1)\lambda_{i+1} + B'i\lambda_i - rB'\lambda_i = 0.$$

Or, la quantité $bZ_{0,0-n+1} + cZ_{0,0-n+2} +$ etc. se réduisant à son premier terme, donne seulement $M_i = B\lambda_i$, et l'on en conclut

$$y_{0,x'} = B\Sigma\lambda_r y_{0,x'+r},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=n+1$. Il faut, en intégrant l'équation d'où dépend λ_i, prendre la constante arbitraire telle qu'on ait $\lambda_0 = -\frac{A^r}{(-B)^{r+1}}$.

1138. L'équation $\nabla y_{x,x'} = 0$, ou

$$0 = \begin{cases} Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + Cy_{x+2,x'} \ldots\ldots\ldots\ldots + qy_{x+m,x'} \\ \quad + B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ \quad\quad + C''y_{x,x'+2} + \text{etc.} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + y_{x,x'+m'}, \end{cases}$$

correspond à l'équation $z=0$, ou à

$$0 = \begin{cases} A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^m} \\ \quad + \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{tt'} + \text{etc.} \\ \quad\quad + \frac{C''}{t'^2} + \text{etc.} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + \frac{1}{t'^{m'}}. \end{cases}$$

qu'on obtient en substituant dans la première, au lieu des coefficiens

$$\begin{array}{llll} y_{x,x'}, & y_{x+1,x'}, & y_{x+2,x'}, & \text{etc.,} \\ & y_{x,x'+1}, & y_{x+1,x'+1}, & \text{etc.,} \\ & & y_{x,x'+2}, & \text{etc.,} \\ & & \text{etc.,} & \end{array}$$

leurs fonctions génératrices,

$$\begin{array}{llll} u, & \frac{u}{t}, & \frac{u}{t^2}, & \text{etc.,} \\ & \frac{u}{t'}, & \frac{u}{tt'}, & \text{etc.,} \\ & & \frac{u}{t'^2}, & \\ & & \text{etc.;} & \end{array}$$

car il est facile de voir que toute équation du premier degré, qui a lieu entre les coefficiens, doit avoir également lieu entre les fonctions génératrices. L'équation $z=0$ rentre évidemment dans l'équation (1) du n° 1088, lorsqu'on change $\frac{1}{t}$ en α, $\frac{1}{t'}$ en β; et l'on doit saisir maintenant la liaison des méthodes qui nous ont conduits à l'une et à l'autre : la même correspondance existe à l'égard des fonctions d'une seule variable.

Il suit de là que l'intégration de l'équation $\nabla y_{x,x'}=0$, par la seconde méthode, revient à déterminer l'expression de $\frac{1}{t^n}$, développée suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$, au moyen de l'équation $z=0$; or, il y a aussi dans cette méthode, comme dans la première, des cas où l'expression de $\frac{1}{t^n}$ se présente d'abord sous la forme d'une suite infinie. L'équation

$$\frac{1}{tt'}-\frac{a}{t'}-\frac{b}{t}-c=0,$$

qui correspond à

$$y_{x+1,x'+1}-ay_{x,x'+1}-by_{x+1,x'}-cy_{x,x'}=0,$$

est un de ces cas, parce que la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ y est multipliée par $\frac{1}{t'}$: voici l'artifice qu'emploie M. Laplace, pour lever cette difficulté.

L'équation proposée donne immédiatement

$$\frac{1}{t}=\frac{c+\frac{a}{t'}}{\frac{1}{t'}-b},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}}=\frac{\left(c+\frac{a}{t'}\right)^x}{t'^{x'}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x}.$$

La dernière de ces expressions étant écrite ainsi

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}}=\frac{\left(\frac{1}{t'}-b+b\right)^{x'}\left\{c+ab+a\left(\frac{1}{t'}-b\right)\right\}^x}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x},$$

devient susceptible d'un développement terminé, suivant les puissances de $\frac{1}{t'} - b$; on en tire

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}} = \left\{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + \frac{x'}{1} b \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2 \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \text{etc.}\right\} \times \left\{a^x + \frac{x}{1}(c+ab)\frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2 \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \text{etc.}\right\};$$

faisant, pour abréger,

$$V = a^x,$$
$$V_1 = \frac{x'}{1} ba^x + \frac{x}{1}(c+ab)a^{x-1},$$
$$V_2 = \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2 a^x + \frac{x'x}{1.1} b(c+ab)a^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2 a^{x-2},$$
$$V_3 = \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3} b^3 a^x + \frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{x}{1} b^2(c+ab)a^{x-1} + \frac{x'}{1}\frac{x(x-1)}{1.2} b(c+ab)^2 a^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(c+ab)^3 a^{x-3},$$
etc.,

il viendra

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u\left\{\begin{array}{l} V\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'} + V_1\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1} \\ + V_2\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-2} \ldots\ldots + V_{x'} \\ + \frac{V_{x'+1}}{\frac{1}{t'}-b} + \frac{V_{x'+2}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^2} \ldots\ldots + \frac{V_{x'+x}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x} \end{array}\right\}.$$

L'équation

$$\frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0$$

donnant aussi

$$\frac{1}{\frac{1}{t'} - b} = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab},$$

on peut chasser la quantité $\frac{1}{t'} - b$, du résultat ci-dessus, et si on le

fait dans les termes affectés de $V'_{x'+1}$, $V'_{x'+2}$, etc., on obtiendra

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u \left\{ \begin{array}{l} V\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V_1\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{x'} \\ + \frac{V_{x'+1}}{c+ab}\left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V_{x'+2}}{(c+ab)^2}\left(\frac{1}{t} - a\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{V_{x'+x}}{(c+ab)^x}\left(\frac{1}{t} - a\right)^x \end{array} \right\}.$$

Passons maintenant des fonctions génératrices aux coefficiens. Il est visible que celui de $t^0 t'^0$, dans $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$, est $y_{x,x'}$; la quantité $u\left(\frac{1}{t'} - b\right)^r$, mise sous la forme $ub^r\left(\frac{1}{bt'} - 1\right)^r$, étant développée, devient

$$b^r \left\{ \frac{u}{b^r t'^r} - \frac{r}{1} \frac{u}{b^{r-1} t'^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2} \frac{u}{b^{r-2} t'^{r-2}} - \text{etc.} \right\},$$

d'où l'on conclura que le coefficient de $t^0 t'^0$, dans cette fonction, est

$$b^r \left\{ \frac{y_{0,r}}{b^r} - \frac{r}{1} \frac{y_{0,r-1}}{b^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2} \frac{y_{0,r-2}}{b^{r-2}} - \text{etc.} \right\},$$

développement qui est celui de $b^r \Delta^r_{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$, pourvu que l'on fasse $x' = 0$ après la différentiation. On se convaincrait de la même manière, que le coefficient de $t^0 t'^0$, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t} - a\right)^r$, doit être $a^r \Delta^r_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, en faisant $x = 0$ après la différentiation; et l'on aura enfin

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = {} & V b^{x'} \Delta^{x'}_{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) + V_1 b^{x'-1} \Delta^{x'-1}_{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) \\ & + V_2 b^{x'-2} \Delta^{x'-2}_{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) \ldots\ldots + V_{x'} y_{0,0} \\ & + \frac{V_{x'+1}}{c+ab} a \Delta_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) + \frac{V_{x'+2}}{(c+ab)^2} a^2 \Delta^2_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{V_{x'+x}}{(c+ab)^x} a^x \Delta^x_x\left(\frac{y_{x,0}}{a_x}\right), \end{aligned}$$

pour l'intégrale de l'équation

$$y_{x+1,x'+1} - a y_{x,x'+1} - b y_{x+1,x'} - c y_{x,x'} = 0.$$

En développant cette intégrale, on verra sans peine qu'elle exige la connaissance de la première ligne et de la première colonne de la table à double entrée qui correspond à l'équation proposée.

1139. Des considérations absolument semblables à celles du n° 1126, vont nous conduire aux formules que nous avons citées dans le n° 970.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} u = y_{0,0} &+ y_{1,0}t + y_{2,0}t^2 + y_{3,0}t^3 + \text{etc.} \\ &+ y_{0,1}t' + y_{1,1}tt' + y_{2,1}t^2t' + \text{etc.} \\ &+ y_{0,2}t'^2 + y_{1,2}tt'^2 + \text{etc.} \\ &+ y_{0,3}t'^3 + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

si $\Delta y_{x,x'}$ désigne la différence de $y_{x,x'}$, prise en faisant varier en même temps x et x', la fonction génératrice de $\Delta^n y_{x,x'}$ sera $u\left(\frac{1}{tt'}-1\right)^n$ (1134); mais il est visible que

$$\frac{1}{tt'} - 1 = \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right) - 1,$$

et que par conséquent

$$u\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n = u\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right) - 1\right\}^n;$$

le développement du second membre de cette équation pouvant être ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, et de $\frac{1}{t'} - 1$, contiendra les termes $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$, $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}$, qui sont les fonctions génératrices de $\overset{n}{\Delta}_x y_{x,x'}$, $\overset{n'}{\Delta}_{x'} y_{x,x'}$: passant donc de ces fonctions à leurs coefficiens, on aura, comme dans le n° 935,

$$\Delta^n y_{x,x'} = \{(1 + \Delta_x y_{x,x'})(1 + \Delta_{x'} y_{x,x'}) - 1\}^n,$$

en observant de transporter, dans le développement du second membre, à la caractéristique Δ les exposans de $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$.

Il suit aussi de ce qu'on a dit sur les fonctions génératrices des intégrales (1134), que l'équation

$$\Sigma^n y_{x,x'} = \frac{1}{\{(1 + \Delta_x y_{x,x'})(1 + \Delta_{x'} y_{x,x'}) - 1\}^n},$$

doit avoir lieu sous les mêmes conditions que la précédente, et en remplaçant les puissances négatives des différences par des intégrales.

Dans les formules ci-dessus, les différences des variables x et x'

sont égales à l'unité; mais il est visible que $u\left(\frac{1}{t^n t'^{n'}}-1\right)^m$ est la fonction génératrice de la différence $\Delta'^m y_{x,x'}$, prise en faisant varier x de n et x' de n'; et en vertu de l'équation identique

$$u\left(\frac{1}{t^n t'^{n'}}-1\right)^m = u\left\{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^n\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}-1\right\}^m,$$

il viendra encore, ainsi que dans les nos 941 et 970,

$$\Delta'^m y_{x,x'} = \{(1+\Delta_x y_{x,x'})^n(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'}-1\}^m,$$
$$\Sigma'^m y_{x,x'} = \frac{1}{\{(1+\Delta_x y_{x,x'})^n(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'}-1\}^m},$$

sous les mêmes conditions que ci-dessus, relativement aux exposans des différences.

Ces équations subsisteront encore, si l'on suppose que les différences de x et de x', au lieu d'être 1, relativement à $\Delta_x y_{x,x'}$ et à $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, soient k et k'; mais alors, dans $\Delta' y_{x,x'}$, les différences de x et de x' seront respectivement kn et $k'n'$. En considérant k et k' comme infiniment petits, ou comme $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x'$, tandis que n et n' seront infinis, on pourra faire $kn=\alpha$, $k'n'=\alpha'$; α et α' désignant des quantités finies; dans cette hypothèse, $\Delta_x y_{x,x'}$ et $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ deviendront les différentielles partielles de y, et se changeront par conséquent en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}\mathrm{d}x'$: on aura

$$(1+\Delta_x y_{x,x'})^n = \left\{1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right\}^n = e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}},$$
$$(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'} = \left\{1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}\mathrm{d}x'\right\}^{n'} = e^{\alpha'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}},$$

d'où l'on déduira

$$\Delta'^m y_{x,x'} = \left\{e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}}-1\right\}^m,$$
$$\Sigma'^m y_{x,x'} = \frac{1}{\left\{e^{\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}}-1\right\}^m},$$

ce qui s'accorde avec les nos 933 et 970.

Supposons maintenant que les accroissemens n et n' soient infiniment petits, tandis que k et k' soient finis, ce qui changera nk en $\mathrm{d}x$, $n'k'$ en $\mathrm{d}x'$, et $\Delta'^m y_{x,x'}$ en $\mathrm{d}^m y$; nous aurons

$$(1+\Delta_x y_{x,x'})^n = (1+\Delta_x y_{x,x'})^{dx} = 1+dx\,l(1+\Delta_x y_{x,x'}),$$
$$(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'} = (1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{dx'} = 1+dx'\,l(1+\Delta_{x'} y_{x,x'}),$$
$$d^n y = \{[1+dx\,l(1+\Delta_x y_{x,x'})][1+dx'\,l(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})]-1\}^n,$$

formule qui revient à

$$d^n y = \{dx\,l(1+\Delta_x y_{x,x'}) + dx'\,l(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})\}^n.$$

On trouverait facilement pour les fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables, des formules correspondantes à celles qui précèdent. Voyez d'ailleurs la *Théorie analytique des Probabilités.*

CHAPITRE V.

Application du Calcul intégral à la Théorie des suites.

1140. L'INTÉGRATION des différentielles à une seule variable ayant conduit à des séries, on en a conclu qu'on pouvait représenter une série par une intégrale; et comme on a des méthodes pour calculer au moins par approximation, la valeur d'une intégrale entre des limites données (467), on a cherché à remonter d'une série à l'intégrale dont elle est un des développemens. C'est par ces considérations qu'Euler a créé, pour la sommation des séries et la recherche de leur terme général, des méthodes très-ingénieuses que nous allons faire connaître successivement.

De la sommation des séries.

La première de ces méthodes consiste à effectuer sur la série proposée, des opérations telles, que les résultats successifs conduisent en dernier lieu à une série que l'on sache sommer, ou qui soit semblable à la proposée.

La progression par quotiens (ou géométrique)

$$s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} \ldots + x^{a+(n-1)b},$$

est un des cas les plus simples de cette théorie. En passant le terme x^a du second membre dans le premier, et ajoutant aux deux le terme x^{a+nb}, il vient

$$\begin{aligned} s - x^a + x^{a+nb} &= x^{a+b} + x^{a+2b} \ldots\ldots + x^{a+nb} \\ &= x^b\{x^a + x^{a+b} \ldots\ldots + x^{a+(n-1)b}\}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $s - x^a + x^{a+nb} = sx^b$, et par conséquent

$$s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}.$$

Les premières opérations de l'Algèbre suffisent non-seulement pour ce cas, mais encore pour toutes les séries dont le terme général est de

la forme

$$(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \text{etc.})x^{a+(n-1)b},$$

ainsi qu'on peut le voir dans les *Élémens d'Algèbre :* passons donc aux artifices tirés du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

1141. Considérons d'abord la série

$$s = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \ldots\ldots + nx^n;$$

en multipliant tous les termes par $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, on obtiendra

$$\frac{s\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}x + 3x^2\mathrm{d}x \ldots\ldots + nx^{n-1}\mathrm{d}x;$$

intégrant ensuite, il viendra

$$\int \frac{s\mathrm{d}x}{x} = x + x^2 + x^3 \ldots\ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x};$$

et en différentiant l'équation $\int \frac{s\mathrm{d}x}{x} = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on aura

$$\frac{s\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}x - (n+1)x^n\mathrm{d}x + nx^{n+1}\mathrm{d}x}{(1-x)^2},$$

d'où l'on déduira

$$s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

1142. La série que nous venons de traiter est comprise dans cette autre plus générale

$$s = ax^\alpha + (a+b)x^{\alpha+\beta} + (a+2b)x^{\alpha+2\beta} + (a+3b)x^{\alpha+3\beta}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + [a + (n-1)b]x^{\alpha+(n-1)\beta}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $px^r\mathrm{d}x$, nous aurons

$$psx^r\mathrm{d}x = apx^{\alpha+r}\mathrm{d}x \ldots + [a + (n-1)b]px^{\alpha+(n-1)\beta+r}\mathrm{d}x,$$

série qui se ramènerait, comme la précédente, à une progression par quotiens, si pour toutes les valeurs de n on avait

$$[a + (n-1)b]p = \alpha + (n-1)\beta + r + 1,$$

ou

$$ap - 1 + (n-1)bp = \alpha + r + (n-1)\beta;$$

or, c'est ce qui aura lieu si

$$ap - 1 = \alpha + r \quad \text{et} \quad bp = \beta,$$

équations qui donnent

$$p = \frac{\beta}{b}, \quad r = \frac{a\beta - \alpha b - b}{b},$$

$$\frac{\beta}{b}\int x^{\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}} s\,dx = x^{\frac{a\beta}{b}} + x^{\frac{a\beta+b\beta}{b}} \ldots + x^{\frac{a\beta+(n-1)b\beta}{b}}$$

$$= \frac{x^{\frac{a\beta}{b}} - x^{\frac{a\beta+nb\beta}{b}}}{1 - x^{\beta}},$$

d'où, par la différentiation, on conclura l'expression de s.

Si le terme général de la série proposée est de la forme

$$(an + b)(cn + e)x^{\alpha+(n-1)\beta},$$

et qu'on multiplie par $px^r dx$ les deux membres de l'équation

$$s = (a + b)(c + e)x^{\alpha} \ldots\ldots + (an + b)(cn + e)x^{\alpha+(n-1)\beta},$$

on pourra déterminer p et r de manière à faire disparaître, par l'intégration, un des facteurs du coefficient de chaque puissance de x, et cela, en rendant ce facteur égal à l'exposant augmenté de l'unité. On formera ainsi l'équation

$$pcn + pe = \alpha + (n - 1)\beta + r + 1,$$

d'où l'on tirera

$$pc = \beta, \quad pe = \alpha - \beta + r + 1,$$

et

$$p = \frac{\beta}{c}, \quad r = \frac{\beta e + \beta c - \alpha c - c}{c};$$

au moyen de ces valeurs, on aura

$$\frac{\beta}{c}\int s x^r dx = (a + b)x^{\alpha+r+1} \ldots\ldots + (an + b)x^{\alpha+(n-1)\beta+r+1}.$$

La série du second membre étant de la même forme que la précédente, on y substituera sa valeur, déterminée d'après ce qu'on a vu, et on aura ainsi une équation finie entre cette valeur et l'intégrale $\int s x^r dx$, qui conduira, par la différentiation, à l'expression de s.

On obtiendra immédiatement une équation finie du même genre, en

multipliant par $p'x^{r'}dx$ les deux membres de celle que nous venons de trouver, et posant

$$(an+b)p' = \alpha + (n-1)\beta + r + r' + 2,$$

d'où l'on déduira

$$p' = \frac{\beta}{a}, \quad r' = \frac{\beta b - \alpha a + \beta a - ra - 2a}{a} = \frac{\beta bc - \beta ae - ac}{ac};$$

intégrant ensuite, il viendra

$$\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\frac{\beta bc - \beta ae - ac}{ac}} dx \int x^{\frac{\beta e + \beta c - ac - c}{c}} s dx$$
$$= \frac{x^{\frac{\beta(a+b)}{a}} - x^{\frac{\beta(a+b+na)}{a}}}{1 - x^\beta} = x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^\beta}\right);$$

deux différentiations successives feront disparaître les signes $\int$ du premier membre, et conduiront à une équation dont il sera facile de tirer s.

Il est visible que le même procédé s'étend à toutes les séries dont le terme général est de la forme

$$(an+b)(cn+e)(fn+g)\ldots\ldots x^{\alpha+(n-1)\beta}.$$

1143. C'est en renversant ce procédé, qu'on l'applique aux séries dont le terme général est de la forme

$$\frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{(an+b)(cn+e)(fn+g)\ldots\ldots};$$

Soit d'abord

$$s = \frac{x^\alpha}{a+b}\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b};$$

on multipliera seulement par px^r, et on aura

$$psx^r = \frac{px^{\alpha+r}}{a+b}\ldots\ldots\ldots + \frac{px^{\alpha+(n-1)\beta+r}}{an+b};$$

on différentiera ensuite, pour obtenir

$$pd(sx^r) = \frac{p(\alpha+r)x^{\alpha+r-1}dx}{a+b}\ldots\ldots + \frac{p[\alpha+(n-1)\beta+r]x^{\alpha+(n-1)\beta+r-1}dx}{an+b},$$

et on déterminera r et p de manière à rendre le coefficient du numé-

rateur égal au dénominateur, quelle que soit n. On fera donc

$$an+b=p\alpha+p\beta n-p\beta+pr,\quad a=p\beta,\quad b=p\alpha-p\beta+pr,$$

d'où il résultera

$$p=\frac{a}{\beta},\quad r=\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a},$$

et

$$\frac{a}{\beta}\mathrm{d}\left(x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}}s\right)=x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\ldots\ldots+x^{\frac{na\beta+b\beta-a}{a}}=x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right);$$

on conclura de là, par le secours de l'intégration,

$$\frac{a}{\beta}x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}}s=\int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right),$$

$$s=\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right).$$

L'intégrale indiquée dans cette formule doit s'évanouir lorsque $x=0$.

Pour avoir la limite de la série proposée, il faut prendre, au lieu de la somme de la progression par quotiens

$$x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\ldots\ldots+x^{\frac{na\beta+b\beta-a}{a}},$$

sa limite, et il viendra

$$s=\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int\frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\mathrm{d}x}{1-x^{\beta}}.$$

Si l'on fait $x=1$, dans la série proposée, et qu'on suppose en même temps $\alpha=\beta=1$, elle deviendra seulement

$$s=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}\ldots\ldots+\frac{1}{na+b}.$$

On ne pourra pas établir l'hypothèse de $x=1$, dans les expressions différentielles; mais on fera $\alpha=\beta=1$, dans l'expression intégrale, qui se changera en $\frac{1}{ax^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^{n}}{1-x}\right)$, et qu'il faudra prendre depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, pour obtenir la somme de la série particulière que nous

considérons maintenant. Voilà une nouvelle expression de la transcendante indiquée dans les nos 980 et 1000. Sa limite se trouverait en faisant $\alpha=1$ et $\beta=1$, dans l'expression $\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int\frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\mathrm{d}x}{1-x^{\beta}}$, qui répond à la supposition de n infinie, et d'où il résulterait $\frac{1}{ax^{\frac{b}{a}}}\int\frac{x^{a}\mathrm{d}x}{1-x}$, l'intégrale devant être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Passons à la série dont le terme général $\frac{x^{n}}{(an+b)(cn+e)}$ renferme deux facteurs à son dénominateur, et où, pour abréger, nous avons mis x^{n} au lieu de $x^{\alpha+(n-1)\beta}$, ce qui ne diminue pas la généralité de l'expression. On aura, relativement à cette série, l'équation

$$px^{r}s=\frac{px^{1+r}}{(a+b)(c+e)}\ldots\ldots+\frac{px^{n+r}}{(an+b)(cn+e)},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{p\mathrm{d}(x^{r}s)}{\mathrm{d}x}=\frac{p(1+r)x^{r}}{(a+b)(c+e)}\ldots\ldots+\frac{p(n+r)x^{n+r-1}}{(an+b)(cn+e)}.$$

On peut toujours déterminer les nombres p et r de manière à faire disparaître l'un des facteurs du dénominateur, en posant............ $pn+pr=an+b$, d'où il suit $p=a$, $r=\frac{b}{a}$, et

$$\frac{a\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)}{\mathrm{d}x}=\frac{x^{\frac{b}{a}}}{c+e}\ldots\ldots+\frac{x^{\frac{b}{a}+n-1}}{cn+e}.$$

Maintenant, si l'on faisait $\frac{a\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)}{\mathrm{d}x}=s'$, on aurait une série qui serait dans le cas de celle que nous avons traitée plus haut; mais on arrive immédiatement au résultat, en la multipliant par $p'x^{r'}$, ce qui conduit à

$$\frac{ap'x^{r'}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)}{\mathrm{d}x}=\frac{p'x^{\frac{b}{a}+r'}}{c+e}\ldots\ldots+\frac{p'x^{\frac{b}{a}+n-1+r'}}{cn+e},$$

$$\frac{ap'\mathrm{d}[x^{r'}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)]}{\mathrm{d}x^{2}}=\frac{p'\left(\frac{b}{a}+r'\right)x^{\frac{b}{a}+r'-1}}{c+e}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p'\left(\frac{b}{a}+n+r'-1\right)x^{\frac{b}{a}+n+r'-2}}{cn+e};$$

posant ensuite

$$\frac{p'b}{a}+p'n+p'r'-p'=cn+e,$$

il vient

$$p'=c,\quad r'=1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c},$$

et l'on a pour dernière transformée

$$\frac{ac\,\mathrm{d}\left[x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}\mathrm{d}\left(x^{\frac{b}{a}}s\right)\right]}{\mathrm{d}x^2}=x^{\frac{e}{c}}\ldots\ldots+x^{\frac{e}{c}+n-1}=x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

En intégrant deux fois de suite, puis tirant la valeur de s, on trouve

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}\mathrm{d}x\int x^{\frac{e}{c}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

et en réduisant la double intégrale à des intégrales simples (484), il vient

$$s=\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)x^{\frac{b}{a}}}.$$

Il faut observer que cette dernière expression se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $bc=ae$, parce que la précédente étant alors

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\int x^{\frac{b}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right),$$

doit se ramener immédiatement à

$$s=\frac{\mathrm{l}x\int x^{\frac{b}{a}}\mathrm{d}x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}\mathrm{d}x(\mathrm{l}x)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{acx^{\frac{b}{a}}},$$

et que dans le cas où $bc=ae$, le produit $(an+b)(cn+e)$ devient $\frac{c}{a}(an+b)^2$, en y mettant pour e sa valeur.

Il est aisé de voir que si l'on voulait obtenir la limite de la série proposée, il faudrait mettre sous les signes d'intégration, $\frac{1}{1-x}$ au lieu de $\frac{1-x^n}{1-x}$.

La méthode est générale, et s'étend à toutes les séries dont le dénominateur peut se décomposer en facteurs rationnels et du premier degré par rapport à n. En suivant la marche tracée dans les deux exemples précédens, on trouvera que la série, dont le terme général est

$$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)},$$

a pour somme

$$s = \frac{1}{acfx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1}dx\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

et réduisant à des intégrales simples, on obtiendra

$$s = \frac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bf-ag)(ef-cg)} + \frac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)(cg-ef)}$$
$$+ \frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)},$$

forme qui présente une loi très-simple, d'après laquelle on peut continuer ces expressions aussi loin qu'on voudra.

Lorsque le terme général sera

$$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)(hn+k)},$$

on aura

$$s = \frac{1}{acfx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1}dx\int x^{\frac{g}{f}-\frac{k}{h}-1}dx\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a^2x^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)(ak-bh)} + \dfrac{c^2x^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)(cg-ef)(ck-eh)} \\ + \dfrac{f^2x^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bf-ag)(ef-cg)(fk-gh)} + \dfrac{h^2x^{-\frac{k}{h}}\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bh-ak)(eh-ck)(gh-fk)}. \end{array}\right.$$

1144. Ces expressions donnent $\frac{0}{0}$, quand les facteurs du dénominateur du terme général sont égaux; il est plus simple de chercher immédiatement, en supposant dans les calculs indiqués ci-dessus,

$$a = c = f = \text{etc.}, \qquad b = e = g = \text{etc.},$$

les expressions qui conviennent à ce cas, que d'entreprendre de les déduire des précédentes. Lorsque le terme général est $\frac{x^n}{(an+b)^3}$, on trouve

$$s = \frac{1}{a^3 x^{\frac{b}{a}}} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

$$= \frac{(lx)^2 \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - 2\, lx \int x^{\frac{b}{a}} dx\, (lx) \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \int x^{\frac{b}{a}} dx\, (lx)^2 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2 a^3 x^{\frac{b}{a}}};$$

lorsque ce même terme est $\frac{x^n}{(an+b)^4}$, il vient

$$s = \frac{1}{1.2.3 a^4 x^{\frac{b}{a}}} \left\{ \begin{array}{l} (lx)^3 \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - 3 (lx)^2 \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx) \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \\ + 3\, lx \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^2 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^3 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \end{array} \right\},$$

et pour l'expression $\frac{x^n}{(an+b)^m}$, on a en général

$$s = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1) a^m x^{\frac{b}{a}}} \left\{ \begin{array}{l} (lx)^{m-1} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - \frac{m-1}{1} (lx)^{m-2} \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx) \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} (lx)^{m-3} \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^2 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \\ - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} (lx)^{m-4} \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^3 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Ces valeurs se simplifient beaucoup lorsqu'on y fait $x=1$, ce qui donne $lx=0$, en dehors des intégrales seulement; on obtient alors

$$s = \pm \frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^{m-1} \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2.3\ldots(m-1) a^m},$$

pour la somme de la série dont le terme général est $\frac{1}{(an+b)^m}$, l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, le signe $+$ ayant lieu si m est impaire, et le signe $-$ si m est paire. On comprend le double signe $\pm$ dans la formule, en écrivant $l\frac{1}{x}$ au lieu de lx, puisque.... $l\frac{1}{x} = -lx$, et on a

$$s = \frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{m-1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2.3\ldots.(m-1)a^m}.$$

Enfin on obtient les limites des séries proposées, en mettant seulement $\frac{1}{1-x}$ au lieu de $\frac{1-x^n}{1-x}$; et lorsqu'on fait $a=1$, $b=0$, ces séries deviennent celles du n° 1005.

1145. La combinaison des méthodes indiquées dans les trois numéros précédens, conduit à la sommation des séries dont le terme général est $\frac{Ax^n}{B}$, les lettres A et B désignant des fonctions rationnelles et entières de n, décomposées en facteurs du premier degré. On fait disparaître successivement les facteurs du numérateur par des intégrations répétées, et ceux du dénominateur par des différentiations. L'exemple suivant suffira pour mettre sur la voie des applications.

Soit $\frac{\alpha n+\beta}{an+b}x^n$ le terme général de la série proposée; on multipliera par px^r les deux membres de l'équation

$$s = \frac{\alpha+\beta}{a+b}x + \frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2 \ldots. + \frac{\alpha n+\beta}{an+b}x^n,$$

et passant ensuite aux différentielles, celle du terme général sera

$$\frac{p(n+r)(\alpha n+\beta).x^{n+r-1}dx}{an+b};$$

on fera donc $pn=an$, $pr=b$, ce qui donnera cette équation,

$$\frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{dx} = (\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}} + (2\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}+1} \ldots\ldots. + (n\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}+n-1},$$

dont le second membre ne renferme plus de dénominateur. De nouvelles opérations, semblables à la précédente, feraient disparaître les facteurs qui resteraient, si le dénominateur en contenait plus d'un.

En multipliant la même équation par $px^r dx$, et prenant ensuite l'intégrale de chaque terme, celle du terme général sera

$$\frac{ap(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+r+n}}{b+ar+an};$$

le facteur $\alpha n+\beta$ du numérateur disparaîtra si l'on fait

$$a\alpha pn = an, \qquad ap\beta = b+ar,$$

d'où il suit

$$p=\frac{1}{\alpha},\qquad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots\ldots+x^{\frac{\beta}{\alpha}+n},$$

et par conséquent

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

on tire de là

$$s=\frac{\alpha\int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}\left[x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right]}{ax^{\frac{b}{a}}}.$$

1146. Dans les séries que nous avons considérées ci-dessus, le nombre des facteurs, soit du numérateur, soit du dénominateur, était le même pour chaque terme; mais il y a une classe de séries qu'Euler désigne sous le nom d'*hypergéométriques*, dans laquelle ce nombre augmente d'un terme à l'autre : la série

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots(an+b)}x^n$$

est de cette classe. On va voir que leur sommation se ramène à l'intégration d'une équation différentielle.

Le cas le plus simple est celui dans lequel le terme général est de la forme

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)x^n;$$

par la méthode du n° 1142, on fait disparaître le dernier facteur $\alpha n+\beta$, et on ramène la série proposée à ce qu'elle serait si l'on en retranchait le dernier terme. On obtient, de cette manière,

$$p\int sx^r\mathrm{d}x=\frac{p(\alpha+\beta)x^{r+2}}{r+2}\ldots\ldots+\frac{p(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)x^{n+r+1}}{n+r+1};$$

posant $p(\alpha n+\beta)=n+r+1$, il vient $p=\frac{1}{\alpha}$, $r=\frac{\beta}{\alpha}-1$, et

$$\frac{1}{\alpha}\int sx^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\mathrm{d}x=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+(\alpha+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots+(\alpha+\beta)\ldots[\alpha(n-1)+\beta]x^{\frac{\beta}{\alpha}+n},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\int sx^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\mathrm{d}x}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}-1=(\alpha+\beta)x\ldots\ldots+(\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(n-1)+\beta]x^{n-1}$$

$$=s-(\alpha+\beta)\ldots(\alpha n+\beta)x^n;$$

et faisant, pour abréger, $(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)=A$, on a

$$\int s x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}dx=\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}(1+s-Ax^n).$$

Lorsqu'on délivre cette équation du signe $\int$, en la différentiant, elle conduit à

$$\alpha x^2 ds+[(\alpha+\beta)x-1]sdx=[(\alpha+\beta+\alpha n)Ax^{n+1}-(\alpha+\beta)x]dx,$$

équation du premier degré et du premier ordre, dont l'intégrale donnera l'expression de s.

Il peut arriver que chaque terme de la série proposée contienne deux ou un plus grand nombre de facteurs de plus que celui qui le précède; il faut alors un nombre d'opérations successives égal à celui qui marque l'accroissement du nombre des facteurs d'un terme à l'autre. Si l'on avait, par exemple,

$$s=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)x^2+\text{etc.},$$

une prêmière opération, semblable à celle qu'on vient d'effectuer ci-dessus, changerait l'expression

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(2n-1)+\beta]x^n,$$

terme général de cette série, en

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(2n-2)+\beta]x^{n+\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}},$$

et une seconde opération, effectuée de manière à faire disparaître le facteur $[\alpha(2n-2)+\beta]$, réduira le résultat ci-dessus à

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(2n-3)+\beta]x^{n+\frac{\beta}{2\alpha}-1},$$

expression correspondante au terme qui précède celui qu'on a pris pour le dernier dans la série primitive.

C'est encore par le même procédé qu'on traiterait les séries dont le terme général est de la forme

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta).(\gamma+\delta)(2\gamma+\delta)\ldots\ldots(\gamma n+\delta)x^n;$$

par une première opération on ferait disparaître le facteur $\alpha n+\beta$, et par une seconde, le facteur $\gamma n+\delta$: en suivant la même marche, on s'éleverait facilement aux séries dont les termes généraux renfermeraient trois ou un plus grand nombre de progressions de facteurs.

1147. Lorsque les facteurs sont au dénominateur, que l'on a, par exemple,

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)},$$

on emploie la différentiation; il vient

$$\frac{p\,\mathrm{d}(sx^r)}{\mathrm{d}x}=\frac{p(r+1)x^r}{\alpha+\beta}\ldots\ldots+\frac{p(n+r)x^{n+r-1}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)},$$

$$pn+pr=\alpha n+\beta,\quad \text{d'où}\quad p=\alpha,\quad r=\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\frac{\alpha\,\mathrm{d}(sx^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x}-1=\frac{x}{\alpha+\beta}\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(n-1)+\beta]}=s-\frac{x^n}{A}.$$

En développant l'équation différentielle

$$\frac{\alpha\,\mathrm{d}(sx^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x}-1=s-\frac{x^n}{A},$$

on trouvera
$$\mathrm{d}s+\frac{\beta\mathrm{d}x-x\mathrm{d}x}{\alpha x}s=\frac{(A-x^n)\mathrm{d}x}{A\alpha},$$

équation qui s'intègre en la multipliant par $e^{-\frac{x}{\alpha}}x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, et donne

$$s=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}}x^{-\frac{\beta}{\alpha}}\int e^{-\frac{x}{\alpha}}x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x\left(1-\frac{x^n}{A}\right).$$

Deux opérations semblables à la précédente, effectuées successivement sur la série dont le terme général est

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots[\alpha(2n-1)+\beta]},$$

ou dans laquelle le dénominateur d'un terme quelconque renferme deux facteurs de plus que le dénominateur de celui qui le précède, la ramèneront à ce qu'elle serait si l'on en retranchait son dernier terme. Il en sera de même d'une série dont le terme général aura un dénominateur composé de deux progressions de facteurs, et en général rien n'est plus aisé que de pousser l'application de la méthode aussi loin qu'elle peut aller.

Lorsque les facteurs du dénominateur sont élevés chacun à une même puissance, le calcul mène à des expressions plus simples. Quand le terme général est

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2\ldots\ldots(\alpha n+\beta)^2},$$

on trouve

$$\frac{\alpha^2\mathrm{d}[x\mathrm{d}(x^{\frac{\beta}{\alpha}}s)]}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x^2}-1=s-\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2\;.\;.\;.\;.\;(\alpha n+\beta)^2};$$

pour le terme général

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^3\;.\;.\;.\;.\;(\alpha n+\beta)^3},$$

on obtient

$$\frac{\alpha^3\mathrm{d}\{x\mathrm{d}[x\mathrm{d}(x^{\frac{\beta}{\alpha}}s)]\}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x^3}-1=s-\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^3\;.\;.\;.\;.\;(\alpha n+\beta)^3},$$

et ainsi de suite.

1148. Passons maintenant à la série dont le terme général est

$$\frac{(a+b)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(an+b)}{(\alpha+\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha n+\beta)}\,x^n:$$

l'introduction du facteur $px^r\mathrm{d}x$ et l'intégration donnent d'abord

$$p\int sx^r\mathrm{d}x=\frac{p(a+b)}{(r+2)(\alpha+\beta)}\,x^{r+2}\ldots+\frac{p(a+b)\ldots.(an+b)}{(r+n+1)(\alpha+\beta)\ldots(\alpha n+\beta)}\,x^{r+n+1};$$

posant $apn+pb=r+n+1$, il vient $p=\frac{1}{a}$, $r=\frac{b-a}{a}$, et

$$\frac{\int x^{\frac{b-a}{a}}s\mathrm{d}x}{a}=\frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{\alpha+\beta}\ldots\ldots+\frac{(a+b)\ldots.[a(n-1)+b]x^{\frac{b}{a}+n}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)};$$

multipliant ce résultat par px^r, puis prenant sa différentielle, en faisant $bp+apn+apr=a\alpha n+a\beta$, on trouve $p=\alpha$, $r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}$,

$$\frac{\alpha\mathrm{d}(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}}s\mathrm{d}x)}{ax^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}x}-1=s-\frac{(a+b)\;.\;.\;.\;.\;(an+b)}{(\alpha+\beta)\;.\;.\;.\;.\;(\alpha n+\beta)}\,x^n.$$

Cet exemple montre assez comment il faut opérer sur les autres cas compris dans la classe de séries dont il fait partie.

1149. Depuis le n° 1145, nous n'avons donné que les sommes des séries proposées; mais il est visible qu'en supprimant dans leurs expres-

sions le dernier terme de la série, on aura sa limite : on trouvera ainsi, pour la seconde série du nº 1146,

$$\frac{\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} - 1 = s,$$

et faisant disparaître le signe d'intégration, on obtiendra une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dont l'intégrale donnera l'expression de s. Si l'on y change x en $-x$, et qu'on prenne le résultat total avec un signe contraire à celui dont il est affecté, on aura la limite de la série

$$(\alpha+\beta)x - (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)x^2 + \text{etc.}$$

Quand $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, la série précédente devient

$$s = 1.x - 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 - \text{etc.},$$

et l'on a l'équation

$$\frac{\int s x^{-1} dx}{x} - 1 = -s,$$

qui donne, par la différentiation,

$$\frac{s dx}{x} - dx = -x ds - s dx, \quad \text{ou} \quad ds + \frac{s(x+1)}{x^2} dx = \frac{dx}{x};$$

cette dernière équation a pour intégrale

$$s = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx \text{ (562).}$$

Nous pouvons aussi déduire des formules ci-dessus l'expression de la limite de la série

$$s' = x - 1.x^2 + 1.2.x^3 - 1.2.3.x^4 + \text{etc.};$$

car, en la comparant à la précédente, on trouve que $s' = x - sx$, d'où il suit $ds' = dx - s dx - x ds$, et l'équation

$$\frac{s dx}{x} - dx = -x ds - s dx,$$

changée par ce moyen en

$$ds' + \frac{s' dx}{x^2} = \frac{dx}{x},$$

a pour intégrale

$$s' = e^{\frac{1}{x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}.$$

Nous ferons remarquer qu'on arrive immédiatement à ce dernier résultat, en combinant ensemble les équations

$$s' = x - 1.x^2 + 1.2.x^3 - 1.2.3.x^4 + \text{etc.},$$
$$\frac{ds'}{dx} = 1 - 1.2x + 1.2.3x^2 - 1.2.3.4x^3 + \text{etc.},$$

dont la seconde revient à $\frac{ds'}{dx} = \frac{x - s'}{x^2}$.

1150. Si l'on fait $x=1$ après l'intégration, l'expression $s' = e \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}$, qui répond à cette hypothèse, est propre à faire connaître la limite de la série divergente

$$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \text{etc.};$$

comprenant celle dont nous nous sommes occupés dans le n° 1124: on aura

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} = e \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}.$$

Nous avons déjà considéré l'intégrale $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}$, dans le n° 478; mais ici nous ne prendrons de la formule du n° 473, que les termes multipliés par la première puissance de α, et nous aurons

$$Y_n - Y = \alpha \{ \tfrac{1}{2} Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots\ldots\ldots + Y'_{n-1} + \tfrac{1}{2} Y'_n \},$$

Y', Y'_1, etc., désignant les valeurs successives de la fonction $\frac{e.e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, comprises entre les deux limites $x=a$ et $x=b$ de l'intégrale, et n leur nombre.

En faisant $n=10$, il vient $\alpha = \frac{1}{10}$, à cause que les valeurs extrêmes de x sont 0 et 1; et l'on a pour la suite des valeurs de x,

$$\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1;$$

pour celles de Y',

$$0,\ \frac{10}{e^{\frac{9}{1}}},\ \frac{10}{2e^{\frac{8}{2}}},\ \frac{10}{3e^{\frac{7}{3}}},\ \frac{10}{4e^{\frac{6}{4}}},\ \frac{10}{5e^{\frac{5}{5}}},\ \frac{10}{6e^{\frac{4}{6}}},\ \frac{10}{7e^{\frac{3}{7}}},\ \frac{10}{8e^{\frac{2}{8}}},\ \frac{10}{9e^{\frac{1}{9}}},\ \frac{10}{10e^{0}},$$

d'où l'on conclut

$$Y_n - Y = \frac{1}{e^{\frac{9}{1}}} + \frac{1}{2e^{\frac{8}{2}}} + \frac{1}{3e^{\frac{7}{3}}} + \frac{1}{4e^{\frac{6}{4}}} + \frac{1}{5e^{\frac{5}{5}}}$$
$$+ \frac{1}{6e^{\frac{4}{6}}} + \frac{1}{7e^{\frac{3}{7}}} + \frac{1}{8e^{\frac{2}{8}}} + \frac{1}{9e^{\frac{1}{9}}} + \frac{1}{20},$$

pour la première valeur approchée de l'intégrale $e\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$.

Euler, en mettant pour le nombre e sa valeur 2,718281828, a trouvé

$$\frac{1}{e^{\frac{9}{1}}} = 0{,}00012340,\quad \frac{1}{6e^{\frac{4}{6}}} = 0{,}08556950,$$
$$\frac{1}{2e^{\frac{8}{2}}} = 0{,}00915782,\quad \frac{1}{7e^{\frac{3}{7}}} = 0{,}09306270,$$
$$\frac{1}{3e^{\frac{7}{3}}} = 0{,}03232324,\quad \frac{1}{8e^{\frac{2}{8}}} = 0{,}09735002,$$
$$\frac{1}{4e^{\frac{6}{4}}} = 0{,}05578253,\quad \frac{1}{9e^{\frac{1}{9}}} = 0{,}09942656,$$
$$\frac{1}{5e^{\frac{5}{5}}} = 0{,}07357587,\quad \frac{1}{20} = 0{,}05000000,$$

nombres dont la somme est 0,59637164. Il est visible qu'il suffit de retrancher ce résultat de l'unité, pour obtenir la limite de la série

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \text{etc.};$$

l'on aura par ce moyen le nombre 0,40362836 qui s'accorde, dans les quatre premières décimales, avec celui du n° 1124. On porterait l'exactitude beaucoup plus loin encore, en calculant plus de termes de la formule du n° 473, et surtout en diminuant α pour augmenter le nombre des valeurs intermédiaires de Y'.

L'expression $e\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ se transforme en $\int\frac{dv}{1-lv}$, lorsqu'on fait... $e^{1-\frac{1}{x}} = v$, ou $x = \frac{1}{1-lv}$. Les limites de x étant 0 et 1, celles de v

doivent être aussi o et 1, et si l'on intègre par parties la formule .. $\frac{1}{1-1v}dv$, en opérant sur le facteur dv, il viendra

$$\int\frac{dv}{1-1v}=\frac{v}{1-1v}-\frac{1.v}{(1-1v)^2}+\frac{1.2.v}{(1-1v)^3}-\frac{1.2.3.v}{(1-1v)^4}+\text{etc.},$$

d'où il résulte la série

$$1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-\text{etc.},$$

quand on prend $v=1$. On obtiendra donc encore la valeur approchée de la limite de cette série, en calculant celle de l'intégrale $\int\frac{dv}{1-1v}$ par la méthode du n° 473 (*).

(*) On ramènerait à une fraction continue l'expression de s, en appliquant à l'équation différentielle $ds' + \frac{s'dv}{x^2} = \frac{ds}{x}$ la méthode du n° 668; mais il est bon d'observer que l'on peut aussi déduire immédiatement de la série

$$x-1x^2+1.2.x^3-1.2.3.x^4+1.2.3.4.x^5-\text{etc.},$$

une fraction de cette espèce. En représentant la série proposée par A, Euler fait

$$A=\frac{x}{1+B}, \text{ d'où},$$

$$B=\frac{x-2x^2+6x^3-24x^4+120x^5-720x^6+5040x^7-\text{etc.}}{1-x+2x^2-6x^3+24x^4-120x^5+720x^6-5040x^7+\text{etc.}}\cdots=\frac{x}{1+C},$$

$$C=\frac{x-4x^2+18x^3-96x^4+600x^5-4320x^6+\text{etc.}}{1-2x+6x^2-24x^3+120x^4-720x^5+\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{x}{1+D},$$

$$D=\frac{2x-12x^2+72x^3-480x^4+3600x^5-\text{etc.}}{1-4x+18x^2-96x^3+600x^4-\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{2x}{1+E},$$

$$E=\frac{2x-18x^2+144x^3-1200x^4+\text{etc.}}{1-6x+36x^2-240x^3+\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{2x}{1+F},$$

$$F=\frac{3x-36x^2+360x^3-\text{etc.}}{1-9x+72x^2-600x^3+\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{3x}{1+G},$$

$$G=\frac{3x-48x^2+\text{etc.}}{1-12x+120x^2-\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{3x}{1+H},$$

$$H=\frac{4x-\text{etc.}}{1-16x+\text{etc.}}\cdots\cdots=\frac{4x}{1+I}.$$

La loi de ces expressions fait voir que l'on aurait

$$I=\frac{4x}{1+K},\quad K=\frac{5x}{1+L},\quad L=\frac{5x}{1+M},\ \text{etc.}$$

1151. Passons à la première des séries considérées dans le n° 1147, et dont la somme est

$$s = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} x^{-\frac{\beta}{\alpha}} \int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx \left(1 - \frac{x^n}{A}\right).$$

En y supprimant le dernier terme $\frac{x^n}{A}$, nous aurons pour la limite

$$s = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} x^{-\frac{\beta}{\alpha}} \int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx;$$

l'intégrale $\int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx$ étant développée par parties, en opérant sur son premier facteur $e^{-\frac{x}{\alpha}}$, produit la série

$$-\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left\{1 + \frac{\beta}{x} + \frac{\beta(\beta-\alpha)}{x^2} + \frac{\beta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)}{x^3} + \text{etc.}\right\}.$$

Cette série s'arrêtera quand β sera un multiple de α; dans ce cas, le dernier terme sera $-\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} \{\beta(\beta-\alpha)\ldots.\alpha\}$, quantité qui, prise avec le

---

et par ce moyen on aurait

$$s' = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cfrac{6x}{1 + \cfrac{6x}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}}}};$$

cette fraction continue donne successivement, lorsqu'on y fait $x = 1$,

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{13},\ \frac{20}{34},\ \frac{44}{73},\ \frac{124}{209},\ \frac{300}{501},$$

valeurs qui sont alternativement plus petites et plus grandes que celles de s.

Il est facile de voir que l'on peut par des procédés analogues au précédent, convertir en fraction continue toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs,

signe $+$, donnera la constante qu'il faudra joindre à l'intégrale pour qu'elle s'évanouisse par la supposition de $x=0$: nous conclurons de là que la limite de la série proposée sera alors

$$s=\beta(\beta-\alpha)\ldots\ldots\alpha c^{\frac{x}{\alpha}}x^{-\frac{\beta}{\alpha}}-\left\{1+\frac{\beta}{x}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{x^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Si l'on fait $\beta=0$, il viendra en vertu de ce que $[0]^{0}=1$ (982), seulement $s=e^{\frac{x}{\alpha}}-1$, résultat qui est en effet la somme de la série

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{1.2\alpha^2}+\frac{x^3}{1.2.3\alpha^3}+\text{etc.},$$

dans laquelle l'hypothèse établie change la série proposée. Lorsque $\beta=\alpha$ et $\beta=2\alpha$, on trouve successivement

$$s=\frac{\alpha e^{\frac{x}{\alpha}}}{x}-1-\frac{\alpha}{x},\quad\text{et}\quad s=\frac{2\alpha^2 e^{\frac{x}{\alpha}}}{x^2}-1-\frac{2\alpha}{x}-\frac{2\alpha^2}{x^2}.$$

Il est facile de pratiquer sur les autres classes de séries, ce que nous venons de faire sur les précédentes.

1152. Nous allons parvenir dans cet article à une formule fort élégante, que M. Parseval a donnée dans un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles, et au moyen de laquelle il obtient la limite de la série

$$AA'+BB'+CC'+DD'+\text{etc.},$$

toutes les fois que celles des séries

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$
$$A'+B'\frac{1}{x}+C'\frac{1}{x^2}+D'\frac{1}{x^3}+\text{etc.},$$

sont connues. Soient X et X' ces limites; il est visible que le produit des deux séries ci-dessus renfermera trois espèces de termes : 1°. des termes délivrés de x, qui s'obtiennent en multipliant entr'eux les termes correspondans de chaque série; 2°. des termes contenant des puissances positives de x; 3°. des termes contenant des puissances négatives; ce produit sera donc de la forme

$$AA'+BB'+CC'+DD'\ldots.+\{\alpha x^m\}+\left\{\beta\frac{1}{x^m}\right\}=XX',$$

en désignant par $\{\alpha x^m\}$ tous les termes affectés des puissances positives de x, et par $\left\{\beta\frac{1}{x^m}\right\}$, tous ceux qui n'en contiennent que de négatives. Cela posé, si dans cette équation l'on fait successivement

$$x = \cos u + \sqrt{-1}\sin u, \qquad x = \cos u - \sqrt{-1}\sin u,$$

on obtiendra deux résultats de la forme

$$\left.\begin{array}{r}AA'+BB'+CC'+DD'\ldots+\{\alpha(\cos mu+\sqrt{-1}\sin mu)\}\\ +\{\beta(\cos -mu+\sqrt{-1}\sin -mu)\}\end{array}\right\} = U,$$

$$\left.\begin{array}{r}AA'+BB'+CC'+DD'\ldots+\{\alpha(\cos mu-\sqrt{-1}\sin mu)\}\\ +\{\beta(\cos -mu-\sqrt{-1}\sin -mu)\}\end{array}\right\} = U',$$

U et U' désignant ce que devient XX' par ces substitutions; mais comme

$$\cos -mu = \cos mu, \qquad \sin -mu = -\sin mu,$$

on dédnira de ce qui précède, cette nouvelle équation,

$$2(AA'+BB'+CC'+DD'\ldots)+2\{\alpha\cos mu\}+2\{\beta\cos mu\} = U+U',$$

où il s'agit de faire disparaître les termes affectés de $\cos mu$. Or, c'est ce qui s'effectue en multipliant chaque terme de l'équation par du, et prenant son intégrale depuis $u=0$ jusqu'à $u=\pi$, ou la demi-circonférence, puisque l'expression $\int du\cos mu = \frac{1}{m}\sin mu$ est nulle entre ces deux limites; on aura ainsi

$$2\pi(AA'+BB'+CC'+DD'\ldots\ldots) = \int(U+U')du,$$

d'où l'on conclura

$$AA'+BB'+CC'+DD'\ldots\ldots = \frac{1}{2\pi}\int(U+U')du,$$

l'intégrale $\int(U+U')du$ étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=\pi$ (*).

(*) On trouve dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1782, p. 66, un artifice d'analyse qui paraît avoir de l'analogie avec celui-ci; et à cette occasion M. Laplace m'a fait voir que la série

$$1+\frac{n^2}{1}+\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)^2+\text{etc.},$$

étant la partie indépendante de a dans le développement du produit $(1+a)^n\left(1+\frac{1}{a}\right)^n$, avait pour somme le coefficient du terme moyen du binome $(1+1)^{2n}$, puisque..... $(1+a)^n\left(1+\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}(1+a)^{2n}$, et que le terme du milieu de cette formule est indépendant de a.

Cette formule nous servira dans la suite à intégrer quelques équations différentielles partielles; à la vérité, elle a l'inconvénient d'introduire, dans le calcul, des imaginaires qui doivent se détruire, et exige par conséquent l'emploi de quelques artifices semblables à ceux dont nous avons fait usage dans l'intégration des équations différentielles du premier degré.

1153. Nous rapprocherons de ce résultat une formule analogue, mais moins générale, donnée par Euler.

Si l'on a

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}=X,$$

et que la suite des quantités

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ \text{etc.},$$

conduise à des différences constantes, dans un ordre quelconque, la limite de la série

$$AA'+BB'x+CC'x^2+DD'x^3+EE'x^4+\text{etc.}$$

sera

$$A'X+\frac{x\Delta A'}{1}\frac{dX}{dx}+\frac{x^2\Delta^2 A'}{1.2}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{x^3\Delta^3 A'}{1.2.3}\frac{d^3X}{dx^3}+\text{etc.},$$

expression qui se terminera lorsque l'on aura $\Delta^n A'=0$. On y parvient en formant les équations

$$\begin{aligned}
\alpha A+\alpha Bx+\alpha Cx^2+\alpha Dx^3+\alpha Ex^4+\text{etc.}&=\alpha X,\\
\beta Bx+2\beta Cx^2+3\beta Dx^3+4\beta Ex^4+\text{etc.}&=\frac{\beta x}{1}\frac{dX}{dx},\\
\gamma Cx^2+3\gamma Dx^3+6\gamma Ex^4+\text{etc.}&=\frac{\gamma x^2}{1.2}\frac{d^2X}{dx^2},\\
\delta Dx^3+4\delta Ex^4+\text{etc.}&=\frac{\delta x^3}{1.2.3}\frac{d^3X}{dx^3},\\
\epsilon Ex^4+\text{etc.}&=\frac{\epsilon x^4}{1.2.3.4}\frac{d^4X}{dx^4},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

dans lesquelles α, β, γ, δ, ϵ, etc., désignent des coefficiens indéterminés; et en les ajoutant entr'elles pour comparer leur somme à

$$AA'+BB'x+CC'x^2+DD'x^3+EE'x^4+\text{etc.},$$

on tire de là

$$\left.\begin{array}{l} A' = \alpha, \\ B' = \alpha+\beta, \\ C' = \alpha+2\beta+\gamma, \\ D' = \alpha+3\beta+3\gamma+\delta, \\ E' = \alpha+4\beta+6\gamma+4\delta+\epsilon, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \alpha = A', \\ \beta = B'- A'=\Delta A', \\ \gamma = C'-2B'+ A'=\Delta^2 A', \\ \delta = D'-3C'+3B'- A'=\Delta^3 A', \\ \epsilon = E'-4D'+6C'-4B'+A'=\Delta^4 A', \\ \text{etc.,} \end{array}\right.$$

d'où il résulte la formule posée ci-dessus. Nous ferons remarquer que si X, au lieu de représenter la limite de la première série, n'est que la somme d'un nombre donné de ses termes, on aura alors la somme d'une portion correspondante de la série proposée.

1154. Les intégrales définies fournissent aussi le moyen de représenter ce qui reste de la série

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

lorsqu'on s'arrête à un terme quelconque, et donnent ainsi la valeur exacte de ce reste, dont les limites ont été déterminées dans les n°s 169 et suivans. Voici comment d'Alembert y est parvenu, en démontrant le théorème de Taylor (*Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, t. I, p. 50) (*).

Soit u' ce que devient la fonction u, lorsqu'on y change x en $x+h$; en posant

$$u' = u + P,$$

et différentiant cette équation par rapport à h, qui n'entre pas dans u, il vient

$$\frac{du'}{dh}=\frac{dP}{dh}, \quad \text{d'où} \quad P=\int\frac{du'}{dh}\,dh,$$

$$u'=u+\int\frac{du'}{dh}\,dh.$$

Soit

$$\frac{du'}{dh}=\frac{du}{dx}+Q;$$

(*) Il est assez singulier que dans l'endroit cité, d'Alembert donne le théorème de Taylor comme s'il était nouveau, et sans en indiquer l'auteur. C'est sans doute à cause de cela que Condorcet a désigné plusieurs fois cette formule sous le nom de théorème de d'Alembert. (*Voyez* dans l'ancienne *Encyclopédie*, le supplément à l'article SÉRIE.)

en différentiant de nouveau par rapport à h, on a

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{dQ}{dh},\quad \text{d'où}\quad Q=\int\frac{d^2u'}{dh^2}dh,$$
$$\frac{du'}{dh}=\frac{du}{dx}+\int\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh,\quad \int\frac{du'}{dh}\,dh=\frac{du}{dx}\,\frac{h}{1}+\iint\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh^2,$$
$$u'=u+\frac{du}{dx}\,\frac{h}{1}+\iint\frac{d^2u'}{dh^2}\,dh^2.$$

Faisant encore

$$\frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+R,$$

on trouve

$$\frac{d^3u'}{dh^3}=\frac{dR}{dh},\quad \text{d'où}\quad R=\int\frac{d^3u'}{dh^3}\,dh,\quad \frac{d^2u'}{dh^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\int\frac{d^3u}{dh^3}\,dh,$$
$$u'=u+\frac{du}{dx}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\iiint\frac{d^3u'}{dh^3}\,dh^3.$$

En continuant ainsi, on arriverait à

$$u'=u+\frac{du}{dx}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2}\cdots\cdots+\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\,\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}+\int^n\frac{d^nu'}{dh^n}\,dh^n,$$

les intégrales étant prises de manière à s'évanouir lorsque $h=0$.

1155. D'Alembert n'ayant pour but que de démontrer le théorème de Taylor, s'est arrêté ici; mais il est bien facile de passer ensuite au théorème que Lagrange a donné dans sa *Théorie des Fonctions analytiques* (2ᵉ édit., nᵒ 35).

Soit, pour abréger $\frac{d^nu'}{dh^n}=H$; on aura

$$\int^n H dh^n=$$
$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left\{h^{n-1}\!\int\! H dh-\frac{n-1}{1}h^{n-2}\!\int\! Hh dh+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}h^{n-3}\!\int\! Hh^2 dh-\text{etc.}\right\}(484),$$

et il est facile de voir qu'on pourra substituer à la série ci-dessus l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots.(n-1)}\int H(t-h)^{n-1}dh,$$

prise depuis $h=0$, pourvu qu'après l'intégration on change t en h; car si on développe cette expression, qu'on passe hors du signe $\int$ les puissances de t qui multiplient les différens termes, et qu'on fasse ensuite $t=h$, on retombera sur la série précédente.

Il suit de là que

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\cdots\cdots + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int\frac{d^nu'}{dh^n}(t-h)^{n-1}dh,$$

pourvu qu'on prenne l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $h=0$, et qu'on change ensuite t en h.

On peut, dans cette formule, remplacer $\frac{d^nu'}{dh^n}$ par $\frac{d^nu'}{dx^n}$ (105); et si l'on fait, sous le signe intégral, $t-h=zt$ ou $h=t(1-z)$, on aura

$$dh = -tdz, \quad \int\frac{d^nu'}{dx^n}(t-h)^{n-1}dh = -\int\frac{d^nu'}{dx^n}t^nz^{n-1}dz.$$

Les limites de l'intégrale seront alors $z=1$, $z=0$; on la rendra positive, en renversant l'ordre de ses limites, c'est-à-dire en la prenant depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$; enfin sortant t^n du signe $\int$, et écrivant h au lieu de t, on obtiendra pour résultat final,

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\cdots\cdots + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots\ldots(n-1)}\int\frac{d^nu'}{dx^n}z^{n-1}dz,$$

ce qui est le théorème dont Lagrange s'est d'abord servi pour prouver qu'on peut toujours rendre la somme de tous les termes de la série de Taylor, à partir d'un terme donné, plus petite que le précédent.

En effet, si M et m désignent la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $\frac{d^nu'}{dx^n}$ dans l'intervalle de x à $x+h$, on s'assurera sans peine que

$$\int\frac{d^nu'}{dx^n}z^{n-1}dz < \int Mz^{n-1}dz \quad \text{et} \quad > \int mz^{n-1}dz,$$

si le coefficient $\frac{d^nu'}{dx^n}$ ne change point de signe dans cet intervalle (472): or, dans les limites $z=0$, $z=1$, les deux dernières intégrales étant $\frac{M}{n}$ et $\frac{m}{n}$, il en résulte que la portion non développée de la série est comprise entre les quantités

$$\frac{Mh^n}{1.2\ldots\ldots n} \quad \text{et} \quad \frac{mh^n}{1.2\ldots\ldots n},$$

ce qui s'accorde avec le n° 171.

1156. Le théorème de Lagrange se trouve aussi démontré à la page 176 de la *Théorie analytique des Probabilités;* mais pour y parvenir, M. Laplace suit une marche inverse de la précédente. Considérant d'abord l'intégrale $\int dz \frac{d\varphi(x-z)}{dx}$, ou $\int dz\varphi'(x-z)$, il en déduit, au moyen de l'intégration par parties,

$$\int dz\varphi'(x-z) = z\varphi'(x-z) + \int zdz\varphi''(x-z),$$
$$\int zdz\varphi''(x-z) = \tfrac{1}{2}z^2\varphi''(x-z) + \tfrac{1}{2}\int z^2dz\varphi'''(x-z),$$
etc.,

d'où l'on remonte facilement à l'expression générale

$$\int dz\varphi'(x-z) = \frac{z}{1}\varphi'(x-z) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(x-z)\ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x-z)$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}\int z^n dz\varphi^{(n+1)}(x-z).$$

Mais, d'un autre côté, l'équation évidente

$$\int dz \frac{d\varphi(x-z)}{dx} = -\int dz \frac{d\varphi(x-z)}{dz} = -\varphi(x-z) + const.,$$

devient

$$\int dz\varphi'(x-z) = \varphi(x) - \varphi(x-z),$$

lorsqu'on prend l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse quand $z = 0$; mettant dans cette dernière la valeur de $\int dz\varphi'(x-z)$, tirant celle de $\varphi(x)$, et faisant $x - z = t$, d'où il suit $x = t + z$, on aura

$$\varphi(t+z) = \varphi(t) + \frac{z}{1}\varphi'(t) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(t)\ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(t)$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}\int z'^n dz'\varphi^{(n+1)}(t+z-z'),$$

en observant de changer, sous le signe d'intégration, z en z', et de prendre cette nouvelle variable depuis o jusqu'à z. De là il est facile de conclure que la portion de série représentée par l'intégrale sera comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend la quantité

$$\frac{z^{n+1}}{1.2..(n+1)}\varphi^{(n+1)}(t+z-z'),$$

lorsque, sous la fonction $\varphi^{(n+1)}$, on fait varier z' de o à z (*).

(*) M. Ampère, dans le XIIIe cahier du Journal de l'École Polytechnique, fait usage d'une analyse qui développe successivement la série de Taylor, dont le moyen se trouve aussi dans le tome Ier de la *Mécanique céleste*, page 245, et qu'on peut présenter comme

1157. Il est évident que toutes les séries qui s'obtiennent au moyen de l'intégration par parties, sont susceptibles d'être arrêtées, ainsi qu'on vient de le faire pour celle de Taylor, et qu'on peut alors juger du degré d'approximation auquel on est parvenu. M. Laplace, dans l'endroit cité, considère encore la série qui se déduit de l'expression $\int e^{-t^2}dt$, quand, pour l'intégrer par parties, on lui donne la forme

$$\int \frac{1}{t}.e^{-t^2}tdt = -\frac{1}{2t}e^{-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^2}.$$

---

il suit.

Soit $u = f(x)$, $u' = f(x')$ d'où $u' - u = f(x') - f(x)$.

Le second membre de cette équation, devant s'évanouir quand $x = x'$, ne peut être que de la forme $P(x'-x)^m$; mais la théorie des limites prouvant qu'en général $\frac{u'-u}{x'-x}$ est une quantité finie (tom. I, p. 241), il faut que $m = 1$ et que P ne soit ni nul ni infini. De plus, comme il n'y a aucune dépendance entre x' et x, il est permis de supposer que la première soit constante et la seconde variable, ce qui fait varier u et P. En partant de cette remarque et différentiant plusieurs fois de suite l'équation

$$u = u' + P(x - x'),$$

qui résulte de ce qui précède, on obtient

$$\frac{du}{dx} = P + \frac{dP}{dx}(x - x'),$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2\frac{dP}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2}(x - x'),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^nu}{dx^n} = n\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} + \frac{d^nP}{dx^n}(x - x');$$

et l'on en conclut

$$u' = u + P(x' - x),$$
$$u' = u + \frac{du}{dx}(x' - x) + \frac{dP}{dx}(x' - x)^2,$$
$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{(x'-x)}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{(x'-x)^2}{1.2} + \frac{d^2P}{dx^2}\frac{(x'-x)^3}{1.2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{x'-x}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{(x'-x)^2}{1.2}\dots + \frac{d^nu}{dx^n}\frac{(x'-x)^n}{1.2.3\dots n} + \frac{d^nP}{dx^n}\frac{(x'-x)^{n+1}}{1.2\dots\dots n}.$$

M. Ampère s'occupe ensuite de la détermination des limites de la fonction $\frac{d^nP}{dx^n}$; mais pour cette partie nous renverrons à son Mémoire.

En poursuivant de cette manière, on a

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^2} = \int \frac{1}{t^3} e^{-t^2} t dt = -\frac{1}{2t^3} e^{-t^2} - \frac{3}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4},$$

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4} = \int \frac{1}{t^5} e^{-t^2} t dt = -\frac{1}{2t^5} e^{-t^2} - \frac{5}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6},$$

etc.,

d'où il résulte la série

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \frac{1.3.5}{2^3t^6} + \text{etc.}\right\} + const.,$$

qui finit toujours par être divergente, mais dont la convergence dure d'autant plus long-temps, que l'on assigne à t une valeur plus considérable; et si l'on arrête cette série à un terme quelconque, la partie qu'on néglige est exprimée par une intégrale définie qu'on peut comparer à ce terme.

En se bornant aux quatre premiers termes, on a rigoureusement

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \frac{1.3.5}{2^3t^6}\right\} + \frac{1.3.5.7}{2^4}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^8};$$

et comparant le terme affecté de l'intégrale avec celui qui le précède, on trouve qu'entre les limites $t = T$ et t infini, et abstraction faite du signe,

$$\frac{1.3.5e^{-t^2}}{2^4t^7} > \frac{1.3.5.7}{2^4}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^8}, \text{ ou } \frac{e^{-T^2}}{T^7} > 7\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^8}.$$

En effet, si l'on intègre par parties, on obtient

$$7\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^8} = \int e^{-t^2}.7\frac{dt}{t^8} = -\frac{e^{-t^2}}{t^7} - 2\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6},$$

d'où

$$7\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^8} + 2\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6} = -\frac{e^{-t^2}}{t^7},$$

ce qui donne $\frac{e^{-T^2}}{T^7}$, quand on étend les intégrales du premier membre entre les limites données; et comme leurs différentielles ne changent pas de signe dans l'intervalle de ces limites, il s'ensuit que la valeur complète du premier terme du premier membre est $< \frac{e^{-T^2}}{T^7}$.

Toutes les fois qu'il sera possible d'arrêter ainsi les séries et d'ex-

primer le reste par une intégrale définie, on aura atteint un but important; car « la perfection des méthodes d'approximation, dans lesquelles » on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des » séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte » des termes qu'on néglige; et à cet égard on peut dire que presque » toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très-» imparfaites. Le théorème précédent (celui du n° 1155) pourra servir » dans beaucoup d'occasions à donner à ces méthodes la perfection qui » leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer. » (*Théorie des Fonctions analytiques*, 1re édit., page 69.)

De l'interpolation des séries.

1158. Avant que le Calcul intégral fût inventé, Wallis avait employé l'interpolation des séries à évaluer des aires curvilignes dont les ordonnées étaient des binomes irrationnels. Sachant quarrer les courbes dont les ordonnées sont exprimées par

$$(1-x^2)^0, \quad (1-x^2)^1, \quad (1-x^2)^2, \quad (1-x^2)^3, \quad \text{etc.},$$

et ayant obtenu les nombres qui représentent leurs aires, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, il a regardé comme des termes intermédiaires, dans cette série, ceux qui expriment les aires des courbes ayant pour ordonnées les fonctions

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \quad \text{etc.};$$

et ces considérations l'ont conduit à la singulière expression de la circonférence du cercle, que nous avons rapportée n° 989. Stirling les continua et les perfectionna, mais Euler imagina de renverser la question et d'appliquer la connaissance de l'intégrale à l'interpolation de la série, et c'est ce que nous allons faire, d'après lui.

Il suit du n° 1143, et on peut le voir immédiatement, que n étant un nombre entier,

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^n}{n};$$

cette intégrale, étant prise entre les limites $x=0$, $x=1$, donne

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n};$$

d'où, en faisant $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on tire la suite

$$1, \quad 1+\tfrac{1}{2}, \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, \quad \text{etc.};$$

le terme qui répond à l'indice $\frac{1}{2}$, dans celle-ci, sera donc la valeur que prend, entre les limites $x=0$, $x=1$, l'intégrale $\int\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1-x}dx$, qui se transforme successivement en

$$2\int\frac{udu}{1+u}=2\int\frac{(t-1)dt}{t}=2t-2lt,$$

lorsqu'on y fait $x=u^2$, $1+u=t$. Les limites de t étant 1 et 2, on trouve pour la valeur cherchée $2-2l2$, ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà obtenu dans le n° 1023.

De plus, comme il est toujours possible de rendre rationnelle la fraction $\frac{1-x^n}{1-x}$, lorsque l'exposant n est une fraction rationnelle (385), il s'ensuit qu'on pourra toujours obtenir, par les logarithmes et les arcs de cercle, les termes de la suite précédente, correspondans à des indices fractionnaires et rationnels.

1159. Soit en second lieu l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$, de laquelle on déduit, par le développement de $(1-x)^n$, la série

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{nx^{m+2}}{1(m+2)}+\frac{n(n-1)x^{m+3}}{1.2(m+3)}-\frac{n(n-1)(n-2)x^{m+4}}{1.2.3(m+4)}+\text{etc.},$$

qui s'évanouit lorsque $x=0$, et qui, lorsque $x=1$, devient

$$\frac{1}{m+1}-\frac{n}{1(m+2)}+\frac{n(n-1)}{1.2(m+3)}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3(m+4)}+\text{etc.}$$

Si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., on aura

$$\frac{1}{m+1},$$

$$\frac{1}{m+1}-\frac{1}{1(m+2)}=\frac{1}{(m+1)(m+2)},$$

$$\frac{1}{m+1}-\frac{2}{1(m+2)}+\frac{2.1}{1.2(m+3)}=\frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)},$$

etc.;

en suivant cette loi, on voit que le terme général de la série formée par ces valeurs, lorsque n est un nombre entier, a pour expression

$$\frac{1.2\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)},$$

qu'on déduit aussi immédiatement de $\int x^m dx(1-x)^n$, prise entre les limites 0 et 1, en intégrant par parties, relativement au facteur $x^m dx$. On a par ce moyen

$$\int x^m dx(1-x)^n = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{nx^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)},$$

série qui s'évanouit lorsque $x=0$, et se réduit à son dernier terme $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}$, lorsque $x=1$.

Si l'on veut que le nombre des facteurs soit le même au numérateur et au dénominateur, on peut supprimer dans celui-ci le facteur $m+n+1$, ce qui revient à multiplier l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$ par ce facteur, et l'on a

$$\frac{1.2\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}$$

pour la valeur de $(m+n+1)\int x^m dx(1-x)^n$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Voici les principaux résultats qu'Euler tire de là.

En faisant d'abord $m=\frac{1}{2}$, il obtient la série

$$\frac{2}{3},\ \frac{2.4}{3.5},\ \frac{2.4.6}{3.5.7}\ldots\ldots\ldots,\ \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)},$$

et $\frac{2n+3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^n$ pour l'expression intégrale du terme général, d'où il conclut que le terme qui répond à l'indice $n=\frac{1}{2}$, est égal à $2\int dx\sqrt{x-x^2}$, c'est-à-dire à l'aire du cercle dont le diamètre est 1.

On a également, par ce qui précède,

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} = \frac{1}{\int x^m dx(1-x)^n};$$

si dans cette équation l'on change $m+n$ en m, et par conséquent $m+1$ en $m-n+1$, elle deviendra

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} = \frac{1}{\int x^{m-n}dx(1-x)^n},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=\frac{1}{(m+1)\int x^{m-n}dx(1-x)^n}.$$

Voilà l'expression du coefficient numérique du terme général de la puissance n du binome.

En se servant de l'expression $\int x^m dx(1-x^n)^p$, intégrée par parties, relativement au premier facteur $x^m dx$, on obtient pour résultat

$$\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x^n)^p+\frac{pn}{(m+1)(m+n+1)}x^{m+n+1}(1-x^n)^{p-1}$$
$$+\frac{pn(pn-n)}{(m+1)(m+n+1)(m+2n+1)}x^{m+2n+1}(1-x^n)^{p-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{pn(pn-n)(pn-2n)\ldots.n}{(m+1)(m+n+1)\ldots.(m+pn+1)}x^{m+pn+1},$$

qui se réduit à

$$\frac{pn(pn-n)(pn-2n)\ldots.n}{(m+1)(m+n+1)\ldots.(m+pn+1)},$$

lorsqu'on le prend de $x=0$ à $x=1$.

Si l'on met $m-1$ au lieu de m, et qu'on écrive les facteurs du numérateur dans un ordre inverse, on aura ce résultat, aussi simple que remarquable,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p=\frac{n^p}{m}\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{2}{m+2n}\cdot\frac{3}{m+3n}\cdot\ldots\cdot\frac{p}{m+pn}.$$

Il est visible que les conditions de l'intégration supposent que les nombres $m-1$, n et p soient positifs; car sans cela les parties du développement qui doivent disparaître lorsque $x=0$ et lorsque $x=1$, deviendraient infinies.

On tire de l'équation ci-dessus

$$1.2\ldots.p=m(m+n)\ldots.(m+pn)\int\frac{x^{m-1}dx(1-x^n)^p}{n^p},$$

et faisant $n=0$, il vient

$$1.2\ldots.p=m^{p+1}\int\frac{x^{m-1}dx(1-x^0)^p}{0^p};$$

supposant alors, sous le signe $\int$, que n est une quantité très-petite k (147), on trouvera que

$$x^k_n=e^{k1x}=1+k1x,\quad(1-x^k)^p=k^p(-1x)^p=k^p\left(1\frac{1}{x}\right)^p:$$

ainsi

$$1.2\ldots.p=m^{p+1}\int x^{m-1}dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons déduit immédiatement de l'intégrale $\int x^m dx(1x)^n$, dans le n° 428.

On simplifie un peu cette expression, en changeant x^m en x, et par conséquent $mx^{m-1}dx$ en dx, $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$, $1\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{m}1\frac{1}{x}$: il résulte de là que

$$1.2\ldots.p = \int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p.$$

Il suit évidemment de ce qu'on vient de voir, que

$$(m+n)(m+2n)\ldots\ldots(m+pn) = \frac{n^p}{m}\frac{\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p}.$$

Si l'on fait $1\left(\frac{1}{x}\right)=z$, on aura

$$x=e^{-z}, \quad dx=-e^{-z}dz, \quad \int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p = -\int e^{-z}z^p dz,$$

les limites de z étant $z=$ infini et $z=0$. Si l'on en renverse l'ordre, il viendra

$$1.2\ldots.p = \int e^{-z}z^p dz,$$

formule remarquable.

1160. En rapportant à la notation de Vandermonde (981) les divers résultats obtenus ci-dessus, nous aurons

$$1°.\ [p]^p = \int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p = \int e^{-z}z^p dz$$

$$2°.\ [m+pn, n]^p = n^p\left[\frac{m}{n}+p\right]^p = \frac{n^p}{m}\frac{\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p},$$

$$3°.\ \frac{[p]^p}{[m+pn, n]^p} = n^{-p}[p]^p\left[\frac{m}{n}\right]^{-p} = \frac{m}{n^p}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p.$$

Ces théorèmes donnent les expressions des factorielles en intégrales définies, annoncées dans le n° 989, et fournissent le moyen de trouver les valeurs des factorielles à exposant fractionnaire.

Lorsque $p=\frac{1}{2}$, on a, par ce qui précède,

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = \int e^{-z}z^{\frac{1}{2}}dz;$$

mais en intégrant par parties, on trouve

$$\int e^{-z}z^{\frac{1}{2}}dz = -e^{-z}z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\int e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{z}};$$

et la partie délivrée du signe $\int$ s'évanouissant entre les limites $z=0$ et $z=$ infini, il reste seulement $\int\frac{e^{-z}dz}{2\sqrt{z}}$, intégrale qui se réduit à $\int e^{-t^2}dt$, quand on y fait $z=t^2$. Les limites de t demeurant les mêmes que celles de z, on a donc, entre ces limites,

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = \int e^{-t^2}dt;$$

la valeur de l'intégrale définie donnerait celle de la factorielle à exposant fractionnaire, et bientôt nous ferons voir immédiatement que la première est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, comme on le conclurait de ce qu'on a vu dans le n° 989. Voici encore une manière de prouver que cette valeur est aussi celle de la factorielle.

En développant la quantité $(1-x^r)^m$, dans l'intégrale $nr\int x^{nr-1}dx(1-x^r)^m$, ce qui donnera

$$nr\int x^{nr-1}dx(1-x^r)^m = nr\int x^{nr-1}dx\{1-[m]^{1}[0]^{-1}x^r+[m]^{2}[0]^{-2}x^{2r}-[m]^{3}[0]^{-3}x^{3r}+\text{etc.}\},$$

intégrant chaque terme, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, il viendra

$$1-\frac{n}{n+1}[m]^{1}[0]^{-1}+\frac{n}{n+2}[m]^{2}[0]^{-2}-\frac{n}{n+3}[m]^{3}[0]^{-3}+\frac{n}{n+4}[m]^{4}[0]^{-4}-\text{etc.},$$

expression équivalente à

$$1+\frac{(-n)}{n+1}[m]^{1}[0]^{-1}+\frac{(-n)(-n-1)}{(n+1)(n+2)}[m]^{2}[0]^{-2}+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}[m]^{3}[0]^{-3}$$
$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}[m]^{4}[0]^{-4}+\text{etc.},$$

que l'on peut écrire comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} 1+[m]^{1}[0]^{-1}[-n]^{1}[n]^{-1}+[m]^{2}[0]^{-2}[-n]^{2}[n]^{-2}+[m]^{3}[0]^{-3}[-n]^{3}[n]^{-3} \\ \qquad +[m]^{4}[0]^{-4}[-n]^{4}[n]^{-4}+\text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Cette dernière, devenant identique avec le développement de...... $[p+m+n]^{n}[p]^{-n}$, rapporté dans le n° 989, lorsqu'on y change n en

$-n$ et p en n, est par conséquent celui de la quantité $[n+m-n]^{-n}[n]^{n}$, ou $[m]^{-n}[n]^{n}$, d'où il suit que la valeur de l'intégrale $nr\int x^{nr-1}dx(1-x^r)^m$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, est $[m]^{-n}[n]^{n}$, ou

$$\frac{1.2.3\ldots}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots}\cdot\frac{(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)\ldots}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots}\ (988).$$

Appliquons maintenant ces formules au cercle, dont le quart de la circonférence est donné par l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (417); nous aurons pour ce cas $r=2$, $n=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$, et nous obtiendrons

$$\tfrac{1}{4}\pi=[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}},$$

comme dans le n° 989.

1161. L'esprit du procédé d'interpolation appliqué aux exemples précédens, est donc de regarder comme liées entr'elles, par la loi de continuité, toutes les valeurs que prend, entre les mêmes limites, une intégrale quelconque $\int p dx$, dans laquelle p désigne une fonction de x et d'une indéterminée n qui représente l'indice de ces valeurs; et pour plus de généralité, on peut considérer des intégrales doubles, triples, etc.,

$$\int q dx \int p dx, \qquad \int r dx \int q dx \int p dx, \qquad \text{etc.}$$

Euler donne en exemple de la première de ces formes, l'expression $\int\frac{dx}{x}\int x^m dx(1-x)^n$, dont le développement en série est

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}-\frac{nx^{m+2}}{1.(m+2)^2}+\frac{n(n-1)x^{m+3}}{1.2.(m+3)^2}-\text{etc.}$$

Ce développement, pris entre les limites 0 et 1, et en faisant successivement $n=0$, $=1$, $=2$, $=3$, produit la suite

$$\frac{1}{(m+1)^2},\quad \frac{(m+2)^2-(m+1)^2}{(m+2)^2(m+1)^2},\quad \frac{(m+3)^2(m+2)^2-2(m+3)^2(m+1)^2+(m+2)^2(m+1)^2}{(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2},$$
$$\frac{(m+4)^2(m+3)^2(m+2)^2-3(m+4)^2(m+3)^2(m+1)^2+3(m+4)^2(m+2)^2(m+1)^2-(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2}{(m+4)^2(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2},$$

etc.,

dont la loi est très-évidente. Si l'on fait $m=0$, on aura la suite

$$\frac{1}{1},\ \frac{4-1}{4.1},\ \frac{9.4-2.9.1+4.1}{9.4.1},\ \frac{16.9.4-3.16.9.1+3.16.4.1-9.4.1}{16.9.4.1},\ \text{etc.},$$

dont les différences forment la suite

$$-\frac{1}{4.1},\quad -\frac{9-4}{9.4.1},\quad -\frac{16.9-2.16.4+9.4}{16.9.4.1},\quad \text{etc.},$$

et dont le terme général $\int\frac{\mathrm{d}r}{x}\int\mathrm{d}x(1-x)^n$ se change en $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\left(\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)$, lorsqu'on effectue la première intégration, à partir de $x=0$.

1162. Au moyen des intégrales définies, Euler parvient encore à une interpolation très-digne de remarque, c'est celle des fonctions différentielles. De même qu'entre les puissances entières, on insère, par l'extraction des racines, des puissances fractionnaires, de même aussi l'on peut concevoir des termes intermédiaires dans la série

$$V,\quad \mathrm{d}V,\quad \mathrm{d}^2V,\quad \mathrm{d}^3V,\ldots.\mathrm{d}^nV,$$

des différentielles d'une même fonction, et désigner ces termes par un indice fractionnaire qui marque le rang qu'ils occupent dans la série proposée. Il ne sera pas plus possible d'interpréter ces quantités par des différentiations successives, que d'expliquer les puissances fractionnaires par des multiplications répétées; mais les formules $\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}V$ et $V^{\frac{1}{2}}$ seront des expressions formées par analogie, l'une dans la série des différentielles, l'autre dans celles des puissances.

Soit, pour exemple, $V=v^m$; lorsque n est un nombre entier, on a, quelle que soit m,

$$\mathrm{d}^n(v^m)=m(m-1)\ldots.(m-n+1)v^{m-n}\mathrm{d}v^n=\frac{[m]^{m}}{[m-n]^{m-n}}v^{m-n}\mathrm{d}v^n;$$

mettant pour $[m]^{m}$ et $[m-n]^{m-n}$ les expressions données par la formule du n° 1160, on trouvera

$$\mathrm{d}^n(v^m)=v^{m-n}\mathrm{d}v^n\frac{\int\mathrm{d}x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^m}{\int\mathrm{d}x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{m-n}}.$$

Ce résultat est susceptible d'une vérification immédiate, en s'assurant qu'il rentre dans ceux que l'on connaît pour les cas où n est un nombre entier positif.

Si l'on fait $m=1$, $n=\frac{1}{2}$, il viendra

$$d^{\frac{1}{2}}v=\sqrt{vdv}\,\frac{\int dx\,l\frac{1}{x}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{vdv}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}},$$

en observant qu'entre les limites o et 1,

$$\int dx\,l\frac{1}{x}=1,\quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 (1160).

C'est ainsi que l'on parviendrait à l'équation primitive de la courbe correspondante à l'équation différentielle

$$yd^{\frac{1}{2}}v=v\sqrt{dy},$$

dans laquelle dv est supposée constante. Au moyen de la valeur précédente de $d^{\frac{1}{2}}v$, on la transformerait d'abord en $\frac{y\sqrt{vdv}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=v\sqrt{dy}$; et quarrant ensuite chacun de ses membres, on obtiendrait $\frac{y^2dv}{\frac{1}{4}\pi}=vdy$, d'où l'on conclurait

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi}lv=C-\frac{1}{y},\quad \text{ou}\quad ylv=\tfrac{1}{4}C\pi y-\tfrac{1}{4}\pi.$$

1163. L'interpolation dont nous venons de donner un exemple, s'opère facilement sur toutes les fonctions qui sont données par des intégrales définies; et elle fournit en même temps des expressions fort simples des différentielles de certaines fonctions du genre de celles que nous avons examinées dans les nos 1016 et suivans. De l'équation $[p]^{p}=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p}$, par exemple, on conclut sans difficulté les suivantes (note du n° 546),

$$d.[p]^{p}=dp\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p}\left(ll\frac{1}{x}\right),\quad d^2.[p]^{p}=dp^2\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p}\left(ll\frac{1}{x}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d^n.[p]^{p}=dp^n\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p}\left(ll\frac{1}{x}\right)^n.$$

Les différences s'obtiennent d'une manière analogue, en observant que $\Delta^n\int Xdx=\int\Delta^n(Xdx)$; il vient alors

$$\Delta.[p]^{p} = \int dx \left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p}\left(\mathrm{l}\frac{1}{x} - 1\right), \quad \Delta^{2}.[p]^{p} = \int dx \left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p}\left(\mathrm{l}\frac{1}{x} - 1\right)^{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{n}.[p]^{p} = \int dx \left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p}\left(\mathrm{l}\frac{1}{x} - 1\right)^{n},$$

en supposant que $\Delta p = 1$ (*).

Nous ne nous arrèterons pas à donner les formules qui répondent aux intégrales et aux sommes de la fonction proposée ; mais nous terminerons cet article en remarquant que M. Laplace a trouvé, pour les différentielles et les différences de la fonction x^{m}, ramenée aussi à une intégrale définie, des formules très-élégantes, que nous ferons connaître lorsque nous montrerons la manière d'appliquer les intégrales définies à l'intégration des équations différentielles et aux différences.

(*) Il n'est peut-être pas inutile d'annoncer ici que les fonctions $[p]^{p}$, recommandées à l'attention des géomètres par Vandermonde, et ensuite par M. Kramp (981), ont été traitées en détail, sous la forme d'intégrales définies, par M. Legendre, qui a donné aussi les expressions de leurs différentielles, de leurs différences, construit une table très-étendue de leurs valeurs numériques, et leur a imposé une dénomination particulière, ainsi qu'on le verra dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI.

Recherche des valeurs des intégrales définies.

Recherche des valeurs des intégrales définies.

1164. Lorsque p est un nombre fractionnaire, l'intégrale........ $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$, sur laquelle nous sommes tombés en cherchant l'expression générale de $[\overset{p}{p}]$, est du nombre des transcendantes dont on ne connaît pas la nature ; cependant il suit du n° 1160, que dans le cas où $p=\frac{1}{2}$, on a, entre les limites o et 1, $\int dx\, l\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, valeur très-simple, mais qui ne convient qu'à l'intégrale définie : l'Analyse n'offre jusqu'à présent aucun moyen pour arriver à la valeur exacte de la même intégrale prise indéfiniment. La formule $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$ n'est pas la seule qui présente cette singularité ; Euler en a trouvé un grand nombre d'autres, mais par des méthodes très-particulières et très-diverses. On ferait un volume entier, si l'on entreprenait d'extraire les nombreux Mémoires qui ont été déjà publiés sur cette matière ; nous ne pouvons donc exposer dans cet ouvrage que les principaux résultats, et donner une idée des méthodes les plus générales dont on a fait usage pour y parvenir : l'indication exacte des sources, que l'on trouvera dans la Table, suppléera à ce que nous omettrons.

Les moyens qu'a employés Euler, pour trouver la valeur des intégrales définies, peuvent être rangés en trois classes ; dans la première sont ceux où il développe en tout ou en partie l'intégrale proposée. Il arrive souvent que la substitution des limites de x, simplifie le résultat et le ramène à une série dont la fonction génératrice est connue, ou à une autre intégrale dont on a la valeur. Il est visible que ce moyen peut être utilement modifié par le secours des transformations. La seconde classe comprend les relations nouvelles qui se déduisent des produits et des quotiens des intégrales définies ; à la troisième appartiennent tous les résultats qui s'obtiennent en différentiant l'intégrale

proposée, par rapport à des quantités qui n'y étaient pas d'abord supposées variables. Nous avons déjà montré, dans le n° 505, que ce moyen peut mener à des résultats difficiles à obtenir *à priori*.

1165. On voit, à la simple inspection des cas particuliers de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, rapportés dans le n° 400, que ces expressions se réduisent à un seul terme, lorsqu'on les prend entre les limites $x=0$ et $x=1$; l'arc A devenant égal au quart de la circonférence, on a les deux séries

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}, \qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$
$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2}, \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},$$
$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3\pi}{2.4.2}, \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$
$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\pi}{2.4.6.2}, \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$
$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\pi}{2.4.6.8.2}, \qquad \int\frac{x^9dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

etc.,

qui, d'après le tableau de la page 46 du second volume, ont pour termes généraux

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.......(2r-1)}{2.4.6...........2r}\frac{\pi}{2},$$
$$\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6...........2r}{3.5.7.......(2r+1)},$$

d'où il suit

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}.$$

Ce dernier résultat en fournit une infinité d'autres de même espèce, lorsqu'on y fait $x=z^n$; par cette transformation on obtient

$$n^2\int\frac{z^{2nr+n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{2nr+2n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}\ (*),$$

et posant, pour abréger, $2nr+n-1=p$, il vient

$$\int\frac{z^pdz}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{p+n}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{n(p+1)}\frac{\pi}{2},$$

(*) Désormais l'expression $\int A.\int B.\int C$ sera celle que nous employerons au lieu de $(\int A)(\int B)(\int C)$, et qu'il faudra bien distinguer de $\int A\int B\int C$, équivalente à $\int[A\int(B\int C)]$.

les limites de z étant encore les mêmes que celles de x, parce qu'on suppose que l'exposant n est positif. Cette dernière formule renferme des valeurs de produits dont on ne peut intégrer séparément aucun des facteurs; pour en donner un exemple, nous prendrons $p=0$, $n=2$, et nous aurons

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

La formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x-x^2}}$, en y faisant $x=z^2$, se change en $2\int\frac{z^{2m}dz}{\sqrt{1-z^2}}$; et l'on en trouve les valeurs entre $z=0$ et $z=1$, par ce qui précède.

A l'aide de ces résultats, on parvient à des séries fort simples pour l'intégrale

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{etc.}\right\},$$

en substituant au lieu des intégrales

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^{m+4}dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{etc.},$$

leurs valeurs prises entre les limites 0 et 1. Si l'on fait, par exemple, $m=0$, on trouvera

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1.9}{4.16}-\frac{1.9.25}{4.16.36}+\frac{1.9.25.49}{4.16.36.64}-\text{etc.}\right).$$

Nous renvoyons au nº 502, pour la valeur de l'intégrale........ $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, prise entre les limites 0 et 1.

1166. Les formules du numéro précédent donnent aussi

$$\frac{\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{2}{\pi}\,\frac{2.2.4.4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2r.2r}{1.3.3.5.5\ldots(2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Pour savoir ce que devient le premier membre, lorsqu'on pousse jusqu'à l'infini le nombre des facteurs du second, ou lorsqu'on suppose r infini, je fais $x^{2r}=z$: les limites de z sont les mêmes que celles

de x; mais on a

$$x = z^{\frac{1}{2r}}, \quad dx = \frac{1}{2r}\, z^{\frac{1}{2r}-1} dz,$$

$$\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{2}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}, \qquad \int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{1}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}.$$

Le rapport des différentielles étant $z^{\frac{1}{2r}}$, approche d'autant plus de z^0 ou de 1, que le nombre r augmente; et en passant à la limite, on peut regarder ce rapport comme égal à 1; il en sera de même de celui des intégrales, puisqu'elles commencent et finissent en même temps: on conclura donc de là

$$1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.\text{etc.}},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ 8.8.10.10.12.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.11.\text{etc.}},$$

ainsi qu'on l'a trouvé par une voie bien différente, dans le n° 989.

1167. Une transformation de l'équation

$$\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2},$$

conduit de même à la valeur de l'intégrale $\int e^{-t^2}dt$, prise entre les limites $t=0$, $t=$ infini. Si l'on fait $x=e^{-qt^2}$, cette équation devient

$$4q^2\left\{\int \frac{tdte^{-qt^2}.\,e^{-2qrt^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\}\left\{\int \frac{tdte^{-qt^2}.\,e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\} = \frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2};$$

posant ensuite $q(2r+1)=1$, et mettant dans le second membre la valeur de $2r+1$, tous les deux deviennent divisibles par q; puis divisant sous les radicaux par $2q$, on obtient

$$2\left\{\int \frac{tdte^{-t^2}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\}\left\{\int \frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\} = \frac{\pi}{2};$$

et comme la limite de $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$, lorsqu'on y fait $q=0$, est t^2, l'équation précédente se réduit alors à

$$2\{\int e^{-t^2}dt\}^2=\frac{\pi}{2},\ \text{d'où}\ \int e^{-t^2}dt=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Il est aisé de voir que le signe supérieur répond aux limites o et l'infini positif.

1168. Les formules de réduction, rapportées dans le tableau de la page 46 du second volume, donnent un grand nombre de résultats analogues aux précédens. On a, par celles qui sont marquées I et II,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(1-x^n)^{\frac{p}{q}+1}-q(m-n)\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{-(mq+np)},$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(1-x^n)^{\frac{p}{q}}+pn\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}-1}}{mq+np};$$

et entre les limites $x=0$ et $x=1$, cela se réduit à

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{q(m-n)\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{(mq+np)},$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{pn\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}-1}}{mq+np}.$$

La seconde de ces formules ramènera, de $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}$, à $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et la première, de $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, à...... $\int xdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1$, ou à $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}$, selon que m sera paire ou impaire; il n'entrera donc dans l'expression de l'intégrale....... $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}$ que la seule transcendante π. On trouvera sans peine que

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

et comme on a, d'après le numéro 1165, si m est impaire,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(m-2)(m-4)\ldots.5.3.1}{(m-1)(m-3)\ldots.6.4.2}\,\frac{\pi}{2},$$

et si m est paire,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(m-2)(m-4)\ldots.6.4.2}{(m-1)(m-3)\ldots.7.5.3},$$

il s'ensuit que dans le premier cas

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\ldots5.3.1}{(m-1)(m-3)\ldots6.4.2}\,\frac{\pi}{2},$$

et que, dans le second,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\ldots6.4.2}{(m-1)(m-3)\ldots7.5.3}.$$

On peut multiplier ces formules autant qu'on le voudra. Si l'on a, par exemple, $n=3$, $\frac{p}{q}=r-\frac{1}{3}$, $\frac{p}{q}=r-\frac{2}{3}$, on ramènera les deux intégrales

$$\int x^{m-1}dx(1-x^3)^{r-\frac{1}{3}},\qquad \int x^{m-1}dx(1-x^3)^{r-\frac{2}{3}},$$

aux six formules

$$A=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},\qquad B=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}},\qquad C=\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1}{2}.$$
$$A'=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},\qquad B'=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},\qquad C'=\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=1,$$

parmi lesquelles il n'y a, comme on le verra, n° 1173, qu'une seule transcendante distincte.

Par des comparaisons semblables à celles que nous avons faites dans les numéros précédens, Euler parvient aux relations suivantes :

$$\int\frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{AC'}{3n+1}=\frac{1}{3n+1}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},$$
$$\int\frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{A'B}{3n+1}=\frac{1}{3n+1}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}},$$
$$\int\frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2B'C}{3n+2}=\frac{1}{3n+2}\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Remarquant ensuite que les quantités A, B, C, A', B', C', ne contiennent point n, il en conclut que les équations ci-dessus subsisteront encore, si l'on y met à la place de $3n$ un nombre quelconque; et en écrivant $\lambda-1$ à la place de $3n$, dans la première et dans la seconde, et $\lambda-2$ dans la troisième, la comparaison des deux derniers résultats lui donne

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

De ces trois résultats, il en tire encore d'autres, en y faisant $x=z^n$, n étant un nombre quelconque, et posant $n\lambda=m$.

1169. L'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^4}$, développée dans le n° 384, se simplifie

beaucoup, quand on la prend entre les limites $x=0$ et x infini; car elle se réduit alors à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$.

En écrivant $m-1$ au lieu de m, dans le numéro cité, et changeant y en x, on a

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}.\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}.\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}.\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}\right)$$

....

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{rm\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{rm\pi}{n}.\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{r\pi}{n}}{1-x\cos\frac{r\pi}{n}}\right),$$

r désignant le nombre impair qui précède n, et si n est impaire, il faut, à cette expression, ajouter $+\frac{1}{n}\mathrm{l}(1+x)$, ou $-\frac{1}{n}\mathrm{l}(1+x)$, selon que m sera impaire ou paire; or on voit par ce développement, que l'intégrale proposée s'évanouit lorsque $x=0$: il suffit donc de trouver ce qu'elle devient quand on y fait x infini. Pour cela, nous allons considérer séparément la partie logarithmique et la partie circulaire.

1°. Quand x est infini, $\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}$ se réduit à $x-\cos\frac{r\pi}{n}$, et l'on a par conséquent

$$\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}=\mathrm{l}\left(x-\cos\frac{r\pi}{n}\right)=\mathrm{l}x+\mathrm{l}\left(1-\frac{1}{x}\cos\frac{r\pi}{n}\right)=\mathrm{l}x,$$

à cause que $\frac{1}{x}\cos\frac{r\pi}{n}$ s'évanouit. Si, pour abréger, on pose $\frac{\pi}{n}=\omega$, la réunion des fonctions logarithmiques formera la série

$$-\frac{2\,\mathrm{l}x}{n}\{\cos m\omega+\cos 3m\omega+\cos 5m\omega\ldots\ldots+\cos rm\omega\},$$

avec l'*appendice* $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$, si n est impaire. Cette série est comprise dans celles dont on a donné la somme n° 1013. Pour employer les formules de ce numéro, il faut y changer x en $r-1$, q en $m\omega$, faire $h=2$ et $p=m\omega$; on trouvera

$$S\cos rm\omega=\frac{\sin(r+1)m\omega}{2\sin m\omega},\quad -\frac{2lx}{n}S\cos rm\omega=-\frac{\sin(r+1)m\omega}{\sin m\omega}\frac{lx}{n}.$$

Dans le cas où n est paire, on a $r=n-1$; et le résultat que l'on vient d'obtenir se réduit par conséquent à zéro, à cause que m est nécessairement un nombre entier.

Si n est impaire, il faudra tenir compte de l'appendice $\pm\frac{lx}{n}$; mais on aura alors $r=n-2$, et

$$-\frac{2lx}{n}S\cos rm\omega=-\frac{\sin(n-1)m\omega}{\sin m\omega}\frac{lx}{n}=-\frac{\sin(m\pi-m\omega)}{\sin m\omega}\frac{lx}{n};$$

or, $\sin(m\pi-m\omega)=\pm\sin m\omega$, selon que m est impaire ou paire; il viendra, en conséquence,

$$-\frac{2lx}{n}S\cos rm\omega=\mp\frac{lx}{n}\frac{\sin m\omega}{\sin m\omega}\pm\frac{lx}{n},$$

ce qui se réduit encore à zéro.

La partie logarithmique de l'intégrale cherchée s'évanouissant ainsi dans tous les cas, il faut examiner ce que deviennent les fonctions circulaires qu'elle contient. Leur terme général est

$$\frac{2}{n}\sin rm\omega.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x\sin r\omega}{1-x\cos r\omega}\right);$$

l'arc indiqué s'évanouit lorsque $x=0$; il est égal au quart de la circonférence quand $x=\frac{1}{\cos r\omega}$, et il a pour tangente $-\frac{\sin r\omega}{\cos r\omega}=-\text{tang}\,r\omega$; quand x est infini. Dans ce dernier cas, il est donc égal à $\pi-r\omega$: on a donc, pour la valeur complète de l'intégrale cherchée, la série

$$\frac{2}{n}\{(\pi-\omega)\sin m\omega+(\pi-3\omega)\sin 3m\omega+(\pi-5\omega)\sin 5m\ldots+(\pi-r\omega)\sin rm\omega\},$$

qui se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{2}{n}\pi\{\sin m\omega+\sin 3m\omega+\sin 5m\omega+\text{etc.}\},$$
$$-\frac{2\omega}{n}\{\sin m\omega+3\sin 3m\omega+5\sin 5m\omega+\text{etc.}\}:$$

La somme de la première, déduite des formules du n° 1013, donne

$$\frac{2}{n}\pi S\sin rm\omega = \frac{\pi}{n}\,\frac{1-\cos(r+1)m\omega}{\sin m\omega}.$$

Celle de la seconde se tirerait des formules du n° 958; mais on y parvient immédiatement en différentiant, par rapport à ω, l'expression de $S\cos rm\omega$, rapportée plus haut: on trouve ainsi

$$-m\,\{\sin m\omega + 3\sin 3m\omega + 5\sin 5m\omega + \text{etc.}\} = \frac{m(r+1)\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} - \frac{m\sin(r+1)m\omega\cos m\omega}{2(\sin m\omega)^2},$$

d'où l'on conclut

$$Sr\sin rm\omega = -\frac{(r+1)\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} + \frac{\sin(r+1)m\omega\cos m\omega}{2(\sin m\omega)^2}$$
$$= -\frac{r\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} + \frac{\sin rm\omega}{2(\sin m\omega)^2}.$$

Maintenant si n est un nombre pair, on aura $r = n-1$,

$$\cos(r+1)m\omega = \cos nm\omega = \cos m\pi,$$
$$\sin(r+1)m\omega = \sin m\pi = 0,$$
$$S\sin rm\omega = \frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega}, \qquad Sr\sin rm\omega = -\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega},$$

enfin

$$\frac{2\pi}{n}S\sin rm\omega - \frac{2\omega}{n}Sr\sin rm\omega = \frac{2\pi}{n}\,\frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega} + \frac{2\omega}{n}\,\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega} = \frac{\pi}{n\sin m\omega},$$

à cause de $n\omega = \pi$.

Lorsque n est un nombre impair, il vient $r = n-2$,

$$\cos(r+1)m\omega = \cos(m\pi - m\omega) = \cos m\pi\cos m\omega,$$
$$\sin(r+1)m\omega = \sin(m\pi - m\omega) = -\cos m\pi\sin m\omega,$$

d'où l'on tire

$$\frac{2\pi}{n}S\sin rm\omega - \frac{2\omega}{n}Sr\sin rm\omega =$$
$$\frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\omega)}{n\sin m\omega} + \frac{\omega(n-1)\cos m\pi\cos m\omega}{n\sin m\omega} + \frac{\omega\cos m\pi\cos m\omega}{n\sin m\omega},$$

ce qui se réduit à $\frac{\pi}{n\sin m\omega}$, en observant que $n\omega = \pi$.

On voit donc que dans tous les cas, l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x}$, prise entre les limites $x = 0$ et x infini, est égale à $\frac{\pi}{n\sin m\omega}$, ou à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, ainsi que nous l'avons annoncé.

1179. Considérons encore, avec Euler, la formule $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$, en y supposant les nombres m, n et p, entiers et positifs (*). Si l'on fait d'abord $1-x^n=y^n$, on aura

$$x^m=(1-y^n)^{\frac{m}{n}},\quad mx^{m-1}dx=-my^{n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

d'où il résultera

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=-\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}};$$

mais en observant que les limites $x=0$ et $x=1$ répondent à $y=1$, $y=0$, on changera le signe de la seconde intégrale en changeant l'ordre de ses limites, et l'on en conclura que

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

lorsqu'on prend l'une et l'autre intégrales entre les limites 0 et 1. Rien n'empêchant qu'on écrive dans le second membre x, à la place de y, on voit par là que l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$, prise entre les limites 0 et 1, conserve la même valeur lorsque l'on y permute les exposans m et p; si donc on fait, pour abréger,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\varphi(m,p),\quad \int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=\varphi(p,m),$$

on aura cette équation remarquable

$$\varphi(m,p)=\varphi(p,m)\ldots\ldots\ldots(1).$$

Maintenant, en faisant usage de la formule I du tableau de la page 46 du deuxième volume, on aura

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{m-n}{m+p-n}\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}};$$

ce qui donne l'équation

(*) Parmi le grand nombre d'intégrales définies examinées par Euler, celle qui est rapportée ci-dessus et $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$, ayant été l'objet de recherches très-fécondes, ont paru à M. Legendre devoir porter une dénomination particulière, et il les appelle *intégrales Eulériennes.*

$$\varphi(m, p) = \frac{m-n}{m+p-n}\varphi(m-n, p)\ldots\ldots(2),$$

servant à réduire les cas où $m>n$ à ceux où $m<n$. On tirera de même de la formule II le moyen de rendre $p<n$.

Si, dans l'avant-dernière équation, on substitue m à $m-n$, il viendra

$$\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m}{m+p}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

d'où l'on tirera

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m+p}{m}\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}.$$

En répétant la réduction que présente cette dernière équation, on obtiendra

$$\int Xx^{m-1}dx = \frac{(m+p)(m+p+n)(m+p+2n)\ldots(m+p+in)}{m\quad(m+n)\quad(m+2n)\ldots\ldots\ldots(m+in)}\int Xx^{m+(i+1)n-1}dx,$$

en posant $(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = X$; de même

$$\int Xx^{r-1}dx = \frac{(r+p)(r+p+n)(r+p+2n)\ldots(r+p+in)}{r\quad(r+n)\quad(r+2n)\ldots\ldots(r+in)}\int Xx^{r+(i+1)n-1}dx;$$

ainsi la comparaison des intégrales proposées est ramenée à celle de deux intégrales de même forme, dans lesquelles l'exposant de x, hors de la parenthèse, peut être rendu aussi grand qu'on le voudra. Or, si l'on fait

$$(i+1)n = \omega,\ x^{m+\omega} = t,\ \text{d'où}\ x^{m+\omega-1}dx = \frac{dt}{m+\omega},\ x^{r+\omega-1}dx = \frac{t^{\frac{r-m}{m+\omega}}dt}{m+\omega},$$

les limites de t seront les mêmes que celles de x, et il viendra

$$\int Xx^{m+\omega-1}dx = \frac{1}{m+\omega}\int Tdt,\quad \int Xx^{r+\omega-1}dx = \frac{1}{m+\omega}\int Tt^{\frac{r-m}{m+\omega}}dt;$$

mais plus on augmente le nombre ω, plus $t^{\frac{r-m}{m+\omega}}$, rapport des différentielles, approche de t^0 ou de l'unité qu'il a pour limite; il en est de même des intégrales, puisqu'elles sont prises dans la même étendue, ou sont composées du même nombre d'élémens (471) : passant donc à cette limite, en supposant i infini, on aura

$$\frac{\int Xx^{m-1}dx}{\int Xx^{r-1}dx} = \frac{\varphi(m, p)}{\varphi(r, p)} = \frac{(m+p)(m+p+n)\ldots}{m\quad(m+n)\ldots\ldots} \times \frac{r(r+n)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(r+p)(r+p+n)\ldots\ldots}.$$

Remplaçons à présent r par $m+q$, il viendra

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,\,p)}=\frac{(m+p)(m+p+n)\ldots\ldots}{m(m+n)\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{(m+q)(m+q+n)\ldots\ldots\ldots}{(m+q+p)(m+q+p+n)\ldots};$$

équation dont le second membre demeure le même, lorsqu'on échange entr'elles les lettres p et q, et d'où il suit que

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,\,p)}=\frac{\varphi(m,q)}{\varphi(m+p,\,q)}\ldots\ldots\ldots(3).$$

Les équations (1), (2) et (3), renferment implicitement toutes les propriétés que nous avons à faire connaître relativement à la fonction φ; mais avant d'entrer dans ce détail, examinons les cas dans lesquels cette fonction a une valeur algébrique, ou ne dépend que de la circonférence du cercle.

1171. Lorsque $p=n$, on a seulement $\int x^{m-1}dx$, d'où l'on tire $\varphi(m,\,n)=\frac{1}{m}$; et en vertu de l'équation $\varphi(m,p)=\varphi(p,\,m)$, on en conclut que $\varphi(n,m)=\frac{1}{m}$, et que $\varphi(n,p)=\frac{1}{p}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$.

Quand $n-m=p$, on rend l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$ rationnelle, en faisant $\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}}=z$, d'où il résulte

$$\frac{x^m}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=z^m,\quad x^n=\frac{z^n}{1+z^n},\qquad n\,\mathrm{l}x=n\,\mathrm{l}z-\mathrm{l}(1+z^n),$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}-\frac{z^{n-1}dz}{1+z^n}=\frac{dz}{z(1+z^n)};$$

et avec ces expressions on obtient

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}.$$

Les valeurs de z qui correspondent à $x=0$ et à $x=1$, étant 0 et l'infini, ces dernières seront les limites de l'intégrale $\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$, qui, d'après le n° 1169, se réduit alors à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. On conclut de là que

$$\varphi(m,n-m)=\varphi(n-m,\,m)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\ldots\ldots\ldots(5).$$

3°. Si dans l'équation (3) on fait $q=n-m-p$, on en déduira

$$\varphi(m,\, p)\varphi(m+p,\, n-m-p)=\varphi(m,\, n-m-p)\varphi(n-p,\, p);$$

changeant ensuite dans la même équation (3), p en $n-m-p$, et q en $n-m$, elle deviendra

$$\varphi(m,\, n-m-p)\varphi(n-p,\, n-m)=\varphi(m,\, n-m)\varphi(n,\, n-m-p);$$

multipliant cette équation et la précédente, membre à membre, et supprimant le facteur commun $\varphi(m,\, n-m-p)$, on aura

$$\varphi(m,\, p)\varphi(m+p,\, n-m-p)\varphi(n-p,\, n-m)$$
$$=\varphi(n-p,\, p)\varphi(m,\, n-m)\varphi(n,\, n-m-p).$$

Or, d'après les équations (4) et (5),

$$\varphi(n,\, n-m-p)=\frac{1}{n-m-p},$$
$$\varphi(m+p,\, n-m-p)=\frac{\pi}{n\sin\frac{(m+p)\pi}{n}},$$
$$\varphi(m,\, n-m)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$
$$\varphi(n-p,\, p)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle donnera

$$\varphi(m,\, p)\varphi(n-p,\, n-m)=\frac{\pi\sin\frac{(m+p)\pi}{n}}{n(n-m-p)\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{p\pi}{n}}\ldots\ldots(6);$$

cette équation nous fait voir que la valeur de $\varphi(n-p,\, n-m)$, ou $\varphi(n-m,\, n-p)$, ne dépend que de celle de $\varphi(m,\, p)$ et des fonctions circulaires. M. Legendre, à qui l'on doit cette remarque et les suivantes, regarde la formule $\varphi(n-m,\, n-p)$, comme le *complément* de $\varphi(m,\, p)$, parce que les exposans de l'une réunis à leurs correspondans de l'autre, font la même somme n.

L'équation (6) nous conduit à deux résultats particuliers qu'il est bon de connaître. Lorsque $p=m$, on a

$$\varphi(m,\, m)\varphi(n-m,\, n-m)=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}\ldots\ldots\ldots(7);$$

et quand $m = n-2p$, il vient

$$\varphi(n-2p, p)\varphi(n-p, 2p) = \frac{\pi}{np \sin \frac{2p\pi}{n}} \ldots\ldots\ldots (8).$$

L'équation (3) peut aussi se transformer en

$$\varphi(m, p)\varphi(m+p, n-m) = \varphi(m, n-m)\varphi(n, p);$$

en y changeant q en $n-m$; et mettant alors les valeurs des fonctions du second membre, on obtient

$$\varphi(m, p)\varphi(m+p, n-m) = \frac{\pi}{np \sin \frac{m\pi}{n}} \ldots\ldots (9).$$

La supposition de $p = m$ change cette dernière en

$$\varphi(m, m)\varphi(2m, n-m) = \frac{\pi}{nm \sin \frac{m\pi}{n}} \ldots\ldots (10);$$

et ce résultat, étant comparé à l'équation (8), conduit à

$$\varphi(p, p) = \varphi(n-2p, p) . 2 \cos \frac{p\pi}{n} \ldots\ldots\ldots (11).$$

Maintenant que nous avons fait dépendre les valeurs de

$$\varphi(n-p, n-p), \quad \varphi(n-2p, p), \quad \varphi(n-p, 2p),$$

de celle de $\varphi(p, p)$, ou de $\varphi(m, m)$, il faut chercher à simplifier, autant qu'il est possible, la forme de cette fonction.

1172. Pour cela, faisons $1 - x^n = \frac{z^n}{4x^n}$; d'où $x = (\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-z^n})^{\frac{1}{n}}$,

$$\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}} = \frac{(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-z^n})^{\frac{m}{n}-1}}{(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-z^n})^{1-\frac{p}{n}}} \times \mp \frac{1}{4} \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{1-z^n}}.$$

Quand $p = m$, on aura

$$\frac{(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-z^n})^{\frac{m}{n}-1}}{(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)})^{1-\frac{m}{n}}} = [(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^n})(\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^n})]^{\frac{m}{n}-1}.$$

$$= (\tfrac{1}{4}z^n)^{\frac{m}{n}-1} = 2^{-\frac{2m}{n}+2} z^{m-n},$$

et par conséquent

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} = 2^{-\frac{2m}{n}} \int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1-z^n}},$$

en prenant le signe + à cause que l'intégrale proposée est positive.

Les limites de l'intégrale en z s'obtiennent en considérant l'équation $4x^n(1-x^n)=z^n$. Si l'on y suppose $x=0$ et $x=1$, il vient, dans l'un et l'autre cas, $z=0$, ce qui ne donne que la même limite; mais on en trouve deux en prenant l'intégrale relative à x en deux fois, savoir, depuis $x=0$ jusqu'à la valeur de x qui répond à $z=1$, et depuis cette dernière jusqu'à $x=1$, d'où résulte $z=0$. Or, quand $z=1$, on a $x^n=\frac{1}{2}$, ou $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$; ainsi prendre l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, et ensuite depuis $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ jusqu'à $x=1$, ce sera la même chose que de prendre l'intégrale $\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$ depuis 0 jusqu'à 1, et depuis 1 jusqu'à 0, ou prendre le double de sa valeur entre les limites $z=0$ et $z=1$. Il suit de là que

$$\varphi(m,m)=2^{1-\frac{2m}{n}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}=2^{1-\frac{2m}{n}}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\ldots\ldots(12),$$

puisqu'il est indifférent d'écrire x pour z.

Ce résultat ramène à une grande simplicité les valeurs de

$$\varphi(1,1),\quad \varphi(2,2),\quad \varphi(3,3),\quad \text{etc.}$$

Si l'on compare les équations (7) et (12), il en naîtra cette relation remarquable

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\cdot\int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}\ldots\ldots(13).$$

Si l'on fait $1-x^n=x^nz^n$, on aura une transformée qui, dans le cas où n sera paire, et où $m+p=\frac{1}{2}n$, donnera

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,m)=\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots(14),$$

les limites étant $z=0$ et $z=$ infini.

Si, dans la transformée obtenue plus haut, par la supposition de $1-x^n=\frac{z^n}{4x^n}$, on fait $m-p=\frac{1}{2}n$, en observant que

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^n}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^{\frac{1}{2}n}}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+z^{\frac{1}{2}n}},$$

et changeant z en z^2, on en tirera

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n+p,\ p) = 2^{-\frac{2p}{n}}\left[\int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{1-z^n}} - \int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\right]\ldots\ldots(15).$$

En posant $p=\frac{1}{2}n$, on aurait immédiatement

$$\varphi(m,\ \tfrac{1}{2}n) = \int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\ldots\ldots\ldots(16).$$

On obtient encore une transformée utile, en faisant $1-x^n=\frac{1}{4}z^2x^{2n}$, ou $x^{-n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+z^2}$, lorsque $m+2p=n$; il vient pour ce cas, qui suppose $p<\frac{1}{2}n$,

$$\varphi(n-2p,\ p) = 2^{-\frac{2p}{n}}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots(17),$$

l'intégrale étant prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=$ infini. En combinant ce résultat avec l'équation (11), et changeant p en m, on trouve

$$\varphi(m,\ m) = 2^{1-\frac{2m}{n}}\cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots(18);$$

et en comparant celui-ci avec l'équation (12), on en déduit

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots(19),$$

en observant que m soit toujours moindre que $\frac{1}{2}n$.

Cette dernière équation nous offre une particularité remarquable. Si l'on fait, dans le premier membre $x=1-y^2$, et $z=y^2-1$ dans le second, les intégrales à obtenir sont alors

$$\int\frac{(1-y^2)^{m-1}dy}{\sqrt{n-\frac{n(n-1)}{2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}y^4-\text{etc.}}},$$

quand l'exposant n est impair; mais la première doit être prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et la seconde, depuis $y=1$ jusqu'à $y=$ infini. Il suit de là que si l'on désigne par P le premier résultat, et par P' le second, on aura

$$P = P'\cos\frac{m\pi}{n},$$

c'est-à-dire, que les deux parties de la même intégrale sont entr'elles dans le rapport de $\cos\frac{m\pi}{n}$ à 1.

Les équations (14) et (18) combinées, donnent

$$\varphi(m,\, m) = 2^{1-\frac{2m}{n}} \cos\frac{m\pi}{n}\, \varphi(\tfrac{1}{2}n-m,\, m) \ldots\ldots (20);$$

et comme, en vertu de l'équation (1), la fonction $\varphi(\frac{1}{2}n-m,\, m)$ est la même que $\varphi(m,\, \frac{1}{2}n-m)$, il est visible que dans le cas où n est paire, toutes les valeurs que peut prendre le second membre de l'équation ci-dessus répondent à celles de m, depuis o jusqu'à $\frac{1}{4}n$.

Si l'on met $\frac{1}{2}n-m$ à la place de m, dans l'équation (20), il vient

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,\, \tfrac{1}{2}n-m) = 2^{\frac{2m}{n}} \sin\frac{m\pi}{n}\, \varphi(m,\, \tfrac{1}{2}n-m),$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(m,\, m) = 2^{1-\frac{4m}{n}} \cot\frac{m\pi}{n}\, \varphi(\tfrac{1}{2}n-m,\, \tfrac{1}{2}n-m) \ldots\ldots (21),$$

équation qui donnera la valeur de $\varphi(m,\, m)$ pour tous les cas, lorsqu'on la connaîtra pour ceux dans lesquels m ne surpasse pas $\frac{1}{4}n$.

Si, dans l'équation (14), on change aussi m en $\frac{1}{2}n-m$, on aura, en vertu de l'équation (1), celle-ci

$$\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}} = \int\frac{z^{\frac{1}{2}n-m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}} \ldots\ldots (22),$$

dont le second membre résulte immédiatement du premier, en écrivant $\frac{1}{z}$ au lieu de z; et en la comparant à l'équation (19), on en conclura la suivante

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{x^{\frac{1}{2}n-m-1}dx}{\sqrt{1+x^n}}.$$

1173. Maintenant, passons à la discussion des différens cas que peut présenter l'évaluation de la fonction $\varphi(m,p)$, pour diverses valeurs de n.

1°. Soit $n=2$; nous aurons seulement ces trois fonctions

$$\varphi(1,\, 1),$$
$$\varphi(2,\, 1), \qquad \varphi(2,\, 2);$$

et d'après les équations (4) et (5),

$$\varphi(2,\ 1) = 1, \qquad \varphi(2,\ 2) = \tfrac{1}{2};$$
$$\varphi(1,\ 1) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Soit $n = 3$; nous aurons les fonctions

$$\varphi(1,\ 1),$$
$$\varphi(2,\ 1), \qquad \varphi(2,\ 2),$$
$$\varphi(3,\ 1), \qquad \varphi(3,\ 2), \qquad \varphi(3,\ 3);$$

en excluant les fonctions $\varphi(1,\ 2)$, $\varphi(1,\ 3)$, etc., qui sont identiques avec $\varphi(2,\ 1)$, $\varphi(3,\ 1)$, etc. L'équation (3), lorsqu'on y fait $m = 1$, $p = 1$, $q = 2$, donne, en changeant $\varphi(1,\ 2)$ en $\varphi(2,\ 1)$,

$$\varphi(1,\ 1)\ \varphi(2,\ 2) = \varphi(2,\ 1)\ \varphi(3,\ 1),$$

d'où l'on tire la valeur de $\varphi(2,\ 2)$, au moyen de celles de $\varphi(1,\ 1)$, $\varphi(2,\ 1)$, $\varphi(3,\ 1)$. Les deux dernières sont connues : l'une dépend de la quadrature du cercle, en vertu de l'équation (5), et l'autre est déterminée par l'équation (4). En représentant donc par A la transcendante $\varphi(1,\ 1)$, et faisant, pour abréger,

$$\varphi(2,\ 1) = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} = \alpha,$$

nous aurons

$$\varphi(3,\ 1) = 1, \qquad \varphi(3,\ 2) = \tfrac{1}{2}, \qquad \varphi(3,\ 3) = \tfrac{1}{3},$$
$$\varphi(2,\ 1) = \alpha, \qquad \varphi(2,\ 2) = \frac{\alpha}{A},$$
$$\varphi(1,\ 1) = A;$$

d'où l'on voit que tous les cas que peut présenter l'intégrale....... $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-p}}}$, ne dépendent que de la seule transcendante $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, égale à $2^{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$, ou à $2^{-\frac{2}{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}$, en vertu des équations (12) et (17), et comprise dans les fonctions elliptiques (411, 425, 504).

3°. Soit $n=4$; nous aurons les dix fonctions

$$\begin{array}{llll}
\varphi(1,\ 1), & & & \\
\varphi(2,\ 1), & \varphi(2,\ 2), & & \\
\varphi(3,\ 1), & \varphi(3,\ 2), & \varphi(3,\ 3), & \\
\varphi(4,\ 1), & \varphi(4,\ 2), & \varphi(4,\ 3), & \varphi(4,\ 4);
\end{array}$$

l'équation (3) donne ces relations

$$\begin{aligned}
\varphi(1,\ 1)\ \varphi(2,\ 2) &= \varphi(2,\ 1)\ \varphi(3,\ 1),\\
\varphi(1,\ 1)\ \varphi(3,\ 2) &= \varphi(3,\ 1)\ \varphi(4,\ 1),\\
\varphi(2,\ 1)\ \varphi(3,\ 3) &= \varphi(3,\ 1)\ \varphi(4,\ 2).
\end{aligned}$$

On a par l'équation (4) les fonctions dans lesquelles le premier nombre est 4; l'équation (5) ramène à la quadrature du cercle toutes celles dans lesquelles la somme des deux nombres est égale à 4 : il ne reste donc à déterminer que les quatre fonctions

$$\varphi(1,\ 1),\quad \varphi(2,\ 1),\quad \varphi(3,\ 2),\quad \varphi(3,\ 3),$$

et au moyen des relations ci-dessus, on fera dépendre les trois dernières de la première; mais nous observerons que les équations (7) et (8) donneront immédiatement $\varphi(3,\ 3)$ par $\varphi(1,\ 1)$, $\varphi(2,\ 1)$ par $\varphi(3,\ 2)$. La seule transcendante $\varphi(1,\ 1)$ suffira donc encore pour ce cas; elle se ramène, d'après les équations (12) et (18), à $2^{\frac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ et à $\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}$, et rentre ainsi dans les transcendantes elliptiques. En désignant par A, comme le fait Euler, la transcendante $\varphi(2,\ 1)$, et par α et β les fonctions $\varphi(3,\ 1)$, $\varphi(2,\ 2)$, qui se rapportent à la quadrature du cercle, on formera ce tableau :

$$\begin{array}{llll}
\varphi(4,\ 1)=1, & \varphi(4,\ 2)=\frac{1}{2}, & \varphi(4,\ 3)=\frac{1}{3}, & \varphi(4,\ 4)=\frac{1}{4};\\
\varphi(3,\ 1)=\alpha, & \varphi(3,\ 2)=\frac{\beta}{A}, & \varphi(3,\ 3)=\frac{\alpha}{2A}, & \\
\varphi(2,\ 1)=A, & \varphi(2,\ 2)=\beta, & & \\
\varphi(1,\ 1)=\frac{\alpha A}{\beta}. & & &
\end{array}$$

4°. Soit $n=5$; la fonction $\varphi(m,\ p)$ présentera pour ce cas quinze formes diverses, en excluant les permutations données par $\varphi(p,\ m)$; l'équation (3) fournit alors les relations

$$\varphi(2,1)\,\varphi(3,3)=\varphi(3,2)\,\varphi(5,1),$$
$$\varphi(3,1)\,\varphi(4,2)=\varphi(3,2)\,\varphi(5,1),$$
$$\varphi(2,2)\,\varphi(4,3)=\varphi(3,2)\,\varphi(5,2),$$
$$\varphi(3,1)\,\varphi(4,4)=\varphi(4,1)\,\varphi(5,3),$$

qui, jointes à celles que nous avons employées pour le cas de $n=4$, donnent le moyen de déterminer six fonctions, à quoi réunissant les cinq fonctions de la forme $\varphi(5,p)$, égales à $\frac{1}{p}$, en vertu de l'équation (4), puis les fonctions $\varphi(3,2)=\beta$ et $\varphi(4,1)=\alpha$, dépendantes du cercle à cause que $m+p=5$, il restera seulement deux transcendantes irréductibles. Choisissant les fonctions $\varphi(3,1)=A$, $\varphi(2,2)=B$, on aura le tableau suivant :

$$\varphi(5,1)=1,\quad \varphi(5,2)=\tfrac{1}{2},\quad \varphi(5,3)=\tfrac{1}{3},\quad \varphi(5,4)=\tfrac{1}{4},\quad \varphi(5,5)=\tfrac{1}{5},$$
$$\varphi(4,1)=\alpha,\quad \varphi(4,2)=\frac{\beta}{A},\quad \varphi(4,3)=\frac{\beta}{2B},\quad \varphi(4,4)=\frac{\alpha}{3A},$$
$$\varphi(3,1)=A,\quad \varphi(3,2)=\beta,\quad \varphi(3,3)=\frac{\beta^2}{\alpha B},$$
$$\varphi(2,1)=\frac{\alpha B}{\beta},\quad \varphi(2,2)=B,$$
$$\varphi(1,1)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

Ce tableau montre que l'on aurait pu également prendre les fonctions $\varphi(2,2)$ et $\varphi(1,1)$ pour y rapporter les autres. Les équations (7), (10) et (11), offrent les moyens de rapporter immédiatement

$$\varphi(4,4),\quad \varphi(4,2),\quad \varphi(3,1)\ \text{à}\ \varphi(1,1),$$
$$\varphi(3,3),\quad \varphi(4,3),\quad \varphi(2,1)\ \text{à}\ \varphi(2,2);$$

et d'après les équations (12) et (18), on a

$$\varphi(1,1)=2^{\frac{3}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}=2^{\frac{3}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^5}},$$
$$\varphi(2,2)=2^{\frac{1}{5}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^5}}=2^{\frac{1}{5}}\cos\frac{2\pi}{5}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^5}}.$$

En continuant cette énumération, et ne faisant usage que des relations particulières que fournit immédiatement l'équation (3), Euler a trouvé que les différens cas de la formule $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, pouvaient se

rameuer en général aux suivans :

$$\varphi(n-2,\ 1),\quad \varphi(n-3,\ 2),\quad \varphi(n-4,\ 3),\quad \varphi(n-5,\ 4),\quad \text{etc.},$$

dont le nombre, lorsqu'on exclut, comme on le doit, les permutations des exposans m et p, est $\frac{n-1}{2}$, quand n est impaire, et $\frac{n-2}{2}$, quand n est paire.

1174. La formule générale de cette réduction n'était cependant pas connue d'Euler; c'est M. Legendre qui l'a obtenue, à peu près comme il suit.

Si, dans l'équation (3), on fait $m=n-p-k$, et $q=1$, elle devient

$$\frac{\varphi(n-p-k,\ p)}{\varphi(n-p-k+1,\ p)}=\frac{\varphi(n-p-k,\ 1)}{\varphi(n-k,\ 1)}\ldots\ldots(3'),$$

et par son moyen on déduit $\varphi(n-p-k,p)$ de $\varphi(n-p-k+1,\ p)$, lorsqu'on connaît les fonctions du second membre, dans lesquelles le deuxième élément de la fonction est égal à l'unité; or, ces dernières s'expriment par des valeurs de $\varphi(m,\ p)$, dans lesquelles $m+p=n-1$.

En effet, si on prend d'abord $k=1$, l'équation précédente se change en

$$\frac{\varphi(n-p-1,\ p)}{\varphi(n-p,\ p)}=\frac{\varphi(n-p-1,\ 1)}{\varphi(n-1,\ 1)},$$

d'où l'on tire

$$\varphi(n-p-1,\ 1)=\frac{\varphi(n-p-1,\ p)\,\varphi(n-1,\ 1)}{\varphi(n-p,\ p)}=\varphi(n-p-1,p)\,\frac{\sin p\omega}{\sin\omega}\ldots(23),$$

en y mettant les valeurs de $\varphi(n-p,p)$, $\varphi(n-1,\ 1)$, fournies par l'équation (5), et en y faisant $\frac{\pi}{n}=\omega$.

Maintenant si, dans l'expression de $\varphi(n-p-1,\ 1)$, on change p en $p+k-1$, on trouvera

$$\varphi(n-p-k,\ 1)=\varphi(n-p-k,\ p+k-1)\,\frac{\sin(p+k-1)\omega}{\sin\omega};$$

puis faisant dans cette dernière $p=0$, on obtiendra

$$\varphi(n-k,\ 1)=\varphi(n-k,\ k-1)\,\frac{\sin(k-1)\omega}{\sin\omega},$$

et avec ces valeurs, on transforme l'équation (3') en

$$\frac{\varphi(n-p-k,\ p)}{\varphi(n-p-k+1,\ p)}=\frac{\varphi(n-p-k,\ p+k-1)}{\varphi(n-k,\ k-1)}\cdot\frac{\sin(p+k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}.$$

Les fonctions du second membre de celle-ci satisfaisant à la condition que la somme des deux nombres compris dans φ égale $n-1$, sont nécessairement déterminées par un seul de ces nombres. En représentant donc, pour abréger, $\varphi(n-p-1, p)$ par $\varphi(p)$, l'équation précédente se changera en

$$\frac{\varphi(n-p-k, p)}{\varphi(n-p-k+1, p)} = \frac{\varphi(p+k-1)}{\varphi(k-1)} \frac{\sin(p+k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}.$$

Posant ensuite $k=2$, $=3$, etc., on trouvera successivement

$$\varphi(n-p-2, p) = \varphi(p) \frac{\varphi(p+1)}{\varphi(1)} \frac{\sin(p+1)\omega}{\sin\omega},$$
$$\varphi(n-p-3, p) = \varphi(n-p-2) \frac{\varphi(p+2)}{\varphi(2)} \frac{\sin(p+2)\omega}{\sin 2\omega},$$
etc.,

d'où l'on s'élevera sans peine à

$$\left.\begin{aligned}\varphi(n-p-k, p) = {} & \frac{\varphi(p)\varphi(p+1)\varphi(p+2)\ldots\varphi(p+k-1)}{\varphi(1)\varphi(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\varphi(k-1)} \\ & \times \frac{\sin(p+1)\omega\sin(p+2)\omega\ldots\sin(p+k-1)\omega}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\ldots\ldots\ldots\sin(k-1)\omega}\end{aligned}\right\}\ldots(24),$$

équation désignée par (k) à la page 228 du premier volume des *Exercices de Calcul intégral*, et faisant connaître la fonction φ, lorsque la somme de ses élémens égale $n-k$.

Lorsque $m+p=n+k$, on a $m=n-p+k$; et faisant toujours $q=1$, l'équation (3) donne

$$\frac{\varphi(n-p+k, p)}{\varphi(n-p+k+1, p)} = \frac{\varphi(n-p+k, 1)}{\varphi(n+k, 1)} \ldots\ldots(3'').$$

On a d'abord, par l'équation (2),

$$\varphi(n+k, 1) = \frac{k}{k+1}\varphi(k, 1);$$

puis changeant, dans l'équation (23), p en $n-k-1$, on en tire

$$\varphi(k, 1) = \varphi(k, n-k-1)\frac{\sin(n-k-1)\omega}{\sin\omega},$$

expression qui revient à

$$\varphi(k, 1) = \varphi(k)\frac{\sin(k+1)\omega}{\sin\omega},$$

puisque
$$\varphi(k, n-k-1) = \varphi(n-k-1, k) = \varphi(k),$$

en vertu de l'équation (1), et que

$$\sin(n-k-1)\omega = \sin(n-k-1)\frac{\pi}{n} = \sin(k+1)\omega.$$

Changeant encore, dans l'équation (23), p en $p-k-1$, elle donnera

$$\varphi(n-p+k,1) = \varphi(p-k-1)\frac{\sin(p-k-1)\omega}{\sin\omega}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3''), et renversant chacun de ses membres, on aura enfin

$$\frac{\varphi(n-p+k+1,p)}{\varphi(n-p+k,p)} = \frac{k}{k+1}\,\frac{\varphi(k)}{\varphi(p-k-1)}\,\frac{\sin(k+1)\omega}{\sin(p-k-1)\omega}.$$

Cette dernière formule rattache $\varphi(n-p+1,p)$ à $\varphi(n-p,p)$, donnée par l'équation (5); mais il faudrait alors trouver la valeur de $\varphi(0)$, ce qui n'est pas sans quelque difficulté; et il paraît plus simple de commencer par prendre $k=1$, et de chercher immédiatement $\varphi(n-p+1,p)$, en faisant $m=n-p$ et $q=1$, dans l'équation (3), qui devient alors

$$\frac{\varphi(n-p,p)}{\varphi(n-p+1,p)} = \frac{\varphi(n-p,1)}{\varphi(n,1)},$$

et donne

$$\varphi(n-p+1,p) = \frac{\varphi(n-p,p)\varphi(n,1)}{\varphi(n-p,1)},$$

valeur que les équations (4), (5) et (23) transforment en

$$\varphi(n-p+1,p) = \frac{\omega}{\sin p\omega}\,\frac{\sin\omega}{\sin(p-1)\omega.\varphi(p-1)}.$$

On a ensuite

$$\varphi(n-p+2,p) = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{\varphi(p-1)}\,\frac{\varphi(1)}{\varphi(p-2)}\,\frac{\sin\omega\sin 2\omega}{\sin p\omega\sin(p-1)\omega\sin(p-2)\omega};$$

et remontant ainsi de proche en proche, en faisant $k=2, =3, =4$, etc., on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}\varphi(n-p+k+1,p) = {} & \frac{1}{k+1}\,\frac{\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(k)}{\varphi(p-1)\varphi(p-2)\ldots\varphi(p-k-1)}\\ & \times\frac{\omega\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(k+1)\omega}{\sin p\omega\sin(p-1)\omega\sin(p-2)\omega\ldots\sin(p-k-1)\omega}\end{aligned}\right\}\ldots(25),$$

équation qui, lorsqu'on y change k en $k-1$, devient l'équation (n)

de la page 230 du premier volume des *Exercices de Calcul intégral*, et qui fait connaître les valeurs de la fonction φ, lorsque la somme de ses élémens est $n+k+1$, le cas où cette somme est $n+1$ ayant été considéré à part.

M. Legendre observe que la formule (24) pourrait embrasser le cas où $m+p=n+k$, en donnant à k le signe $-$; mais il faudrait d'abord calculer la valeur de $\varphi(0)$ et celle de $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$, etc., ce qu'on évite par l'emploi des deux formules (24) et (25).

1175. Outre l'importante réduction exprimée par ces formules; on a encore, pour simplifier le câlcul des transcendantes contenues dans $\varphi(m, p)$, les remarques faites, d'après M. Legendre, dans les n°s 1171, 1172, qui ramènent cette fonction au cas particulier $\varphi(m, m)$, lorsque n est impaire, et qui, faisant dépendre cette dernière de.... $\varphi(\frac{1}{2}n-m, \frac{1}{2}n-m)$, par l'équation (21), lorsque n est paire, réduisent à $\frac{n}{4}$ ou à $\frac{n-2}{4}$, le nombre des transcendantes distinctes.

Avec ces formules, il a d'abord ramené aux transcendantes elliptiques celles qui répondent au cas où $n=3$, $n=6$, $n=8$, $n=12$; et depuis il a enrichi ce sujet de beaucoup de détails nouveaux, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux *Exercices de Calcul intégral.*

1176. Ce procédé conduit à une sommation remarquable. On a vu, dans le n° 1171, que

$$\varphi(n-m, m) = \int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; si l'on développe en série ordonnée suivant les puissances de x, la quantité $\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$, qu'on intègre après avoir multiplié par $x^{n-m-1}dx$, et qu'on fasse ensuite $x=1$, il viendra

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m} + \frac{n-m}{n(2n-m)} + \frac{(n-m)(2n-m)}{n.2n(3n-m)} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n.2n.3n(4n-m)} + \text{etc.}$$

1177. Pour obtenir par des séries convergentes, la valeur de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, Euler la partage en deux parties, l'une prise entre les

limites $x=0$ et $x^n=\frac{1}{2}$, et l'autre entre $x^n=\frac{1}{2}$ et $x=1$; nommant M la première, P la seconde, et formant la série par le développement de $\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, suivant les puissances ascendantes de x, il trouve

$$M=\frac{1}{\sqrt[n]{2^m}}\left\{\frac{1}{m}+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+m}+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+m}\right.$$
$$\left.+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+m}+\text{etc.}\right\},$$

résultat dont chaque terme est moindre que la moitié de celui qui le précède. Faisant ensuite $1-x^n=y^n$, il change la formule proposée en $-\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ (1170), qu'il faut prendre entre les limites $y^n=\frac{1}{2}$ et $y^n=0$; et l'ordre de ces limites étant renversé, on a

$$P=\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

ou

$$P=\frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left\{\frac{1}{p}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+p}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p}\right.$$
$$\left.+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p}+\text{etc.}\right\},$$

puis enfin $\varphi(m,p)=M+P$.

Lorsque $m=p$, les séries M et P deviennent identiques, et l'on a seulement

$$\varphi(m,\ m)=\frac{2}{\sqrt[n]{2^m}}\left\{\frac{1}{m}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+m}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\,\frac{1}{2n+m}\right.$$
$$\left.+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\,\frac{1}{3n+m}+\text{etc.}\right\}.$$

Soit, pour exemple, la fonction $\varphi(2,2)$, de laquelle dépend $\varphi(m,p)$, lorsque $n=3$; on obtiendra

$$\varphi(2,\ 2)=2^{\frac{1}{3}}\left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{1}{11}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{10}{24}\cdot\tfrac{1}{14}+\text{etc.}\right\}$$
$$=0{,}54325\sqrt[3]{2}=0{,}68445.$$

La valeur de $\varphi(2,1)$, qui s'obtient immédiatement dans ce cas (1173), étant 1,20920, et $\varphi(2,2)=\frac{\varphi(2,\ 1)}{\varphi(1,\ 1)}$, on aura $\varphi(1,1)=1{,}76665$, et tout sera connu.

1178. L'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ peut se développer aussi en produits infinis. On a trouvé dans le n° 1170, que

$$\frac{\int Xx^{m-1}dx}{\int Xx^{r-1}dx}=\frac{(m+p)(m+p+n)(m+p+2n)\ldots}{m(m+n)\ldots\ldots\ldots\ldots}\times\frac{r(r+n)(r+2n)\ldots\ldots\ldots}{(r+p)(r+p+n)\ldots\ldots\ldots},$$

ce qu'on peut écrire ainsi

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}}{\int x^{r-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}}=\frac{r}{m}\,\frac{(m+p)(r+n)(m+p+n)(r+2n)\ldots\ldots}{(m+n)(r+p)(m+2n)(r+p+n)\ldots\ldots};$$

on rendra possible l'intégration de la formule qui est au dénominateur, en faisant $r=n$, et, entre les limites $x=0$ et $x=1$, on aura

$$\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{1}{p},$$

d'où l'on déduira

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{n}{mp}\cdot\frac{2n(m+p)}{(m+n)(p+n)}\cdot\frac{3n(m+p+n)}{(m+2n)(p+2n)}\cdot\frac{4n(m+p+2n)}{(m+3n)(p+3n)}\cdot\text{etc.}$$

On pourrait obtenir un pareil développement de l'intégrale......... $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p$, et l'on aurait par ce moyen l'expression en produits infinis, des produits limités qui composent le développement que nous en avons donné dans le n° 1159. Il est visible que cette transformation revient à celle qui a été effectuée sur les factorielles, dans le n° 988.

1179. La différentiation de l'équation précédente, par rapport à m, a conduit Euler à un théorème du genre de celui qui termine le n° 1168. En posant

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=M,$$

on pourra donner à cette équation la forme

$$\left.\begin{aligned}M=&\frac{n}{p}\cdot\frac{2n}{p+n}\cdot\frac{3n}{p+2n}\cdot\frac{4n}{p+3n}\cdot\text{etc.}\\ \times&\frac{m+p}{m}\cdot\frac{m+p+n}{m+n}\cdot\frac{m+p+2n}{m+2n}\cdot\text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

en séparant des autres les facteurs qui contiennent la lettre m; pre-

nant alors, par rapport à m, la différentielle du logarithme de chaque membre, on trouvera

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dm}=\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m+p+n}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+p+2n}-\frac{1}{m+2n}+\text{etc.};$$

considérant ensuite la fonction

$$V=\frac{v^{m+p}}{m+p}-\frac{v^m}{m}+\frac{v^{m+p+n}}{m+p+n}-\frac{v^{m+n}}{m+n}+\frac{v^{m+p+2n}}{m+p+2n}-\frac{v^{m+2n}}{m+2n}+\text{etc.},$$

on en déduira, par la différentiation relative à v,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dv}&=v^{m+p-1}-v^{m-1}+v^{m+p+n-1}-v^{m+n-1}+v^{m+p+2n-1}-v^{m+2n-1}+\text{etc.}\\&=v^{m+p-1}(1+v^n+v^{2n}+\text{etc.})-v^{m-1}(1+v^n+v^{2n}+\text{etc.})\\&=\frac{v^{m+p-1}-v^{m-1}}{1-v^n},\end{aligned}$$

d'où, par l'intégration,

$$V=\int\frac{v^{m+p-1}-v^{m-1}}{1-v^n}\,dv.$$

Or, comme le développement de V s'évanouit lorsque $v=0$, et devient celui de $\frac{1}{M}\frac{dM}{dm}$, quand on fait $v=1$, il suit de là qu'entre les limites $v=0$ et $v=1$, on a

$$\int\frac{v^{m+p-1}-v^{m-1}}{1-v^n}\,dv=\frac{1}{M}\frac{dM}{dm}.$$

Mettant ensuite pour M et $\frac{dM}{dm}$, leur expression en intégrales définies, en observant que

$$\frac{dM}{dm}=\int x^{m-1}dx\,lx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

et en changeant v en x, on obtient cette équation remarquable,

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}\cdot\int\frac{x^{m+p-1}-x^{m-1}}{1-x^n}\,dx=\int\frac{x^{m-1}dx\,lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

où toutes les intégrales sont prises entre les limites $x=0$ et $x=1$.

Digression sur 1180. Reprenons l'expression de $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$, obtenue dans le

n° 1178. Les facteurs du second membre étant groupés dans l'ordre suivant, les expressions des sinus et des cosinus en produits infinis.

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{n(m+p)}{p(m+n)}\cdot\frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)}\cdot\frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)}\cdot\frac{4n(m+p+3n)}{(p+3n)(m+4n)}\cdot\text{etc.},$$

on en tirera, par la supposition de $m+p=n$,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{n^2}{n^2-m^2}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-m^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-m^2}\cdot\frac{16n^2}{16n^2-m^2}\cdot\text{etc.},$$

et mettant pour l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}$ sa valeur $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ (1171), on obtiendra l'équation

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{4n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{9n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{16n^2}}\cdot\text{etc.},$$

de laquelle on conclura

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\text{etc.}$$

Si l'on change l'arc $\frac{m\pi}{n}$ en $\frac{\pi}{2}-\frac{m\pi}{n}=\frac{n-2m}{2n}\pi$, on aura........ $\sin\frac{n-2m}{2n}\pi=\cos\frac{m\pi}{n}$; substituant $\frac{n-2m}{2n}$, ou $\frac{1}{2}-\frac{m}{n}$, au lieu de $\frac{m}{n}$, dans le produit précédent, décomposé en facteurs simples, il viendra

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{n}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{n}\right)}{1.1}\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{m}{n}\right)}{2.2}\frac{\left(\frac{5}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{7}{2}-\frac{m}{n}\right)}{3.3}\text{etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{\left(1-\frac{2m}{n}\right)}{2}\frac{\left(1+\frac{2m}{n}\right)\left(3-\frac{2m}{n}\right)}{2}\frac{\left(3+\frac{2m}{n}\right)\left(5-\frac{2m}{n}\right)}{4}\frac{\left(5+\frac{2m}{n}\right)}{4}\frac{\left(7-\frac{2m}{n}\right)}{6}\text{etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.3.5.5.7.7.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.8.\text{etc.}}\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\text{etc.},$$

résultat qui se réduit à

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\text{etc.},$$

lorsqu'on met pour $\frac{\pi}{2}$ la valeur rapportée dans le n° 1166.

Si l'on fait $\frac{m\pi}{n}=u$, dans les deux produits que nous venons d'ob-

tenir pour le sinus et le cosinus, on aura

$$\sin u = u\left(1-\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{16\pi^2}\right) \text{ etc.},$$

$$\cos u = \left(1-\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{49\pi^2}\right) \text{ etc.},$$

ce qui revient à

$$\sin u = u\left(1-\frac{u}{\pi}\right)\left(1+\frac{u}{\pi}\right)\left(1-\frac{u}{\pi}\right)\left(1+\frac{u}{2\pi}\right)\left(1-\frac{u}{3\pi}\right)\left(1+\frac{u}{3\pi}\right) \text{ etc.},$$

$$\cos u = \left(1-\frac{2u}{\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{\pi}\right)\left(1-\frac{2u}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{5\pi}\right)\left(1-\frac{2u}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{5\pi}\right) \text{ etc.}$$

La première de ces expressions met en évidence la propriété qu'a le sinus, de s'évanouir toutes les fois que l'arc devient égal à un multiple de π, soit positif, soit négatif, puisque les facteurs qui la composent s'annulent successivement lorsque

$$u=\pi,\quad u=-\pi,\quad u=2\pi,\quad u=-2\pi,\ u=3\pi,\ u=-3\pi,\ \text{etc.}$$

Il est visible que si l'on avait voulu exprimer analytiquement cette propriété, on en aurait déduit la même formule que ci-dessus. L'expression du cosinus satisfait de même aux loix que suit la marche de cette fonction, puisqu'il y a toujours un de ses facteurs qui s'évanouit lorsque $u=\pm\frac{2i+1}{2}\pi$.

1181. Les expressions dont nous nous occupons maintenant sont dues à Euler, qui en a tiré de nombreuses conséquences : elles donnent immédiatement les logarithmes népériens des sinus et des cosinus; car en faisant $u=\frac{m\pi}{2n}$, on en tire

$$\mathrm{l}\sin\frac{m\pi}{2n} = \mathrm{l}\pi + \mathrm{l}\frac{m}{2n} + \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)$$
$$+ \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \text{etc.},$$

$$\mathrm{l}\cos\frac{m\pi}{2n} = \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)$$
$$+ \mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right) + \text{etc.}$$

Si l'on développe en séries, les logarithmes indiqués, à partir seulement de $\mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)$ pour le sinus, et de $\mathrm{l}\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)$ pour le cosinus,

on aura, en ordonnant par rapport aux puissances de $\frac{m}{n}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\sin\frac{m\pi}{2n} = {} & \mathrm{l}m + \mathrm{l}(2n-m) + \mathrm{l}(2n+m) - 3\,\mathrm{l}n + \mathrm{l}\pi - \mathrm{l}8 \\ & - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{12^6} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{12^8} + \text{etc.}\right) \\ & - \text{etc.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\cos\frac{m\pi}{n} = {} & \mathrm{l}(n-m) + \mathrm{l}(n+m) - 2\,\mathrm{l}n \\ & - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}\right) \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

Les coefficiens des puissances de $\frac{m}{n}$, dans ces séries, étant les termes de la série générale $S\frac{1}{x^p}$, pris de deux en deux, se calculeront par les formules du n° 1005, en faisant usage de la remarque du n° 999, ou par des procédés que nous indiquerons plus bas.

1182. Les mêmes expressions donnent les facteurs des séries

$$\frac{u}{1} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$
$$1 - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

qui sont en même temps les développemens de $\sin u$ et de $\cos u$, et ceux des expressions

$$\frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2};$$

Changeons maintenant u en $\frac{u}{\sqrt{-1}}$; il viendra

$$\begin{aligned}\frac{e^u-e^{-u}}{2} &= \frac{u}{1}+\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\\ &= u\left(1+\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{16\pi^2}\right)\text{etc.},\\ \frac{e^u+e^{-u}}{2} &= 1+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^4}{1.2.3.4}+\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.}\\ &= \left(1+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{49\pi^2}\right)\text{etc.}\end{aligned}$$

Avec ces formules, on décompose aussi en facteurs, l'expression $\frac{e^{\pm x}\pm e^{\pm y}}{2}$; car on a

$$\begin{aligned}1^\circ.\ \frac{e^x+e^y}{2} &= e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\right)\\ &= e^{\frac{x+y}{2}}\left(1+\frac{(x-y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.},\\ 2^\circ.\ \frac{e^x+e^{-y}}{2} &= e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}}+e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\right)\\ &= e^{\frac{x-y}{2}}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.};\\ 3^\circ.\ \frac{e^x-e^y}{2} &= e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\right)\\ &= e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{36\pi^2}\right)\text{etc.},\\ 4^\circ.\ \frac{e^x-e^{-y}}{2} &= e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\right)\\ &= e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right)\text{etc.}\end{aligned}$$

Si l'on fait dans ces résultats $y=0$, il viendra

$$\begin{aligned}\frac{e^x+1}{2} &= e^{\frac{1}{2}x}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.},\\ \frac{e^x-1}{2} &= e^{\frac{1}{2}x}\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\text{etc.}\end{aligned}$$

Multipliant entr'elles les quantités $e^x\pm e^{-x}$ et $e^y\pm e^{-y}$, on aura

$$1^{\circ}.\ (e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) = e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)},$$
$$2^{\circ}.\ (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) = e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-(x-y)} - e^{-(x+y)},$$
$$3^{\circ}.\ (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) = e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)};$$

et faisant, pour abréger, $x+y=u$, $x-y=v$, on conclura de ce qui précède, le développement en produits infinis des trois expressions

$$e^u + e^{-u} + e^v + e^{-v},$$
$$e^u - e^{-u} - e^v + e^{-v},$$
$$e^u + e^{-u} - e^v - e^{-v}.$$

1183. Avant de reprendre la recherche des valeurs des intégrales définies, nous montrerons comment les expressions que nous venons d'obtenir peuvent être employées à la sommation de quelques séries.

Soit

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$
$$= (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\ \text{etc.};$$

on aura

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.},$$
$$B = \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots\ldots + \beta\gamma + \beta\delta + \text{etc.},$$
$$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \text{etc.},$$
etc.,

et par les formules du n° 96, on obtiendra les valeurs de

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.},$$
$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{etc.},$$
$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{etc.},$$
etc.

Cela posé, l'expression $\frac{e^u - e^{-u}}{2}$ du numéro précédent donne

$$1 + \frac{u^2}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.5} + \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$
$$= \left(1+\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{25\pi^2}\right)\ \text{etc.},$$

et faisant $u^2 = \pi^2 z$, on en tirera

$$1 + \frac{\pi^2 z}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^2}{1.2.3.4.5} + \frac{\pi^6 z^3}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$
$$= (1+z)\left(1+\tfrac{1}{4}z\right)\left(1+\tfrac{1}{9}z\right)\left(1+\tfrac{1}{16}z\right)\left(1+\tfrac{1}{25}z\right)\ \text{etc.},$$
$$A = \frac{\pi^2}{1.2.3},\quad B = \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5},\quad C = \frac{\pi^6}{1.2\ldots7},\quad D = \frac{\pi^8}{1.2\ldots9},\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans celles de S_1, S_2, S_3, etc., on trouvera

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{90},$$
$$S_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945},$$
$$S_4 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{\pi^8}{9450},$$
$$S_5 = \frac{1}{1^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \text{etc.} = \frac{\pi^{10}}{93555},$$

etc.,

comme nous l'avons indiqué dans le n° 1005; et l'on voit par là que la limite de la série

$$S_m = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{etc.},$$

ne dépend que de la circonférence du cercle.

Le développement en série de l'expression $\frac{e^u + e^{-u}}{2}$, étant comparé à son développement en facteurs, en faisant $u^2 = \frac{1}{4}\pi^2 z$, donne successivement

$$1 + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{u^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \text{etc.}$$
$$= \left(1 + \frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4u^2}{49\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4u^2}{81\pi^2}\right) \text{etc.},$$
$$1 + \frac{\pi^2 z}{1.2.4} + \frac{\pi^4 z^2}{1.2.3.4.4^2} + \frac{\pi^6 z^3}{1.2.\ldots\ldots 6.4^3} + \frac{\pi^8 z^4}{1.2.\ldots\ldots\ldots\ldots 8.4^4} + \text{etc.}$$
$$= (1 + z)(1 + \tfrac{1}{9} z)(1 + \tfrac{1}{25} z)(1 + \tfrac{1}{49} z)(1 + \tfrac{1}{81} z) \text{ etc.},$$
$$A = \frac{\pi^2}{1.2.4},\quad B = \frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2},\quad C = \frac{\pi^6}{1.2\ldots 6.4^3},\quad D = \frac{\pi^8}{1.2\ldots 8.4^4}, \text{etc.},$$

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{1}{1}\frac{\pi^2}{2^3},$$
$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1.2.3}\frac{\pi^4}{2^5},$$
$$S_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} = \frac{16}{1.2.3.4.5}\frac{\pi^6}{2^7},$$
$$S_4 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \text{etc.} = \frac{272}{1.2.3\ldots 7}\frac{\pi^8}{2^9},$$

etc.;

et l'on aura en général la limite de la série

$$S_m = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \frac{1}{9^{2m}} + \text{etc.},$$

exprimée par la circonférence du cercle. Nous observerons que l'on peut faire usage de ces résultats pour simplifier les séries du n° 1181.

1184. Ayant obtenu séparément la somme des termes formés par les nombres impairs, celle des termes formés par les nombres pairs s'en conclut tout de suite : mais il y a entre les sommes totales et les sommes partielles des relations générales très-simples, remarquées par Lorgna, et qu'il peut être bon de connaître.

Soit

$$S = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \text{etc.},$$

$$S' = 1 \qquad + \frac{1}{3^m} \qquad + \frac{1}{5^m} \qquad + \frac{1}{7^m} + \text{etc.};$$

en retranchant la seconde équation de la première, il viendra

$$S - S' = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2^m}\left\{1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \text{etc.}\right\},$$

d'où $S - S' = \frac{S}{2^m}$, et par conséquent, $S' = S\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$, équation qu'il est aisé de vérifier sur les valeurs trouvées dans le numéro précédent.

Des séries ci-dessus, où tous les termes sont positifs, on déduit facilement celles dont les termes seraient alternativement de signes contraires. En effet, si de

$$S = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \text{etc.},$$

on retranche

$$\frac{2S}{2^m} = \frac{2}{2^m} + \frac{2}{4^m} + \frac{2}{6^m} + \text{etc.},$$

le reste sera

$$S\left\{1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right\} = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} - \text{etc.},$$

et en représentant cette dernière série par s, on aura l'équation

$$\frac{2^{m-1} - 1}{2^{m-1}} S = s,$$

au moyen de laquelle on déterminera l'une des sommes S, s, par l'autre.

Les déterminations du numéro précédent ne comprennent que les cas où m est paire; pour les autres, il faudrait recourir aux intégrales définies, suivant ce qu'on a vu dans le n° 1144; et d'ailleurs il n'est pas difficile de s'assurer que, comme l'a remarqué Lorgna,

$$\int\frac{dx}{1\mp x}=\frac{x}{1}\pm\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\pm\frac{x^4}{4}+\text{etc.},$$

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1\mp x}=\frac{x}{1}\pm\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}\pm\frac{x^4}{4^2}+\text{etc.},$$

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1\mp x}=\frac{x}{1}\pm\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{3^3}\pm\frac{x^4}{4^3}+\text{etc.},$$

et ainsi de suite; et si l'on prend les intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura toutes les séries de ce genre.

1185. Les formules qui terminent le n° 1182, étant traitées par le procédé du numéro précédent, donnent aussi des sommations très-élégantes. On en tire d'abord

$$\frac{e^x+e^{-y}}{e^x+1}=\frac{e^{\frac{x-y}{2}}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right)\text{ etc.}}{e^{\frac{1}{2}x}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\text{ etc.}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}y}\left(\frac{\pi^2+(x+y)^2}{\pi^2+x^2}\right)\left(\frac{9\pi^2+(x+y)^2}{9\pi^2+x^2}\right)\left(\frac{25\pi^2+(x+y)^2}{25\pi^2+x^2}\right)\text{ etc.}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}y}\left(1+\frac{2xy+y^2}{\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{9\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{25\pi^2+x^2}\right)\text{ etc.},$$

puis

$$\frac{e^{x+\frac{1}{2}y}+e^{-\frac{1}{2}y}}{e^x+1}=\left(1+\frac{2xy+y^2}{\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{9\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{25\pi^2+x^2}\right)\text{ etc.};$$

or, il est facile de voir que

$$\frac{e^{x+\frac{1}{2}y}+e^{-\frac{1}{2}y}}{e^x+1}=\frac{(1+e^{-x})(e^{-\frac{1}{2}y}+e^x e^{\frac{1}{2}y})}{(1+e^{-x})(1+e^x)}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}y}+e^{\frac{1}{2}y}+e^{-x-\frac{1}{2}y}+e^{x+\frac{1}{2}y}}{2+e^x+e^{-x}},$$

et qu'en faisant $x = u\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}y = -v\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{\cos v + \cos(u-v)}{1+\cos u} = \cos v + \frac{\sin u \sin v}{1+\cos u} = \cos v + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u \sin v$$

$$= \left(1+\frac{4uv-4v^2}{\pi^2-u^2}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{9\pi^2-u^2}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{25\pi^2-u^2}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1+\frac{2v}{\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{\pi+u}\right)\left(1+\frac{2v}{3\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{3\pi+u}\right) \text{ etc.}$$

Maintenant, si l'on substitue dans l'expression $\cos v + \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \sin v$, au lieu de u, $\frac{m\pi}{n}$, au lieu de v, $\frac{z\pi}{2n}$, et qu'on réduise en série les fonctions de z, savoir, $\cos\frac{z\pi}{2n}$ et $\sin\frac{z\pi}{2n}$, on obtiendra

$$1 + \frac{\pi z}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi^2 z^2}{2.4n^2} - \frac{\pi^3 z^3}{2.4.6n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 z^4}{2.4.6.8n^4} + \text{etc.}$$

$$= \left(1+\frac{z}{n-m}\right)\left(1-\frac{z}{n+m}\right)\left(1+\frac{z}{3n-m}\right)\left(1-\frac{z}{3n+m}\right) \text{ etc.},$$

d'où l'on déduira les sommes des séries

$$S_1 = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \text{etc.},$$

$$S_2 = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \text{etc.},$$

etc.,

dont la première donne immédiatement

$$\frac{\pi}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \text{etc.}$$

Nous aurons encore, par les formules déjà citées,

$$\frac{e^x - e^{-y}}{e^x - 1} = \frac{e^{\frac{x-y}{2}}(x+y)\left(1+\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right) \text{ etc.}}{e^{\frac{1}{2}x}x\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right) \text{ etc.}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}y}\,\frac{x+y}{x}\left(\frac{4\pi^2+(x+y)^2}{4\pi^2+x^2}\right)\left(\frac{16\pi^2+(x+y)^2}{16\pi^2+x^2}\right)\left(\frac{36\pi^2+(x+y)^2}{36\pi^2+x^2}\right) \text{ etc.}$$

$$= e^{-\frac{y}{2}}\,\frac{x+y}{x}\left(1+\frac{2xy+y^2}{4\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{16\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{36\pi^2+x^2}\right) \text{ etc.},$$

d'où

$$\frac{e^{x+\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}}{e^x-1}=\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{4\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{16\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{36\pi^2+x^2}\right)\text{ etc.};$$

or,

$$\frac{e^{x+\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}}{e^x-1}=\frac{\left(e^{x+\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}\right)}{(e^x-1)}\,\frac{(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})}=$$

$$\frac{e^{x+\frac{y}{2}}+e^{-x-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}}{2-e^x-e^{-x}}.$$

Si maintenant on fait $x=u\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}y=-v\sqrt{-1}$, il en résultera

$$\frac{\cos v-\cos(u-v)}{1-\cos u}=\cos v-\frac{\sin u\sin v}{1-\cos u}=\cos v-\cot\tfrac{1}{2}u\sin v$$

$$=\left(1-\frac{2v}{u}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{4\pi^2-u^2}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{16\pi^2-u^2}\right)\text{ etc.}$$

$$=\left(1-\frac{2v}{u}\right)\left(1+\frac{2v}{2\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{2\pi+u}\right)\left(1+\frac{2v}{4\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{4\pi+u}\right)\text{etc.};$$

et si l'on change v en $-\frac{z\pi}{2n}$, u en $\frac{m\pi}{n}$, puis que l'on développe en série, suivant les puissances de z, l'expression $\cos\frac{\pi z}{2n}+\cot\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{\pi z}{2n}$, on obtiendra

$$1+\frac{\pi z}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2z^2}{2.4n^2}-\frac{\pi^3z^3}{2.4.6n^3}\cot\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4z^4}{2.4.6.8n^4}+\text{ etc.}$$

$$=\left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1-\frac{z}{2n-m}\right)\left(1+\frac{z}{2n+m}\right)\left(1-\frac{z}{4n-m}\right)\left(1+\frac{z}{4n+m}\right)\text{etc.},$$

et on en conclura les expressions des limites de

$$S_1=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{ etc.};$$

$$S_2=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}+\frac{1}{(4n-m)^2}+\frac{1}{(4n+m)^2}+\text{ etc.},$$

etc.

On aura en particulier

$$\frac{\pi}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{ etc.}$$

1186. Nous conclurons de ce qui précède, que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}$$
$$-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\frac{1}{5n-m}-\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\left(\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n}+\cot\frac{m\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}$$
$$-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\frac{1}{5n-m}+\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\left(\cot\frac{m\pi}{2n}-\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{n\,\text{tang}\,\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}.$$

Si l'on combine deux à deux, à partir du second, les termes de la première de ces séries, on aura

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\text{etc.},$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}=\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\frac{1}{16n^2-m^2}+\text{etc.}$$

En opérant de même sur la deuxième série, il viendra successivement

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}-\text{etc.},$$
$$\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\cot\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\text{etc.}$$

Soit $n=1$, et faisons $m=-u\sqrt{-1}$; nous aurons

$$\frac{1}{u^2+1}+\frac{1}{u^2+4}+\frac{1}{u^2+9}+\frac{1}{u^2+16}+\text{etc.}$$
$$=-\frac{1}{2u^2}+\frac{\pi}{2u}+\frac{\pi}{u(e^{2u\pi}-1)},$$

en observant que

$$\cot m\pi=\frac{\sqrt{-1}\,(e^{2m\pi\sqrt{-1}}+1)}{e^{2m\pi\sqrt{-1}}-1}=\frac{\sqrt{-1}\,(e^{2u\pi}+1)}{e^{2u\pi}-1}$$
$$=\sqrt{-1}+\frac{2\sqrt{-1}}{e^{2u\pi}-1}\ (\textit{Int.}\ 41).$$

Lorsqu'on change u en n dans ce résultat, on retrouve la série du n° 1007, et la limite que nous lui avons assignée dans ce numéro.

1187. En développant, suivant les puissances de m, chaque terme de la série

$$\frac{1}{1-m^2}+\frac{1}{4-m^2}+\frac{1}{9-m^2}+\frac{1}{16-m^2}+\text{etc.},$$

et désignant par $S\frac{1}{u^2}$, $S\frac{1}{u^4}$, etc., les limites des séries

$$1+\frac{1}{2^2}+\text{etc.},\qquad 1+\frac{1}{2^4}+\text{etc.},$$

on trouvera

$$\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m}\cot m\pi = S\frac{1}{u^2}+m^2S\frac{1}{u^4}+m^4S\frac{1}{u^6}+\text{etc.};$$

mais on a, par le n° 1012,

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a=\frac{1}{a}-\frac{B_1a}{2}-\frac{B_3a^3}{2.3.4}-\frac{B_5a^5}{2.3.4.5.6}-\text{etc.},$$

B_1, B_3, B_5, etc., étant les nombres de Bernoulli, et par conséquent

$$\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m}\cot m\pi=\frac{2B_1\pi^2}{2}+\frac{2^3m^2B_3\pi^4}{2.3.4}+\frac{2^5m^4B_5\pi^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.}:$$

la comparaison de ce développement et du précédent donne

$$S\frac{1}{u^2}=\frac{2B_1\pi^2}{1.2},\quad S\frac{1}{u^4}=\frac{2^3B_3\pi^4}{1.2.3.4},\quad S\frac{1}{u^6}=\frac{2^5B_5\pi^6}{1.2.3\ldots.6},\quad\text{etc.},$$

comme on l'a indiqué dans le n° 1005.

1188. Si l'on écrit $2n$, au lieu de n, dans les formules du n° 1180, on en déduira les suivantes :

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\text{etc.},$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\text{etc.},$$

$$\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\text{etc.},$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{m}\right)\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\text{etc.},$$

$$\text{séc}\,\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\text{etc.},$$

$$\text{coséc}\,\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\text{etc.},$$

en se rappelant que $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.\text{etc.}}$

Cette dernière expression se tire immédiatement de celle du sinus, qui en fournit beaucoup d'autres de la même espèce. En effet, on a

$$\frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\text{ etc.},$$

et si l'on fait $m=n$, on retombe sur la valeur ci-dessus. En prenant $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, il en résulte $\sin\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, et

$$\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{4.4.8.8.12.12.16.16.\text{etc.}}{3.5.7.9.11.13.15.17.\text{etc.}}.$$

La substitution de la première valeur de $\frac{\pi}{2}$, dans cette dernière, conduit à

$$\sqrt{2}=\frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18.\text{etc.}}{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.\text{etc.}}.$$

Si l'on suppose $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$, il viendra $\sin\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$, et

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6.6.12.12.18.18.24.\text{etc.}}{5.7.11.13.17.19.23.\text{etc.}}.$$

Ces diverses expressions de $\frac{1}{2}\pi$, peu propres à en donner des valeurs approchées, sont très-commodes pour en obtenir le logarithme : on a

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.\text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.\text{ etc.}}=2(1-\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{5})\text{ etc.},$$

d'où l'on tire

$$\pi=4(1-\tfrac{1}{9})(1-\tfrac{1}{25})(1-\tfrac{1}{49})\text{ etc.},$$

$$l\pi=l4+l(1-\tfrac{1}{9})+l(1-\tfrac{1}{25})+l(1-\tfrac{1}{49})+\text{etc.};$$

développant en série les logarithmes des binomes, il viendra

$$\begin{aligned}l\pi=l4&-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot9^2}-\frac{1}{3\cdot9^3}-\frac{1}{4\cdot9^4}-\text{etc.}\\&-\frac{1}{25}-\frac{1}{2.25^2}-\frac{1}{3.25^3}-\frac{1}{4.25^4}-\text{etc.}\\&-\frac{1}{49}-\frac{1}{2.49^2}-\frac{1}{3.49^3}-\frac{1}{4.49^4}-\text{etc.}\end{aligned}$$

et posant, pour abréger,

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.},$$

$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.},$$

$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.},$$

etc.,

on aura

$$\mathrm{l}\,\pi = \mathrm{l}4 - (A-1) - \tfrac{1}{2}(B-1) - \tfrac{1}{3}(C-1) - \tfrac{1}{4}(D-1) - \text{etc.}$$

Si l'on pousse le calcul jusqu'au vingt-troisième terme de cette série, on trouvera

$$\mathrm{l}\,\pi = 1{,}1447298858494001741434 2;$$

ce logarithme est népérien; il correspond, dans le système décimal, à

$$0{,}4971498726941338543512 6.$$

En écrivant dans l'expression de $\sin\frac{m\pi}{2n}$, et dans celle de $\cos\frac{m\pi}{2n}$, rapportées plus haut, $n-m$, au lieu de m, et en faisant attention que

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos\frac{m\pi}{2n}, \qquad \cos\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\frac{m\pi}{2n},$$

on obtiendra les nouvelles formules

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \pi\left(\frac{n-m}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\text{ etc.},$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\left(\frac{6n+m}{7n}\right)\text{ etc.};$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}.\text{etc.},$$

$$\mathrm{tang}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}.\text{etc.},$$

$$\mathrm{cos\acute{e}c}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{m}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\text{ etc.},$$

$$\mathrm{s\acute{e}c}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{2n}{n+m}\right)\left(\frac{2n}{3n-m}\right)\left(\frac{4n}{3n+m}\right)\left(\frac{4n}{5n-m}\right)\text{ etc.}$$

En considérant l'arc $\frac{k\pi}{2n}$, on aurait

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k}\left(\frac{2n-m}{2n-k}\right)\left(\frac{2n+m}{2n+k}\right)\left(\frac{4n-m}{4n-k}\right)\left(\frac{4n+m}{4n+k}\right)\text{ etc.};$$

etc.,

et si l'on connaissait le sinus, le cosinus, etc., de l'arc $\frac{k\pi}{2n}$, ces derniers résultats donneraient des valeurs du sinus, du cosinus, etc. de l'arc $\frac{m\pi}{2n}$.

1189. Nous avons emprunté le secours du Calcul intégral, pour ob-

tenir les facteurs du sinus et du cosinus, d'où nous avons déduit ceux des expressions

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ (1182):$$

Euler y est parvenu, dans son *Introductio in Analysin infinitorum*, par des moyens purement algébriques; mais la manière dont il y introduit l'infini, nous a fait préférer la considération des limites, employée pour le même objet par M. L'Huillier de Genève. En suivant la marche de ce dernier, nous commencerons par déduire quelques conséquences aussi simples qu'élégantes, du théorème de Côtes, ou de la résolution des équations à deux termes.

On a donné dans le n° 68 de l'Introduction, les facteurs trinomes des formules $x^m + a^m$ et $x^m - a^m$; pour distinguer le cas où l'exposant m est pair, de ceux où il est impair, nous écrirons successivement $2m$ et $2m+1$, au lieu de m. Cela posé, les facteurs de $x^{2m} + a^{2m}$, seront tous de la forme

$$x^2 - 2ax\cos\lambda + a^2;$$

en faisant $x = a = 1$, ils deviendront

$$2(1-\cos\lambda) = 4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2, \quad \text{et on aura} \quad x^{2m} + a^{2m} = 2;$$

mettant pour λ les valeurs $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, etc., et extrayant la racine quarrée de chaque facteur, on trouvera

$$\sqrt{2} = 2^m.\sin\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{5}{2m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\ldots.(A).$$

La formule $x^{2m+1}+a^{2m+1}$, outre m facteurs trinomes $x^2-2ax\cos\lambda+a^2$, a un facteur réel du premier degré $x+a$, qui se réduit à 2, et il en résulte

$$1 = 2^m\sin\frac{1}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{5}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{2m-1}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots.(B).$$

La formule $x^{2m} - a^{2m}$ a un facteur $x^2 - a^2$ et $m-1$ autres de la forme $x^2 - 2ax\cos\lambda + a^2$; en divisant par le premier, on a un quotient

$$x^{2m-2} + x^{2m-4}a^2 + x^{2m-6}a^4 \ldots\ldots + a^{2m-2},$$

qui se réduit à m, lorsque $x = a = 1$; et comparé au produit des $m-1$ facteurs trinomes, il donne

$$\sqrt{m}=2^{m-1}\sin\frac{1}{m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{2}{m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(C).$$

Si l'on dégage de même la formule $x^{2m+1}-a^{2m+1}$, du facteur $x-a$, on en déduira, par la supposition de $x=a=1$,

$$\sqrt{2m+1}=2^{m}\sin\frac{2}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{4}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{6}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{2m}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots(D).$$

Le n° 72 de l'Introduction contient les formules pour décomposer l'équation $x^{2m}-2x^{m}\cos 2\varphi+1=0$, en facteurs du second degré, de la forme $x^{2}-2x\cos\frac{2n\pi+2\varphi}{m}+1$, dans laquelle n doit recevoir toutes les valeurs depuis o jusqu'à $m-1$ inclusivement; et en observant que

$$\cos\frac{(m+n)\pi+2\varphi}{m}=\cos\frac{(m-n)\pi-2\varphi}{m},$$

on aura

$$x^{2}-2x\cos\frac{2n\pi\pm2\varphi}{m}+1;$$

mais alors il faudra, si m est paire, pousser les valeurs de n jusqu'à $\frac{m}{2}$, et seulement jusqu'à $\frac{m-1}{2}$ dans le cas contraire. Pour distinguer ces deux cas, nous mettrons successivement $2m$ et $2m+1$ au lieu de m, et nous obtiendrons, en faisant $x=1$ les équations

$$\sin\varphi=2^{2m-1}\sin\frac{\varphi}{2m}.\sin\frac{\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{\pi+\varphi}{2m}.\sin\frac{2\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{2m}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\sin\frac{(m-1)\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{(m-1)\pi+\varphi}{2m}.\sin\frac{m\pi-\varphi}{2m}\ldots\ldots(E),$$

$$\sin\varphi=2^{2m}\sin\frac{\varphi}{2m+1}.\sin\frac{\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{\pi+\varphi}{2m+1}.\sin\frac{2\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{2m+1}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\sin\frac{m\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{m\pi+\varphi}{2m+1}\ldots\ldots(F).$$

1190. Les six équations (A), (B), (C), (D), (E), (F), faciles à obtenir, et déjà très-remarquables par elles-mêmes, conduisent immédiatement aux résultats que nous cherchons, en observant que l'expression $e^{x}\pm e^{-x}$ est la limite de

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}\pm\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m},$$

relativement aux accroissemens de m (*Int.* 36), et en substituant

$1+\frac{x}{2m}$, au lieu de x, et $1-\frac{x}{2m}$, au lieu de a, dans les facteurs de $x^{2m}\pm a^{2m}$.

Les facteurs trinomes de l'expression $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}$, étant en général de la forme

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{2m}\right)\left(1-\frac{x}{2m}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^2,$$

se réduisent à

$$2\left\{1-\cos\lambda+\frac{x^2}{4m^2}(1+\cos\lambda)\right\}=2(1-\cos\lambda)\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\frac{1+\cos\lambda}{1-\cos\lambda}\right)\right\}$$
$$=4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^2\right\};$$

et mettant pour λ ses valeurs, $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, etc., on formera le produit

$$4^m\left(\sin\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\sin\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\cdots\cdots\cdots\left(\sin\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}.$$

Cette dernière expression, réduite par l'équation (A), donne

$$\frac{\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}}{2}=\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{5}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\times\left\{1+\frac{v^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\};$$

passant maintenant aux limites, en observant que celle de........ $\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{k}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2$ est $\frac{x^2}{\frac{1}{4}k^2\pi^2}=\frac{4x^2}{k^2\pi^2}$, on trouvera

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

On serait parvenu au même résultat, en décomposant l'expression

$$\left(1+\frac{x}{2m+1}\right)^{2m+1}+\left(1-\frac{x}{2m+1}\right)^{2m+1}.$$

En second lieu, si l'on prend $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}$, on aura le facteur $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^2-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^2$, qui se réduit à $\frac{2x}{m}$, et $m-1$ autres qui seront de la forme

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{2m}\right)\left(1-\frac{x}{2m}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^2,$$

et conduiront, comme ci-dessus, à

$$4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^2\right\}.$$

Les valeurs de λ relatives à ce cas étant $\frac{2\pi}{2m}$, $\frac{4\pi}{2m}$, etc., on obtient le produit

$$\begin{aligned}&\frac{2x}{m}4^{m-1}\left(\sin\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\sin\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\ldots\ldots\left(\sin\frac{2m-2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\\&\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

et on conclut de là, en vertu de l'équation (C),

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}}{2}&=x\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\\&\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{6}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Enfin la limite de cette équation donne

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\text{ etc.},$$

ce qu'on aurait également trouvé en opérant sur

$$\left(1+\frac{x}{2m+1}\right)^{2m+1}-\left(1-\frac{x}{2m+1}\right)^{2m+1}.$$

1191. On obtient d'une manière analogue la décomposition de l'expression $e^x-2\cos 2\varphi+e^{-x}$, en facteurs binomes.

Les facteurs trinomes de l'expression

$$\left(1+\frac{x}{4m+2}\right)^{4m+2}-2\left(1+\frac{x}{4m+2}\right)^{2m+1}\left(1-\frac{x}{4m+2}\right)^{2m+1}\cos 2\varphi+\left(1-\frac{x}{4m+2}\right)^{4m+2}$$

étant de la forme

$$\left(1+\frac{x}{4m+2}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{4m+2}\right)\left(1-\frac{x}{4m+2}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{4m+2}\right)^2;$$

reviennent à

$$4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^2\right\};$$

mettant pour λ toutes les valeurs dont il est susceptible, on formera le produit

$$\begin{aligned}&4^{2m+1}\left(\sin\frac{\varphi}{2m+1}\right)^2\left(\sin\frac{\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\left(\sin\frac{\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{m\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\left(\sin\frac{m\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\\ &\times\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\\ &\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{m\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{m\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\right\};\end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned}&4\sin\varphi^2\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\\ &\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{m\pi-\varphi}{2m+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4m+2)^2}\left(\cot\frac{m\pi+\varphi}{2m+1}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

en vertu de l'équation (F); et prenant les limites, on aura seulement

$$\begin{aligned}e^x-2\cos 2\varphi+e^{-x}&=4\sin\varphi^2\left(1+\frac{x^2}{4\varphi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(\pi-\varphi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(\pi+\varphi)^2}\right)\\ &\times\left(1+\frac{x^2}{4(2\pi-\varphi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(2\pi+\varphi)^2}\right)\text{ etc.}:\end{aligned}$$

le même résultat se déduirait aussi de l'expression

$$\left(1+\frac{x}{4m}\right)^{4m}-2\left(1+\frac{x}{4m}\right)^{2m}\left(1-\frac{x}{4m}\right)^{2m}\cos 2\varphi+\left(1-\frac{x}{4m}\right)^{4m}.$$

La formule $e^{2x}-2\cos 2\varphi+e^{-2x}$ qui se rapporte à la précédente, peut aussi se transformer en

$$
\begin{aligned}
&e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x}\{(\cos 2\varphi)^2 + (\sin 2\varphi^2)\} \\
&= (e^x - e^{-x}\cos 2\varphi)^2 - (e^{-x}\sqrt{-1}\sin 2\varphi)^2 \\
&= \{e^x - e^{-x}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)\} \\
&\times \{e^x - e^{-x}(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)\} \\
&= (e^x - e^{-(x-2\varphi\sqrt{-1})})(e^x - e^{-(x+2\varphi\sqrt{-1})}) \text{ (Int. 41)},
\end{aligned}
$$

et le développement de $e^x - e^{-y}$, du n° 1182, donne

$$
\begin{aligned}
e^x - e^{-(x+2\varphi\sqrt{-1})} &= (2x + 2\varphi\sqrt{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}} \\
&\times \left(1 + \frac{(x+\varphi\sqrt{-1})^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x+\varphi\sqrt{-1})^2}{4\pi^2}\right) \text{etc.}, \\
e^x - e^{-(x-2\varphi\sqrt{-1})} &= (2x - 2\varphi\sqrt{-1})e^{+\varphi\sqrt{-1}} \\
&\times \left(1 + \frac{(x-\varphi\sqrt{-1})^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x-\varphi\sqrt{-1})^2}{4\pi^2}\right) \text{etc.};
\end{aligned}
$$

multipliant entr'elles ces deux expressions, on trouvera

$$
e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} =
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
4(x^2+\varphi^2) &\left\{1 + 2\frac{x^2-\varphi^2}{\pi^2} + \frac{(x^2+\varphi^2)^2}{\pi^4}\right\} \\
&\times \left\{1 + 2\frac{x^2-\varphi^2}{4\pi^2} + \frac{(x^2+\varphi^2)^2}{4^2\pi^4}\right\} \\
&\times \left\{1 + 2\frac{x^2-\varphi^2}{9\pi^2} + \frac{(x^2+\varphi^2)^2}{9^2\pi^4}\right\}
\end{aligned}
\right\} = \ldots
$$

$$
\times \text{ etc.}
$$

$$
\begin{aligned}
4(x^2+\varphi^2) &\left\{\frac{x^2+(\pi+\varphi)^2}{\pi^2} \cdot \frac{x^2+(\pi-\varphi)^2}{\pi^2}\right\} \\
&\times \left\{\frac{x^2+(2\pi+\varphi)^2}{4\pi^2} \cdot \frac{x^2+(2\pi-\varphi)^2}{4\pi^2}\right\} \\
&\times \left\{\frac{x^2+(3\pi+\varphi)^2}{9\pi^2} \cdot \frac{x^2+(3\pi-\varphi)^2}{9\pi^2}\right\} \\
&\times \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

On obtiendrait aisément, par ce qui précède, les facteurs des formules

$$
\begin{aligned}
&e^x + 2\cos 2\varphi + e^{-x}, \qquad e^x - 2\cos 2\varphi - e^{-x}, \\
&e^x - 2\text{séc } 2\varphi + e^{-x}, \qquad e^x - 2\text{tang } 2\varphi - e^{-x}.
\end{aligned}
$$

1192. Euler tire des considérations du n° 1183 le moyen de transformer en série le produit d'un nombre de facteurs, soit fini, soit infini; en effet, la série

$$
1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}
$$

étant supposée le développement du produit

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z) \text{ etc.} = P,$$

devient égale, lorsque $z=1$, à l'unité augmentée des diverses sommes que l'on obtient en réunissant les lettres α, β, γ, δ, etc., avec leurs produits 2 à 2, 3 à 3, etc. Si l'on prend pour ces lettres tous les nombres premiers, on aura le produit

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\ldots\ldots\ldots$$
$$= 1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+\text{etc.},$$

renfermant tous les nombres entiers, excepté ceux qui sont des puissances ou des multiples de puissances.

On a de même

$$\left(1+\tfrac{1}{2^n}\right)\left(1+\tfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\tfrac{1}{5^n}\right)\left(1+\tfrac{1}{7^n}\right)\left(1+\tfrac{1}{11^n}\right) \text{ etc.}$$
$$= 1+\tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{3^n}+\tfrac{1}{5^n}+\tfrac{1}{6^n}+\tfrac{1}{7^n}+\tfrac{1}{10^n}+\text{etc.}$$

On trouvera des relations analogues pour le cas où les nombres α, β, γ, δ, etc. sont négatifs; il viendra, par exemple,

$$\left(1-\tfrac{1}{2^n}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^n}\right)\left(1-\tfrac{1}{5^n}\right)\left(1-\tfrac{1}{7^n}\right)\left(1-\tfrac{1}{11^n}\right) \text{ etc.}$$
$$=1-\tfrac{1}{2^n}-\tfrac{1}{3^n}-\tfrac{1}{5^n}+\tfrac{1}{6^n}-\tfrac{1}{7^n}+\tfrac{1}{10^n}-\tfrac{1}{11^n}-\tfrac{1}{13^n}+\tfrac{1}{14^n}+\text{etc.}$$

Dans cette série, les termes négatifs résultent de la multiplication d'un nombre impair de facteurs premiers, et les termes positifs d'un nombre pair.

En développant l'expression

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z) \text{ etc.}},$$

dans la forme

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.},$$

les coefficiens A, B, C, D, etc., seront, comme ci-dessus, les sommes des lettres α, β, γ, δ, etc. de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, etc., mais avec cette différence, que les puissances de la même lettre se trouveront comprises dans ces produits, en sorte que la série qui résultera du développement de l'expression

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\text{ etc.}} = P,$$

sera égale, après la supposition de $z=1$, à la somme de tous les produits qui peuvent naître des lettres α, β, γ, δ, etc., combinées d'une manière quelconque : on trouve ainsi que

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$
$$= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\text{etc.}$$

Cette dernière série est précisément celle qui résulte de $l(1-u)$, lorsqu'on y fait $u=1$, et qu'on en change tous les signes (*Int.* 30) : il résulte de là que le produit infini

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$
$$= \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{11}{10}\cdot\tfrac{13}{12}\cdot\tfrac{17}{16}\cdot\text{etc.},$$

a une valeur infinie, et que par conséquent l'inverse

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{16}{17}\cdot\text{etc.},$$

tend sans cesse à s'anéantir, ou a pour limite zéro.

En ne prenant qu'un nombre limité de facteurs, l'expression..... $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})}$, par exemple, on a la série

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{12}+\text{etc.},$$

composée de fractions dont les dénominateurs sont tous les nombres ayant 2 et 3 pour facteurs simples.

On a en général

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ etc.}}$$
$$= 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.},$$

et l'on conclut de cette relation la valeur du produit indéfini par celle de la série, ou *vice versâ*.

On trouverait de même

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ etc.}}$$
$$= 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\text{etc.}$$

En partant des équations

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ etc.}}$$
$$= 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{ etc.} = M,$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\text{ etc.}}$$
$$= 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{ etc.} = N,$$

on trouve

$$\frac{M}{N} = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ etc.},$$
$$\frac{M^2}{N} = \frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\text{ etc.}$$

Ces combinaisons se multiplient à l'infini et produisent des résultats très-remarquables, mais trop nombreux pour nous y arrêter; nous renvoyons à cet égard au chapitre XV du livre I de l'*Introductio in Analysin infinitorum.*

1193. Pour ne laisser en arrière aucune branche de la théorie des suites, nous allons donner une idée du chapitre XVI du même ouvrage, dans lequel Euler applique les produits indéfinis à la recherche des diverses manières dont on peut former un nombre quelconque par l'addition des nombres inférieurs, ce qu'il appelle *Partitio numerorum.*

En considérant l'équation

$$(1+x^\alpha z)(1+x^\beta z)(1+x^\gamma z)(1+x^\delta z)(1+x^\epsilon z)\text{ etc.}$$
$$= 1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.},$$

on obtient

$$P = x^\alpha+x^\beta+x^\gamma+x^\delta+x^\epsilon+\text{etc.},$$
$$Q = x^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\gamma}+x^{\alpha+\delta}\ldots\ldots+x^{\beta+\gamma}+\text{etc.},$$
$$R = x^{\alpha+\beta+\gamma}+x^{\alpha+\beta+\delta}+x^{\alpha+\beta+\epsilon}+\text{etc.},$$
etc.,

d'où l'on voit que les exposans de x, dans les coefficiens de z, z^2, z^3, etc., sont les diverses sommes qu'on peut faire avec les lettres α, β, γ, δ, etc., combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc. Il est évident que s'il se trouve dans le même coefficient, des sommes égales entre

elles, les termes dont ces sommes sont les exposans se réunissent en un seul, ayant un coefficient égal au nombre de ces termes. Si dans Q on a, par exemple, $\alpha+\beta=\delta+\gamma=n$, les deux termes $x^{\alpha+\beta}+x^{\delta+\gamma}$, se réduisent à $2x^n$, et le nombre 2 marque qu'il y a deux manières de composer le nombre n, avec deux des quatre nombres α, β, γ, δ.

Soit pour la série α, β, γ, δ, ϵ, etc., celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc.; on aura

$$\begin{aligned}
&(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\text{ etc.}\\
=1&+z\,(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\text{etc.})\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\text{etc.})\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\text{etc.})\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+\text{etc.})\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+\text{etc.})\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+\text{etc.})\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+\text{etc.})\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+\text{etc.}),\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Si l'on veut connaître de combien de manières le nombre 34, par exemple, peut être formé par l'addition de 7 nombres, pris dans la série 1, 2, 3, 4, etc., on cherchera le coefficient de x^{34}, dans la série qui multiplie z^7, et l'on trouvera que cela peut se faire de onze manières différentes.

En faisant $z=1$, et réunissant entr'elles les mêmes puissances de x, on aura

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\text{ etc.}\\
&=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\text{etc.};
\end{aligned}$$

les coefficiens des termes de cette série marquent de combien de manières différentes on peut former les exposans, avec les termes de la suite 1, 2, 3, 4, etc., sans s'assujétir à aucune combinaison en particulier, mais en les embrassant toutes; ainsi 8, par exemple, peut être formé des six manières suivantes :

$$8=8,\quad 8=7+1,\quad 8=6+2,\quad 8=5+3,$$
$$8=5+2+1,\quad 8=4+3+1.$$

Il est à propos de remarquer que les élémens qui entrent dans chaque somme sont essentiellement différens; si l'on voulait admettre les répétitions, il faudrait alors considérer les fractions

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ etc.}},$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.}},$$

dont les développemens sont

$$\begin{aligned}
1&+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\text{etc.})\\
&+z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+\text{etc.})\\
&+z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10x^{11}+\text{etc.})\\
&+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\text{etc.})\\
&+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\text{etc.})\\
&+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\text{etc.})\\
&+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\text{etc.})\\
&+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\text{etc.})\\
&+\text{etc.},
\end{aligned}$$

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\text{etc.}$$

Le coefficient 11, affecté au terme x^{14}, dans la série qui multiplie z^8, exprime en combien de manières on peut former le nombre 14, par l'addition de huit termes de la suite 1, 2, 3, etc. Dans le second développement, le coefficient 11 de x^6 nous apprend que le nombre 6 peut être composé de onze manières, ainsi qu'il suit :

$6=6$,	$6=5+1$,	$6=4+2$,	$6=4+1+1$,
$6=3+3$,	$6=3+2+1$,	$6=3+1+1+1$,	$6=2+2+2$,
$6=2+2+1+1$,	$6=2+1+1+1+1$,	$6=1+1+1+1+1+1$.	

1194. Pour développer le produit indéfini

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\text{ etc.}=Z,$$

Euler substitue xz à z, ce qui donne

$$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\text{ etc.}=\frac{Z}{1+xz};$$

faisant en même temps

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.},$$

il obtient

$$\frac{Z}{1+xz}=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\text{etc.},$$

équation qui revient à

$$Z = 1 + \left.\begin{matrix}P\\+1\end{matrix}\right\} xz + \left.\begin{matrix}Q\\+P\end{matrix}\right\} x^2z^2 + \left.\begin{matrix}R\\+Q\end{matrix}\right\} x^3z^3 + \left.\begin{matrix}S\\+R\end{matrix}\right\} x^4z^4 + \text{etc.},$$

d'où il tire

$$P = \frac{x}{1-x}, \quad Q = \frac{Px^2}{1-x^2}, \quad R = \frac{Qx^3}{1-x^3}, \quad S = \frac{Rx^4}{1-x^4}, \quad \text{etc.};$$

et enfin

$$P = \frac{x}{1-x},$$
$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)},$$
$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$
$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$
etc.;

le terme général de ces dernières expressions est visiblement égal à

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)};$$

mais par le numéro précédent, le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)},$$

fait connaître de combien de manières on peut former le nombre n, par addition avec des nombres pris dans la suite $1, 2, \ldots. m$; et ce coefficient étant celui de $x^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, dans la première expression, marque aussi de combien de manières on peut partager le nombre..... $n + \frac{m(m+1)}{2}$ en m parties différentes. Il résulte de là qu'il y a autant de manières de former le dernier par l'addition de m nombres différens, que de manières de former le premier avec des nombres pris dans la suite $1, 2, \ldots. m$.

En suivant la même marche par rapport à la formule

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}} = Z,$$

Euler parvient successivement à

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)(1-x^6z)\text{ etc.}}=(1-xz)Z,$$
$$(1-xz)Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\text{etc.},$$

d'où il conclut

$$P=\frac{x}{1-x},\quad Q=\frac{Px}{1-x^2},\quad R=\frac{Qx}{1-x^3},\quad S=\frac{Rx}{1-x^4},\quad \text{etc.}$$
$$P=\frac{x}{1-x},$$
$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)},$$
$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$
$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$
etc.,

expressions dont le terme général est

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}.$$

Le coefficient de x^{n+m}, dans son développement, étant le même que celui de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)},$$

montre qu'il y a autant de manières de décomposer le nombre $n+m$, en m parties, que de former le nombre n avec les termes de la série $1, 2, 3, \ldots\ldots m$.

1195. En combinant ce théorème avec le précédent, on en pourrait déduire plusieurs autres assez remarquables, que nous sommes obligés d'omettre; mais nous allons prouver cette propriété de la progression

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \text{etc.},$$

qu'il n'y a pas de nombre entier qui ne puisse résulter de l'addition d'un certain nombre de ses termes, et cela d'une seule manière. En effet,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{ etc.}$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\text{etc};$$

pour s'assurer que la loi de cette dernière série demeure toujours la

même, on fera

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ etc.} = X$$
$$= 1 + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \text{etc.};$$

on écrira x^2 pour x, et il viendra

$$\frac{X}{1+x} = 1 + Px^2 + Qx^4 + Rx^6 + Sx^8 + \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$1 + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \text{etc.}$$
$$= 1 + x + Px^2 + Px^3 + Qx^4 + \text{etc.},$$
$$P = 1, \quad Q = P, \quad R = P, \quad S = Q, \quad \text{etc.}$$

La progression 1, 3, 9, 27, etc., jouit aussi de la propriété de former tous les nombres entiers possibles; mais il faut combiner ses termes tantôt par addition, tantôt par soustraction.

Les recherches dont nous venons de donner une idée ont occupé plusieurs géomètres : M. Paoli les a ramenées à l'intégration d'équations aux différences, du genre de celles que nous avons traitées d'après lui, dans le n° 1099; elles rentrent aussi dans l'analyse indéterminée. Former, par exemple, le nombre n avec les nombres $1, 2, 3, \ldots m$, c'est la même chose que de trouver toutes les valeurs dont les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu$, liées entr'elles par l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta \ldots + m\mu = n,$$

sont susceptibles en nombres entiers positifs. On pourrait pousser beaucoup plus loin cette théorie, qui se lie avec celle du développement d'une puissance quelconque du polynome $a + bx^\alpha + cx^\beta + \text{etc.}$ (*Int.* 20); mais nous devons reprendre la considération des valeurs des intégrales définies, interrompue depuis le n° 1180 (*).

(*) Parmi les lois remarquables dans la formation des coefficiens numériques d'un développement, on peut compter la suivante, consignée dans l'*Essai d'Architectonique de Lambert* (p. 507), et rappelée par M. Servois, dans le tome V des *Annales de Mathématiques* (p. 166).

La fonction

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} \ldots + \frac{x^m}{1-x^m} + \text{etc.},$$

étant développée suivant les puissances ascendantes de x, donne la série

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \text{etc.},$$

où chaque coefficient contient autant d'unités que l'exposant a de diviseurs ; l'exposant des termes affectés du coefficient 2 est un nombre premier, et tous les nombres premiers se présentent ainsi successivement.

1196. La valeur de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, entre les limites $x=0$ et x infini, trouvée *à priori* dans le n° 1169, se déduirait aussi de la comparaison de son développement en série avec celles du n° 1186, qui peuvent s'obtenir sans le secours d'aucune intégration, d'après ce qui a été dit dans le n° 1190. Continuation de la recherche des valeurs des intégrales définies.

L'équation

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{x^m}{m}-\frac{x^{m+n}}{m+n}+\frac{x^{m+2n}}{m+2n}-\frac{x^{m+3n}}{m+3n}+\text{etc.},$$

donne, lorsqu'on y fait $x=1$, la série

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\text{etc.},$$

qui exprime la valeur de l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; on a ensuite

$$\int\frac{x^{m-n-1}dx}{1+\frac{1}{x^n}}=\frac{x^{m-n}}{m-n}-\frac{x^{m-2n}}{m-2n}+\frac{x^{m-3n}}{m-3n}-\frac{x^{m-4n}}{m-4n}+\text{etc.}$$

En supposant $n>m$, cette dernière série s'évanouit lorsque x est infini; quand $x=1$, elle se réduit à

$$\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m-2n}+\frac{1}{m-3n}-\frac{1}{m-4n}+\text{etc.},$$

et donne la valeur de l'intégrale proposée, prise depuis x infini jusqu'à $x=1$, valeur d'un signe contraire à celle que nous cherchons: en la soustrayant donc de celle qu'on a déjà trouvée, on formera la série

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\text{etc.},$$

qui répond à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, et l'on aura ainsi la valeur de l'intégrale proposée.

Les mêmes moyens nous conduisent à la valeur des intégrales

$$\int\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}dx,\qquad\int\frac{x^{m-1}-x^{n-m-1}}{1-x^n}dx,$$

depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; car en développant, suivant les puissances ascendantes de x, les fonctions différentielles, on trouvera pour la pre-

mière de ces intégrales

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}$$
$$+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\text{ etc. }=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \quad (1186),$$

et pour la seconde,

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}$$
$$-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\text{ etc. }=\frac{\pi}{n\,\text{tang}\,\frac{m\pi}{n}}.$$

Nous conclurons de là que

$$\int\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=0\\x=\text{inf.}\end{bmatrix};$$

les petites équations renfermées entre des crochets marquent les limites des intégrales.

En observant que

$$\int\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx=\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}+\int\frac{x^{n-m-1}dx}{1+x^n},$$
$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=0\\x=\text{inf.}\end{bmatrix}-\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=1\\x=\text{inf.}\end{bmatrix},$$

on trouve cette relation remarquable,

$$\int\frac{x^{n-m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=1\\x=\text{inf.}\end{bmatrix}.$$

1197. Soit $n=2\lambda$ et $m=\lambda-\omega$; la formule $\int\frac{x^{m-1}\pm x^{n-m-1}}{1\pm x^n}\,dx$ deviendra

$$\int\frac{x^{\lambda-\omega}\pm x^{\lambda+\omega}}{1\pm x^{2\lambda}}\frac{dx}{x},$$

les valeurs $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$; $\frac{\pi}{n\,\text{tang}\frac{m\pi}{n}}$, se changeront en

$$\frac{\pi}{2\lambda\sin\frac{(\lambda-\omega)\pi}{2\lambda}}=\frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}}=S,$$

$$\frac{\pi}{2\lambda\,\text{tang}\frac{(\lambda\mp\omega)\pi}{2\lambda}}=\frac{\pi}{2\lambda\cot\frac{\omega\pi}{2\lambda}}=\frac{\pi\,\text{tang}\,\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{2\lambda}=T;$$

et, entre les limites $x=0$ et $x=1$, on aura

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}=S, \qquad \int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}=T.$$

Il est bien important d'observer que les exposans λ et ω peuvent recevoir ici toutes les valeurs possibles, quoique les expressions précédentes soient déduites d'une formule calculée dans la supposition que n et m soient des nombres entiers positifs (1169). Pour s'en convaincre, il faut faire $x=z^{\alpha}$, α désignant le dénominateur commun auquel on peut toujours concevoir que soient réduites les fractions quelconques λ et ω, en sorte que $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$ deviennent des nombres entiers; on a, dans cette hypothèse $\frac{dx}{x}=\frac{\alpha dz}{z}$, $x^{\lambda}=z^{\alpha\lambda}$, d'où il résulte

$$\int \frac{z^{\alpha(\lambda-\omega)}\pm z^{\alpha(\lambda+\omega)}}{1\pm z^{2\alpha\lambda}}\cdot\frac{\alpha dz}{z}:$$

les limites de l'intégrale demeurant les mêmes qu'avant la transformation, on obtiendra la valeur de cette intégrale, en substituant, dans les expressions S et T, les entiers $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$, au lieu de λ et de ω, et multipliant par α, ce qui ne les change en aucune manière.

Cela posé, si, dans l'équation

$$V=\int X dx,$$

les quantités V et X désignent des fonctions de x et de ω, on aura

$$\frac{dV}{d\omega}=\int\frac{dX}{d\omega}\,dx \;(546);$$

et de là on conclura, par ce qui précède, qu'entre les limites $x=0$ et $x=1$,

$$\frac{dS}{d\omega}=\frac{\pi^2\sin\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{4\lambda^2\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^2}=\int\frac{-x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}x,$$

$$\frac{dT}{d\omega}=\frac{\pi^2}{4\lambda^2\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^2}=-\int\frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}x.$$

Les expressions S et T ont aussi des développemens en série qui se déduisent de la substitution de 2λ et $\lambda-\omega$ à la place de n et de m, dans les séries du numéro précédent, et dont on tirerait par conséquent de nouvelles séries, en effectuant les différentiations indiquées par rapport à ω; nous les rapporterons plus bas.

Voilà quelques résultats de la troisième classe annoncée dans le n° 1164 : elle a fourni à Euler le sujet de plusieurs Mémoires intéressans, auxquels nous sommes forcés de renvoyer le lecteur; nous nous bornerons seulement à présenter quelques applications propres à fixer les idées et à faire connaître la nature de ces recherches. Si l'on pose, par exemple, $\omega = 0$, on aura, pour le second cas,

$$\int \frac{2x^{\lambda}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\,lx = \int \frac{2x^{\lambda-1}dx\,lx}{1-x^{2\lambda}} = -\frac{\pi^2}{4\lambda^2}.$$

En continuant de différentier par rapport à ω, on passe à de nouvelles intégrales définies, dont les valeurs se déduisent de celles qu'on a déjà obtenues; on trouve ainsi que

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^3} - \frac{1}{\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}}\right),$$

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\frac{2\sin\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^3}.$$

Les séries correspondantes se forment aussi par la différentiation, comme on l'a indiqué plus haut. Les nombreuses conséquences que l'on peut tirer de ces formules s'offrant d'elles-mêmes, nous n'en rapporterons qu'une seule, celle qui se présente lorsque $\omega = 0$ et $\lambda = 1$. La première des expressions ci-dessus donne

$$\int \frac{2dx(lx)^2}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8},$$

et la série qui lui correspond se change en

$$\frac{2}{1^3}+\frac{2}{1^3}-\frac{2}{3^3}-\frac{2}{3^3}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^3}-\frac{2}{7^3}-\frac{2}{7^3}+\text{etc.};$$

on a par conséquent

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.},$$

résultat assez remarquable quand on le compare à l'expression

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.},$$

qui dérive de la formule $\int \frac{dx}{1+x^2}$.

Il est facile de voir qu'on aura, par le procédé dont nous traçons ici la marche, les valeurs des deux classes suivantes de formules

$$\int U\frac{dx}{x} = S, \qquad \int V\frac{dx}{x} = T,$$
$$\int U'\frac{dx}{x}\,lx = \frac{dS}{d\omega}, \qquad \int V'\frac{dx}{x}\,lx = \frac{dT}{d\omega},$$
$$\int U\frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{d^2S}{d\omega^2}, \qquad \int V\frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{d^2T}{d\omega^2},$$
$$\int U'\frac{dx}{x}(lx)^3 = \frac{d^3S}{d\omega^3}, \qquad \int V'\frac{dx}{x}(lx)^3 = \frac{d^3T}{d\omega^3},$$

etc.,

en faisant, pour abréger,

$$U = \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}, \qquad V = \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}},$$
$$U' = \frac{-x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}, \qquad V' = \frac{-x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}.$$

Les séries correspondantes sont

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega}+\frac{1}{\lambda+\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}-\text{etc.},$$

et celles que donnent $\frac{dS}{d\omega}$, $\frac{d^2S}{d\omega^2}$, $\frac{d^3S}{d\omega^3}$, etc.,

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}+\text{etc.},$$

et celles que donnent $\frac{dT}{d\omega}$, $\frac{d^2T}{d\omega^2}$, $\frac{d^3T}{d\omega^3}$, etc.

Euler prescrit, pour différentier les expressions finies de S et de T, des procédés dont le détail ne saurait trouver place ici; on peut d'ailleurs les retrouver facilement, ou s'en former de nouveaux.

1198. L'intégration effectuée par rapport à ω fait aussi remonter à des formules dans lesquelles lx se trouve au dénominateur. On a par cette voie

$$\int d\omega \int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x} = \int\frac{dx}{x}\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}d\omega$$
$$= \int \frac{-x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\frac{1}{lx} = \int S d\omega,$$
$$\int d\omega \int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x} = \int\frac{dx}{x}\int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}d\omega$$
$$= \int \frac{-x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\frac{1}{lx} = \int T d\omega;$$

et conservant les dénominations établies à la fin du numéro précédent, on formera encore ces deux classes d'intégrales définies,

$$\int U' \frac{dx}{x} \frac{1}{1x} = \int S d\omega, \qquad \int V' \frac{dx}{x} \frac{1}{1x} = \int T d\omega,$$
$$\int U \frac{dx}{x} \frac{1}{(1x)^2} = \int^2 S d\omega^2, \qquad \int V \frac{dx}{x} \frac{1}{(1x)^2} = \int^2 T d\omega^2,$$
$$\int U' \frac{dx}{x} \frac{1}{(1x)^3} = \int^3 S d\omega^3, \qquad \int V' \frac{dx}{x} \frac{1}{(1x)^3} = \int^3 T d\omega^3,$$
etc.

Pour en obtenir des valeurs, il faut pouvoir intégrer les expressions finies de S et de T, et faire en sorte que les résultats s'évanouissent dans les mêmes circonstances que les fonctions en x. Or,

$S = \dfrac{\pi}{2\lambda \cos \frac{\omega\pi}{2\lambda}}$, en y faisant $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\pi}{2\lambda}$, donne

$$\int S d\omega = -\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = -\,1 \tang \tfrac{1}{2}\theta \ (447)$$
$$= -\,1 \tang \frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda} = 1 \tang \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda},$$

résultat qui s'évanouit lorsque $\omega = 0$, comme le fait la fonction U', dans le même cas.

D'un autre côté, si l'on intègre l'expression de S en série,

$$\frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.},$$

il viendra

$$\int S d\omega = -1(\lambda-\omega) + 1(\lambda+\omega) + 1(5\lambda-\omega) - 1(3\lambda+\omega) - \text{etc.}$$
$$= 1 \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)(9\lambda+\omega) \text{ etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)(9\lambda-\omega) \text{ etc.}}$$

Je n'ai point ajouté de constante à cette intégrale, parce qu'elle s'évanouit de même que la précédente, lorsque $\omega = 0$. La comparaison des expressions de $\int S d\omega$ nous conduit à

$$\tang \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega) \text{ etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega) \text{ etc.}}$$

Ce développement, qui se déduirait aussi des formules du n° 1188, a la propriété de s'évanouir lorsque

$$\omega = -\lambda, \quad \omega = +3\lambda, \quad \omega = -5\lambda, \quad \omega = +7\lambda, \quad \text{etc.},$$

valeurs qui répondent aux arcs

$$0, \qquad \pi, \qquad -\pi, \qquad 2\pi, \qquad \text{etc.},$$

et de devenir infini pour les valeurs

$$\omega=\lambda, \quad \omega=-3\lambda, \quad \omega=5\lambda, \quad \omega=-7\lambda, \quad \text{etc.},$$

ou les arcs

$$\tfrac{1}{2}\pi, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad \tfrac{3}{2}\pi, \qquad -\tfrac{3}{2}\pi, \qquad \text{etc.},$$

ce qui est conforme à la marche des tangentes.

Passons maintenant à l'intégrale

$$\int T\mathrm{d}\omega = \int \frac{\pi\mathrm{d}\omega}{2\lambda}\operatorname{tang}\frac{\omega\pi}{2\lambda} = -\mathrm{l}\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\ (447);$$

comme elle s'évanouit en même temps que ω, elle sera la valeur immédiate de $\int V'\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{1}{\mathrm{l}x}$.

La série

$$T=\frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}+\text{etc.},$$

donne

$$\int T\mathrm{d}\omega=-\mathrm{l}(\lambda-\omega)-\mathrm{l}(\lambda+\omega)-\mathrm{l}(3\lambda-\omega)-\mathrm{l}(3\lambda+\omega)-\text{etc.}+const.;$$

mais ici il faut avoir égard à la constante, pour que le résultat soit nul dans la supposition de $\omega=0$, et cela fait, on trouvera

$$\int T\mathrm{d}\omega=\mathrm{l}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\omega^2}\cdot\frac{9\lambda^2}{9\lambda^2-\omega^2}\cdot\frac{25\lambda^2}{25\lambda^2-\omega^2}\cdot\text{etc.}$$

La valeur finie de cette intégrale, $-\mathrm{l}\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}$, étant comparée au produit indéfini que nous venons d'obtenir, conduit à une expression de $\mathrm{l}\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}$, pareille à celle du n° 1181.

1199. Passons maintenant à la formule $\int\mathrm{d}x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p$ (*).

L'équation

$$(m+n)(m+2n)\ldots\ldots(m+pn)=\frac{n^p}{m}\,\frac{\int\mathrm{d}x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x^n)^p},$$

(*) C'est la seconde classe des intégrales nommées *Eulériennes* par M. Legendre (*voyez* la note de la page 421).

obtenue dans le n° 1159, devient

$$(q+1)(q+2)\ldots\ldots(q+p)=\frac{1}{qn}\,\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{qn-1}dx(1-x^n)^p},$$

lorsqu'on y fait $m=qn$; et comme on a d'ailleurs

$$1.2\ldots\ldots(q+p)=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+q},$$
$$1.2\ldots\ldots(q-1)q=q\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{q-1},$$

il en résulte

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+q}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{q-1}}=\frac{1}{n}\,\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{qn-1}dx(1-x^n)^p},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{q-1}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+q}}=n\int x^{qn-1}dx(1-x^n)^p.$$

Il faut se rappeler que toutes les intégrales de cette équation ont pour limites $x=0$ et $x=1$; pour plus d'uniformité, nous y changerons p en $p-1$, et nous aurons

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{q-1}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+q-1}}=n\int x^{qn-1}dx(1-x^n)^{p-1}\ldots(1).$$

En faisant $q=p$, dans cette équation, nous obtiendrons

$$\frac{\left[\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}\right]^2}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{2p-1}}=n\int x^{pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}\ldots(2);$$

désignant alors par i un nombre impair quelconque, posant..... $p=\frac{i}{2}$, $n=2$, et observant que

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{i-1}=1.2.3\ldots(i-1),$$

il viendra

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}-1} = \left\{1.2\ldots\ldots(i-1).2\int x^{i-1}dx(1-x^2)^{\frac{i}{2}-1}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

équation où l'intégrale du second membre ne dépend que du cercle (396 et 400).

Quand $i=1$, on a tout de suite

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi};$$

et comme, par les formules du n° 428, on trouve qu'entre les limites $x=0$ et $x=1$, p étant positif, mais d'ailleurs quelconque,

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p} = p\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1};$$

il s'ensuit que

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}-1} = \left(\frac{i}{2}-1\right)\left(\frac{i}{2}-2\right)\left(\frac{i}{2}-3\right)\ldots\left[\frac{i}{2}-\left(\frac{i-1}{2}\right)\right]\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}-1} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\ldots\left(\frac{i}{2}-1\right)\sqrt{\pi},$$

ou bien

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2i+1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\ldots\frac{2i+1}{2}.\sqrt{\pi},$$

en écrivant $2i+3$ au lieu de i.

2°. En faisant $q=2p$, nous trouverons

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{2p-1}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{3p-1}} = n\int x^{2pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}\ldots\ldots(3);$$

multipliant cette équation membre à membre, par l'équation (2), nous parviendrons à

$$\frac{\left[\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}\right]^3}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{3p-1}} = n^2\int x^{pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}.\int x^{2pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}\ldots(4):$$

posant ensuite $p=\frac{i}{3}$, $n=3$, nous obtiendrons

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1} = \left\{1.2.3\ldots(i-1).9\int x^{i-1}dx(1-x^3)^{\frac{i}{3}-1}\int x^{2i-1}dx(1-x^3)^{\frac{i}{3}-1}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Il est visible par cette équation, et par ce qui a été dit plus haut, que la transcendante $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}$ présente seulement deux cas distincts, savoir,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(l\frac{1}{x}\right)^2}} = \left\{9\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\right\}^{\frac{1}{3}}, \text{ lorsque } i = 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \left\{9\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \times \int\frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right\}^{\frac{1}{3}}, \text{ lorsque } i = 2,$$

ou, suivant la notation du n° 1170,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(l\frac{1}{x}\right)^2}} = \sqrt[3]{9\varphi(1, 1)\varphi(2, 1)},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{3\varphi(2, 2)\varphi(1, 2)},$$

en observant qu'en vertu de l'équation (2) du n° 1170,

$$\varphi(4, 2) = \frac{1}{3}\varphi(1, 2).$$

De cette manière, la formule $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}$ ne dépendra que de la seule transcendante désignée par A à la page 429.

1200. Ce que nous venons de faire sur les formules

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}-1}, \quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1},$$

peut s'effectuer également sur les autres formules du même genre; mais au lieu de nous arrêter à des cas particuliers, nous allons démontrer ce théorème général :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\left\{n^{n-m}.1.2\ldots(m-1)\varphi(1, m)\varphi(2, m)\ldots\varphi(n-1, m)\right\}^{\frac{1}{n}},$$

n et m étant des nombres entiers.

Soit, pour abréger, $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \psi\left(\frac{m}{n}\right)$; puisque l'on a

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r} = r\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r-1}, \quad \text{ou} \quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r-1} = \frac{1}{r}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r},$$

l'équation (1) se change en

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+p}{n}}} = \frac{mp}{m+p}\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

lorsqu'on y substitue $\frac{m}{n}$ à p, $\frac{p}{n}$ à q, et s'écrit ainsi :

$$\frac{\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{p}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+p}{n}\right)} = \frac{mp}{m+p}\,\varphi(p, m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$$

En mettant dans cette dernière successivement, au lieu de p, les nombres $1, 2, 3, \ldots\ldots n$, et multipliant tous les résultats entr'eux, il viendra

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n \frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+1}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)} =$$

$$m^n\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+n)}\,\varphi(1, m)\varphi(2, m)\ldots\varphi(n, m);$$

il est facile de voir que

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+n)} = \frac{1.2.3\ldots..m}{(n+1)(n+2)\ldots..(n+m)},$$

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+1}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3}{n}\right)\ldots..\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)} =$$

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3}{n}\right)\ldots\ldots.\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)}:$$

on conclut de là que

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n \frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)}=$$

$$m^n \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\varphi(1,m)\varphi(2,m)\ldots\varphi(n,m);$$

et comme

$$\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right),\ \psi\left(\frac{n+2}{n}\right)=\frac{n+2}{n}\psi\left(\frac{2}{n}\right),\ \psi\left(\frac{n+3}{n}\right)=\frac{n+3}{n}\psi\left(\frac{3}{n}\right),\ \text{etc.},$$

il viendra

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n=\frac{m^n}{n^m}.1.2.3\ldots m\varphi(1,m)\varphi(2,m)\varphi(3,m)\ldots\varphi(n,m)\ldots\ldots\ldots(B),$$

d'où l'on tirera l'équation du théorème, en observant que

$$\varphi(n,m)=\frac{1}{m}\ (1171).$$

1201. En supposant que les nombres m et n aient un diviseur commun r, nous tirerons encore de l'équation (A) la suivante :

$$\{r.2r.3r\ldots m\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\varphi(3r,m)\ldots\varphi(n,m)\}^r$$
$$=1.2.3\ldots m\varphi(1,m)\varphi(2,m)\varphi(3,m)\ldots\varphi(n,m).$$

Pour cela, nous y substituerons successivement r, $2r$, $3r$,....n à la place de p, et en multipliant les résultats, nous aurons

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\frac{\psi\left(\frac{r}{n}\right)\psi\left(\frac{2r}{n}\right)\psi\left(\frac{3r}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+r}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2r}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3r}{n}\right)\ldots\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)}$$
$$=m^{\frac{n}{r}}\frac{r.2r.3r\ldots\ldots n}{(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots(m+n)}\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\varphi(n,m)$$
$$=m^{\frac{n}{r}}\frac{r.2r.3r\ldots\ldots m}{(n+r)(n+2r)(n+3r)\ldots\ldots(n+m)}\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\varphi(n,m)$$
$$=\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\frac{\psi\left(\frac{r}{n}\right)\psi\left(\frac{2r}{n}\right)\psi\left(\frac{3r}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+r}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2r}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3r}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)};$$

or, $\psi\left(\frac{n+r}{n}\right)=\frac{n+r}{n}\psi\left(\frac{r}{n}\right)$, et ainsi de suite : par ces valeurs, les deux dernières lignes ci-dessus donnent

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}n^{\frac{m}{r}}=m^{\frac{n}{r}}.r.2r.3r\ldots\ldots m\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\ldots\varphi(n,m),$$

d'où il résulte

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n = \frac{m^n}{n^m}\{r.2r.3r\ldots m\varphi(r, m)\varphi(2r, m)\ldots\varphi(n, m)\};$$

et comparant cette équation avec la dernière du numéro précédent, on aura celle du théorème.

1202. Lorsqu'on prend $p = n - m$, l'équation (A) devient

$$\frac{\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{n-m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{m(n-m)}{n}\,\varphi(n-m, m);$$

mais on a, par le nº 1171, $\varphi(n-m, m) = \dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, et de plus.... $\psi\left(\frac{n}{n}\right) = 1$; il viendra donc

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{n-m}{n}\right) = \frac{m(n-m)\pi}{n^2\sin\frac{m\pi}{n}}\ldots(C).$$

Faisons successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., et multiplions, membre à membre, les équations résultantes, nous obtiendrons

$$\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right)^2\psi\left(\frac{2}{n}\right)^2\ldots\ldots\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{[1.2.3\ldots\ldots(n-1)]^2\pi^{n-1}}{n^{2n-2}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Le produit

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

s'évalue par le moyen de la formule (C) du nº 1189, en faisant attention que

$$\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.\cos\frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2},$$

et ainsi des autres. On aura par cette remarque

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1}\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\sin\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}$$
$$\times\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\sin\frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

d'où l'on conclura

$$\psi\left(\frac{1}{n}\right)^2\psi\left(\frac{2}{n}\right)^2\ldots\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{[1.2\ldots(n-1)]^2 2^{n-1}\pi^{n-1}}{n^{2n-2}.n}\ldots(D);$$

prenant la racine de chaque membre de cette équation, et mettant au lieu de la fonction ψ l'intégrale qu'elle représente, il viendra

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}\ldots\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}}.$$

Ce beau théorème se trouve, mais sans démonstration, dans un Mémoire inédit d'Euler, que M. Prony m'a communiqué (*).

1203. Les relations indiquées dans le n° 1160 font voir que les divers théorèmes énoncés ci-dessus, par rapport aux intégrales $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$, peuvent être traduits en factorielles; d'ailleurs, l'identité de ces deux genres de fonctions résulte aussi des équations fondamentales qui caractérisent leur marche, puisqu'on a également

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p=p\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}, \quad \text{et} \quad [p]^p=p[p-1]^{p-1}:$$

il est donc permis de substituer la notation de Vandermonde à celle des numéros précédens, que je n'ai employée que pour laisser plus à part la marche suivie par Euler.

On simplifie à quelques égards l'équation (A), lorsqu'on y diminue de l'unité l'indice des fonctions ψ, ou l'exposant des factorielles correspondantes. On obtient de cette manière

$$\frac{\frac{m}{n}\left[\frac{m}{n}-1\right]^{\frac{m}{n}-1}\frac{p}{n}\left[\frac{p}{n}-1\right]^{\frac{p}{n}-1}}{\frac{m+p}{n}\left[\frac{m+p}{n}-1\right]^{\frac{m+p}{n}-1}}=\frac{mp}{m+p}\varphi(m,p),$$

ce qui se réduit à

(*) Ceci est le texte de la première édition du présent volume, publiée en 1800.

$$\frac{\left[\frac{m}{n}-1\right]^{\frac{m}{n}-1}\left[\frac{p}{n}-1\right]^{\frac{p}{n}-1}}{n\left[\frac{m+p}{n}-1\right]^{\frac{m+p}{n}-1}}=\varphi(m,p),$$

équation identique avec celle qui est marquée (ε) sur la page 279 du premier volume des *Exercices de Calcul intégral,* où M. Legendre fait $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}=\Gamma(p)$, notation d'après laquelle l'équation ci-dessus deviendrait

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m+p}{n}\right)}=\varphi(m,p)\ (*).$$

La même équation est reproduite, à la page 7 du second volume de l'ouvrage cité, mais sous une forme un peu plus simple, qui résulte du changement de x^n en x, par lequel

$$\varphi(m,p)=\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1} \text{ devient } \frac{1}{n}\int x^{\frac{m}{n}-1}dx(1-x)^{\frac{p}{n}-1};$$

et si l'on remplace ensuite $\frac{m}{n}$ par m, $\frac{p}{n}$ par p, et l'intégrale par $\varphi(m,p)$, la lettre n disparaît : on a simplement

$$\frac{[m-1]^{m-1}[p-1]^{p-1}}{[m+p-1]^{m+p-1}}=\varphi(m,p), \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma(m)\Gamma(p)}{\Gamma(m+p)}=\varphi(m,p),$$

comme on le déduirait immédiatement de l'intégration par parties, qui donne, entre les limites $x=0$ et $x=1$,

$$\int x^{m-1}dx(1-x)^{p-1}=\frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\ldots 1}{m(m+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(m+p-1)} \quad (1159).$$

Si l'on transforme de même l'équation (C) du n° 1202, en observant que $\psi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}\,\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$, on aura celle qui termine la page 280 du pre-

(*) On voit qu'il y a maintenant trois dénominations en usage pour désigner la même fonction, savoir, *faculté numérique*, *factorielle* et *gamma ;* car M. Legendre énonce $\Gamma(p)$ par le *gamma* de p. La seconde dénomination qui est univoque, ainsi que la troisième, a ce me semble l'avantage de rappeler une analogie remarquable, tandis que cette troisième n'exprime qu'une convention purement due au hasard qui a fixé le choix de l'auteur sur la lettre Γ, plutôt que sur tout autre signe.

mier volume des *Exercices de Calcul intégral*, savoir,

$$\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{n\omega}{\sin m\omega}.$$

L'équation (B)(1200), qui fait connaître la fonction $\psi\left(\frac{m}{n}\right)$ par les fonctions φ, conduirait à l'équation (x) de la page 282 du volume cité. Si l'on fait d'abord $m=1$, que l'on mette pour $\varphi(n, m)$ sa valeur, qui devient 1 (1171), on trouvera sans peine que

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=n\sqrt{\frac{1}{n}\varphi(1,1)\varphi(2,1)\varphi(3,1)\ldots\ldots\varphi(n-1,1)},$$

comme on le déduirait immédiatement de l'équation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+p}{n}\right)}=n\varphi(m,p),$$

en faisant $m=1$, puis donnant à p les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots r-1$, et multipliant entr'elles, membre à membre, toutes les équations résultantes de ces valeurs, ce qui formerait l'équation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)^r}{n^{r-1}\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}=\varphi(1,1)\varphi(1,2)\varphi(1,3)\ldots\ldots\varphi(1,r-1).$$

Posant alors $r=n$, et se rappellant que $\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)=[\overset{0}{0}]=1$, on reviendrait à la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ rapportée ci-dessus.

En laissant à r sa valeur indéterminée, on obtient la formule

$$\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)^r}{n^{r-1}\varphi(1,1)\varphi(1,2)\ldots\varphi(1,r-1)}$$

qui ramène la détermination de $\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)$ à celle des fonctions $\varphi(1, 1)$, $\varphi(1, 2)$, etc.

Si l'on remplace dans l'équation (D) les fonctions $\psi\left(\frac{1}{n}\right)$, $\psi\left(\frac{2}{n}\right)$, etc., par $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{}{n}\right)$, $\frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, etc., et qu'on réduise ensuite les deux membres, on aura

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\Gamma\left(\tfrac{2}{n}\right)^2\ldots\Gamma\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2=\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n},$$

d'où, comme à la page 23 du second volume de l'ouvrage cité,

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\tfrac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

1204. Le chapitre III de l'*Analyse des réfractions astronomiques* est terminé par des méthodes pour calculer, soit rigoureusement, soit par approximation, la valeur des factorielles que M. Kramp nommait alors *facultés numériques*, et dont il a fait un grand usage dans ce Traité. Ses procédés dépendent en grande partie du développement des puissances des polynomes dont les Géomètres Allemands se sont beaucoup occupés (*Int.* 20); mais pour atteindre ce but, M. Legendre a pris une route différente. Il s'est spécialement attaché à la réduction du nombre des transcendantes contenues dans la fonction $\Gamma(p)$, et qui sont toutes renfermées entre deux valeurs de p, ne différant que de l'unité, puisqu'on a, en général,

$$[p]^{p}=p[p-1]^{p-1},\quad \text{ou}\quad \Gamma(p+1)=p\Gamma(p),$$

et qu'on peut par ce moyen ôter du nombre p tous les entiers qui s'y trouvent contenus. Il suffit donc de déterminer les valeurs de la factorielle $[p]^{p}$, dans l'intervalle de $p=0$ à $p=1$. C'est aussi ce que fait M. Legendre, qui a formé ses tables de $\Gamma(p)$ depuis $p=1$ jusqu'à $p=2$, d'abord avec 7 décimales, à la page 302 du premier volume des *Exercices*, etc., et ensuite avec 12, à la page 85 du second.

C'est dans cet ouvrage qu'il faut voir le détail des relations multipliées, au moyen desquelles l'auteur a simplifié le calcul de ses tables; je me bornerai à faire observer que si l'on pose $\frac{m}{n}=p$, dans l'équation (C) du nº 1202, elle revient à

$$[p]^{p}[1-p]^{1-p}=\frac{p(1-p)\pi}{\sin p\pi},\quad \text{ou à}\quad \Gamma(1+p)\Gamma(2-p)=\frac{p(1-p)\pi}{\sin p\pi},$$

et sert à calculer les valeurs de $[p]^{p}$, depuis $p=\frac{1}{2}$ jusqu'à $p=1$, lorsqu'on les connaît depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{1}{2}$.

Pour obtenir celles-ci, M. Legendre a d'abord recours à la formule

d'Euler, rapportée dans le n° 1008. En observant que

$$\mathrm{l}[\overset{p+q}{p+q}] = \mathrm{l}(p+q) + \mathrm{l}(p+q-1)\ldots+\mathrm{l}(p+1) + \mathrm{l}[\overset{p}{p}],$$

on en conclut

$$\mathrm{l}[\overset{p}{p}] = \mathrm{l}[\overset{p+q}{p+q}] - \mathrm{l}(p+q) - \mathrm{l}(p+q-1)\ldots-\mathrm{l}(p+1),$$

et qu'il est possible de parvenir à $\mathrm{l}[\overset{p}{p}]$, lors même que p est assez petit, si la série du numéro cité est convergente, sans qu'il soit besoin de prendre pour q un nombre entier bien considérable. Or, M. Legendre a remarqué (*Exercices*, etc., t. II, p. 63), qu'en faisant $p+q>5$, les sept ou huit premiers termes de la suite donnent la valeur du logarithme cherché, avec 12 décimales exactes. De plus, il a employé l'interpolation pour resserrer les nombres de ses tables.

1205. Pour parvenir à évaluer des intégrales simples, ou à les comparer entr'elles, M. Laplace a quelquefois considéré des intégrales doubles. Voici un exemple de son procédé, sur l'intégrale,

$$\iint e^{-s(1+x^n)}\mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

En commençant par intégrer, relativement à la variable s, on obtient

$$\int \mathrm{d}x \int e^{-s(1+x^n)}\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n},$$

lorsqu'on prend pour limites $s=0$ et $s=$ infini; mais l'intégrale du second membre, prise aussi depuis $x=0$ jusqu'à x infini, étant connue par le n° 1169, on a ce résultat final,

$$\iint e^{-s(1+x^n)}\mathrm{d}s\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Si l'on commence les intégrations par rapport à la variable x, qu'on fasse pour cela $sx^n = t^n$, d'où $x=\frac{t}{s^{\frac{1}{n}}}$, et qu'on différentie en regardant s comme constante, il viendra

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{s^{\frac{1}{n}}}, \quad \text{et} \quad \iint e^{-s(1+x^n)}\mathrm{d}s\mathrm{d}x = \int \frac{e^{-s}\mathrm{d}s}{s^{\frac{1}{n}}} \int e^{-t^n}\mathrm{d}t.$$

Soit fait ensuite $s=t^n$, on aura $s^{\frac{1}{n}}=t$, $\mathrm{d}s = nt^{n-1}\mathrm{d}t$, et l'intégrale

double ci-dessus deviendra

$$n\int e^{-t^n}dt\int e^{-t^n}t^{n-2}dt = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}},$$

en intervertissant l'ordre des intégrales dans le premier membre, les limites des deux intégrations demeurant toujours $t=0$ et $t=$infini; et comme la variable disparaît dans chaque intégration, l'équation précédente, qui peut s'écrire ainsi,

$$n\left(\int e^{-t^n}dt\right)\left(\int e^{-t^n}t^{n-2}dt\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}},$$

fera connaître l'une des deux intégrales du premier membre, au moyen de l'autre.

En faisant $n=2$, il vient

$$2\left(\int e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},\quad \text{d'où}\quad \int e^{-t^2}dt = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

comme dans le nº 1167.

M. Laplace transforme encore les intégrales précédentes, en changeant d'abord n en $\frac{n}{r-1}$, d'où il résulte

$$n^2\int e^{-t^{\frac{n}{r-1}}}dt.\int e^{-t^{\frac{n}{r-1}}}t^{\frac{n}{r-1}-2}dt = \frac{(r-1)^2\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi},$$

puis t en t^{r-1}, d'où

$$n^2\int e^{-t^n}t^{r-2}dt.\int e^{-t^n}t^{n-r}dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi},$$

équation au moyen de laquelle tous les termes de la série d'intégrales

$$\int e^{-t^i}dt,\qquad \int e^{-t^i}t^2dt,\qquad \int e^{-t^i}t^4dt,\ldots\int e^{-t^i}t^{i-2}dt,$$

sont déterminés lorsqu'on en connaît $\frac{i}{2}$, si ce nombre est pair, ou $\frac{i-1}{2}$, s'il est impair.

M. Laplace considère aussi, dans le même endroit, l'expression $\int e^{-t^{n+1}}t^n dt$, qui, mise sous la forme $\int t^{n-m}.e^{-t^{m+1}}t^m dt$, et intégrée par parties, conduit à

$$\int e^{-t^{m+1}}t^n\mathrm{d}t = -\frac{e^{-t^{m+1}}}{m+1}\times$$
$$\Big\{t^{n-m}+\frac{n-m}{m+1}\,t^{n-2m-1}+\frac{(n-m)(n-2m-1)}{(m+1)^2}\,t^{n-3m-2}\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(n-m)(n-2m-1)(n-3m-2)\ldots..(n-rm+m-r+2)}{(m+1)^{r-1}}\,t^{n-rm-r+1}\Big\}$$
$$+\frac{(n-m)(n-2m-1)\ldots(n-rm-r+1)}{(m+1)^r}\int e^{-t^{m+1}}t^{n-r(m+1)}\mathrm{d}t,$$

r désignant le quotient en nombre entier de n par $m+1$. La partie délivrée du signe $\int$ s'évanouit entre les limites $t=0$ et $t=$ infini; l'intégrale disparaît lorsque $n+1=r(m+1)$.

Il est d'ailleurs à propos d'observer que si l'on fait $e^{-t^{m+1}}=x$, il vient

$$\int e^{-t^{m+1}}t^n\mathrm{d}t = -\frac{1}{m+1}\int \mathrm{d}x\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{m+1}},$$

dont nous avons rapporté plus haut les principales réductions découvertes par Euler; et c'est dans ce sens que M. Legendre (*Exercices de Calcul intégral*, t. I, p. 301), rapporte à Euler la détermination de l'intégrale $\int e^{-t^2}\mathrm{d}t$, qui n'est que la transformée de $\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

1206. Le passage du réel à l'imaginaire est encore un moyen qu'Euler et M. Laplace ont employé avec succès, pour découvrir de nouvelles intégrales définies.

Si l'on fait $z=ky$ dans l'équation

$$1.2\ldots.p=\int e^{-z}z^p\mathrm{d}z \quad (1159),$$

elle devient

$$1.2\ldots.p=k^{p+1}\int e^{-ky}y^p\mathrm{d}y;$$

et Euler, considérant que le nombre k n'était assujéti qu'à la seule condition de ne pas rendre positif l'exposant de e^{-ky}, afin que cette fonction fût toujours nulle lorsqu'on supposait y infini, pensa qu'on pouvait donner à k une forme imaginaire. Or, si l'on prend

$$k=q\pm r\sqrt{-1},\quad \text{d'où}\quad e^{-ky}=e^{-qy}(\cos ry\mp\sqrt{-1}\sin ry),$$

on tire de l'équation posée ci-dessus,

$$[p]=(q\pm r\sqrt{-1})^{p+1}\int e^{-qy}y^p\mathrm{d}y(\cos ry\mp\sqrt{-1}\sin ry).$$

Pour simplifier le second membre, faisons

$$q=f\cos\theta,\quad r=f\sin\theta,\quad \text{d'où}\quad f^2=q^2+r^2,\quad \tan\theta=\frac{r}{q},$$

puis changeons p en $p-1$; nous aurons

$$[p-\overset{p-1}{1}] = f^p(\cos p\theta \pm \sqrt{-1}\sin p\theta)\int e^{-ry}y^{p-1}dy(\cos ry \mp \sqrt{-1}\sin ry),$$

et en séparant, dans cette dernière, la partie imaginaire, de la partie réelle, pour en former deux équations distinctes, nous obtiendrons

$$\frac{[p-\overset{p-1}{1}]}{f^p} = \cos p\theta\int e^{-ry}y^{p-1}dy\cos ry + \sin p\theta\int e^{-ry}y^{p-1}dy\sin ry,$$
$$0 = \sin p\theta\int e^{-ry}y^{p-1}dy\cos ry - \cos p\theta\int e^{-ry}y^{p-1}dy\sin ry,$$

d'où il est aisé de conclure

$$\int e^{-ry}y^{p-1}dy\cos ry = \frac{[p-\overset{p-1}{1}]\cos p\theta}{f^p},$$

$$\int e^{-ry}y^{p-1}dy\sin ry = \frac{[p-\overset{p-1}{1}]\sin p\theta}{f^p},$$

résultats très-remarquables, présentés à l'Académie de Pétersbourg en 1781, et qui seront vérifiés plus loin.

1207. Considérons encore, avec M. Laplace, l'intégrale

$$\int e^{-a^2x^2}dx\cos rx, \quad \text{entre les limites} \quad x=0,\ x=\text{infini}.$$

En y mettant pour $\cos rx$ l'expression $\frac{1}{2}(e^{rx\sqrt{-1}}+e^{-rx\sqrt{-1}})$, cette intégrale devient

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-a^2x^2+rx\sqrt{-1}}dx + \tfrac{1}{2}\int e^{-a^2x^2-rx\sqrt{-1}}dx;$$

mais on peut faire en sorte que l'exposant de e, sous le signe $\int$, devienne un quarré, en observant que

$$a^2x^2 - rx\sqrt{-1} = \left[a^2x^2 - 2arx\frac{\sqrt{-1}}{2a} + \frac{(r\sqrt{-1})^2}{4a^2}\right] + \frac{r^2}{4a^2},$$

et que par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-a^2x^2+rx\sqrt{-1}}dx = e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\int e^{-\left(ax-\frac{r\sqrt{-1}}{2a}\right)^2}dx.$$

Posant donc

$$ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a} = t, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{dt}{a},$$

l'intégrale ci-dessus deviendra

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a}\int e^{-t^2}dt,$$

et ses limites seront $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$, $t =$ infini.

Changeant ensuite le signe de r, on aura pour l'autre intégrale

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a}\int e^{-t^2}dt,$$

et ses limites seront $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$, $t =$ infini.

Or, cette intégrale ayant pour les t négatifs la même valeur, au signe près, que pour les t positifs, on voit que dans la première, la partie comprise depuis $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ jusqu'à o, complète ce qui manque à la seconde, qui ne commence qu'à $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$; ainsi la somme des deux intégrales équivaut à 2 fois l'une d'elles, prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t =$ infini; et prenant la valeur de $\int e^{-t^2}dt$ entre ces limites (1167), on aura donc

$$\int e^{-a^2x^2}dx \cos rx = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{2a}\sqrt{\pi}.$$

1208. Les différentiations relatives à la variable r donneront une suite de nouvelles intégrales, comprises dans les formules

$$\int e^{-a^2x^2}x^{2n}dx \cos rx = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{dr^{2n}},$$

$$\int e^{-a^2x^2}x^{2n+1}dx \sin rx = \mp\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^{2n+1}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{dr^{2n+1}},$$

le signe supérieur répondant au cas où n est paire, et le signe inférieur au cas contraire.

Au lieu de différentier, si l'on intègre, en posant

$$\int dr\int e^{-a^2x^2}dx \cos rx = \int e^{-a^2x^2}dx\int dr \cos rx = \sqrt{\pi}\int e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\frac{dr}{2a},$$

on trouvera

$$\int e^{-a^2x^2}dx\frac{\sin rx}{x} = \sqrt{\pi}\int e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\frac{dr}{2a} = \sqrt{\pi}\int e^{-t^2}dt,$$

en faisant $\frac{r}{2a}=t$. Cela posé, la dernière intégrale, prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=$ infini, sera $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; mais on rend t infini, en laissant r fini et supposant $a=0$, ce qui fait disparaître le facteur $e^{-a^2x^2}$ dans le premier membre, et donne en conséquence

$$\int\frac{dx\sin rx}{x}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

prise entre les limites $x=0$ et x infini.

1209. Le passage du réel à l'imaginaire, par lequel on a trouvé d'abord les expressions des deux numéros précédens, peut être utile comme moyen de recherche; mais ses résultats ont paru avoir besoin de confirmation, et M. Laplace est parvenu, sans le secours des imaginaires, au résultat du n° 1207.

En posant

$$\int e^{-a^2x^2}dx\cos rx=y,$$

et différentiant par rapport à r, il en tire

$$\frac{dy}{dr}=-\int e^{-a^2x^2}xdx\sin rx;$$

puis en intégrant par parties, par rapport au facteur $e^{-a^2x^2}xdx$, il obtient

$$\frac{dy}{dr}=\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}\sin rx-\frac{r}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}dx\cos rx,$$

ce qui revient à

$$\frac{dy}{dr}=-\frac{r}{2a^2}y,\qquad \text{ou}\qquad \frac{dy}{dr}+\frac{r}{2a^2}y=0,$$

lorsqu'on suppose x infini dans la partie délivrée du signe $\int$.

L'équation ci-dessus, entre les variables y et r, a pour intégrale

$$y=Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

C étant une constante arbitraire qu'on peut déterminer par la valeur que prend y lorsque $r=0$, savoir,

$$\int e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\ (1167);$$

on a donc, comme dans le numéro 1207,

$$\int e^{-a^2x^2}dx\cos rx=\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Ici se montre un nouvel artifice d'Analyse, qui consiste à former entre les intégrales définies et quelques-unes des constantes qu'elles contiennent, des équations différentielles que l'on puisse intégrer. C'est par cet artifice que M. Poisson, dans le 16ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, où il a publié des recherches fort étendues sur les intégrales définies, a vérifié les deux résultats trouvés, d'après Euler, dans le nº 1206.

En posant

$$\int e^{-qx}x^{p-1}\mathrm{d}x\cos rx = y, \qquad \int e^{-qx}x^{p-1}\mathrm{d}x\sin rx = z,$$

et différentiant par rapport à r, il obtient les équations

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = -\int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\sin rx, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\cos rx.$$

L'intégration par parties, de leurs seconds membres, composés de trois facteurs variables, s'effectue par la formule

$$\int uv\mathrm{d}t = tuv - \int tv\mathrm{d}u - \int tu\mathrm{d}v,$$

tirée de l'équation

$$\mathrm{d}.tuv = uv\mathrm{d}t + tv\mathrm{d}u + tu\mathrm{d}v,$$

et par rapport au facteur $e^{-qx}\mathrm{d}x$, donne

$$\left.\begin{aligned}\int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\sin rx = &-\frac{1}{q}e^{-qx}x^{p}\sin rx\\ &+\frac{r}{q}\int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\cos rx+\frac{p}{q}\int e^{-qx}x^{p-1}\mathrm{d}x\sin rx\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\cos rx = &-\frac{1}{q}e^{-qx}x^{p}\cos rx\\ &-\frac{r}{q}\int e^{-qx}x^{p}\mathrm{d}x\sin rx+\frac{p}{q}\int e^{-qx}x^{p-1}\mathrm{d}x\cos rx\end{aligned}\right\}.$$

La partie délivrée du signe $\int$ s'évanouit dans chacune de ces expressions, les limites étant $x=0$, $x=$ infini, p et q étant des nombres positifs. Par cette considération, on déduit de ce qui précède,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} &= -\frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}-\frac{p}{q}z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} &= \frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}+\frac{p}{q}y;\end{aligned}$$

et si, par l'élimination, on transforme ces équations en d'autres qui ne contiennent qu'une seule des différentielles $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$, dégagée de tout

coefficient (619), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} dy + \frac{p}{q}\left(\frac{ry}{q} + z\right)\frac{q^2dr}{q^2+r^2} = o \\ dz + \frac{p}{q}\left(\frac{rz}{q} - y\right)\frac{q^2dr}{q^2+r^2} = o \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} dy + p(y\,\text{tang}\,t + z)dt = o \ldots\ldots(1), \\ dz + p(z\,\text{tang}\,t - y)dt = o \ldots\ldots(2), \end{array}\right.$$

en faisant attention que

$$\frac{qdr}{q^2+r^2} = d.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{r}{q}\right),$$

et posant, en conséquence, $\frac{r}{q} = \text{tang}\,t$.

Multipliant ensuite l'équation (1) par y, l'équation (2) par z, et ajoutant les produits, on trouvera

$$ydy + zdz + (y^2+z^2)pdt\,\text{tang}\,t = o,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{ydy+zdz}{y^2+z^2} = -\frac{pdt\sin t}{\cos t},$$

équation ayant pour intégrale

$$\tfrac{1}{2}\,l\,(y^2+z^2) = p\,l\cos t + lA, \quad \text{ou} \quad y^2+z^2 = A^2\cos t^{2p} \ldots\ldots(3).$$

Revenant encore aux équations (1) et (2), pour multiplier la première par z, la deuxième par y, et retranchant le premier produit du second, on aura

$$ydz - zdy - (y^2+z^2)pdt = o, \quad \text{ou} \quad \frac{ydz-zdy}{y^2+z^2} = pdt,$$

équation dont l'intégrale est

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{y}\right) = pt + B\ (547), \quad \text{ou} \quad \frac{z}{y} = \text{tang}\,(pt+B) \ldots (4),$$

B étant encore une constante arbitraire.

Pour déterminer celle-ci, il suffit d'observer que si l'on fait $r=o$, ce qui donne $t=o$, z s'évanouit, mais non pas y, et qu'ainsi il faut que $B=o$, et que par conséquent $z = y\,\text{tang}\,pt$.

Avec cette valeur, l'équation (3) devient

$$y^2[1+(\text{tang}\,pt)^2] = A^2\cos t^{2p}, \quad \text{d'où} \quad y = A\cos t^p\cos pt;$$

et A représente la valeur que prend y lorsque $t=o$: or, dans ce cas,

il se réduit à $\int e^{-t^q x} x^{p-1} dx$, que la supposition de $qx = u$ change en

$$\frac{1}{q^p}\int e^{-u} u^{p-1} du = \frac{1}{q^p}\left[p-\overset{p-1}{1}\right] (1159),$$

puisque les limites de u sont les mêmes que celles de x. Telle est la valeur de A, de laquelle il résulte enfin

$$y = \frac{\cos t^p}{q^p}\left[p-\overset{p-1}{1}\right]\cos pt, \quad z = \frac{\cos t^p}{q^p}\left[p-\overset{p-1}{1}\right]\sin pt,$$

expressions qui rentrent dans celles du n° 1206, lorsqu'on change t en θ, en observant que

$$f = \sqrt{q^2+r^2} = q\sqrt{1+\tang\theta^2} = \frac{q}{\cos\theta}.$$

1210. Les formules précédentes offrent encore une conséquence remarquable; c'est l'évaluation des intégrales $\int dx \cos rx$ et $\int dx \sin rx$, prises entre les limites $x=0$ et $x=$infini. Pour y arriver, il suffit de faire

$$p=1, \quad q=0, \quad \text{d'où il résulte} \quad \left[p-\overset{p-1}{1}\right]=1, \quad \theta=\frac{\pi}{2}, \quad f=r,$$

et par conséquent

$$\int dx \cos rx = 0, \qquad \int dx \sin rx = \frac{1}{r}.$$

1211. C'est par la considération des intégrales doubles, que M. Laplace a obtenu, entre les limites $x=0$ et $x=$infini, la valeur de

$$\int \frac{dx \cos rx}{1+x^2},$$

qui n'est qu'un cas particulier de

$$\int \frac{dx \cos ax}{1+x^n},$$

que M. Poisson fait dépendre de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{da^n} - y = 0,$$

dans le Mémoire cité n° 1209. Je me bornerai ici à développer le cas où $n=1$, qui est suffisant pour faire connaître l'esprit de la méthode.

En posant

$$y=\int\frac{dx\cos ax}{1+x^2},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{da}=-\int\frac{xdx\sin ax}{1+x^2},$$

$$\frac{d^2y}{da^2}=-\int\frac{x^2dx\cos ax}{1+x^2}=-\int dx\cos ax+\int\frac{dx\cos ax}{1+x^2}$$
$$=\int\frac{dx\cos ax}{1+x^2},$$

en vertu du numéro précédent, on a l'équation

$$\frac{d^2y}{da^2}-y=0,\quad \text{et}\quad y=Ce^a+C'e^{-a}\ (604),$$

C et C' étant deux constantes arbitraires.

Pour les déterminer, M. Poisson observe d'abord que $\cos ax$ ne pouvant jamais surpasser l'unité, quel que soit a, il s'ensuit que

$$y<\int\frac{dx}{1+x^2},$$

limite qui est indépendante de a, et ne peut devenir infinie en même temps que cette lettre, et que par conséquent l'expression de y ne doit pas contenir la fonction e^a; on a donc seulement

$$y=C'e^{-a};$$

mais lorsque $a=0$, $y=\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$; donc

$$\int\frac{dx\cos ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}=\frac{\pi}{2e^a},$$

ainsi que l'a trouvé M. Laplace, et d'où, par la différentiation relative à la lettre a, il a conclu

$$\int\frac{xdx\sin ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2e^a}\ (*).$$

(*) On peut déterminer en même temps les deux constantes C et C' par la considération des valeurs que prennent y et $\frac{dy}{da}$ lorsque $a=0$; car si dans l'intégrale $\frac{dy}{da}=-\int\frac{xdx\sin ax}{1+x^2}$, on fait $ax=z$, il vient $\frac{dy}{da}=-\int\frac{zdz\sin z}{a^2+z^2}$, que la supposition de $a=0$, réduit à $\frac{dy}{da}=-\int\frac{dz\sin z}{z}=-\frac{\pi}{2}$ (1208); et l'expression $y=Ce^a+C'e^{-a}$ donne pour y et $\frac{dy}{da}$, dans la même circonstance,

$$C+C'=\frac{\pi}{2},\quad \text{et}\quad C-C'=-\frac{\pi}{2},$$

d'où $C=0$, et $C'=\frac{\pi}{2}$, comme ci-dessus.

Faisant ensuite $x = \frac{t}{m}$, dans l'équation

$$\int \frac{dx \cos ax}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2e^a},$$

on en déduit

$$\frac{1}{m} \int \frac{dt \cos \frac{a}{m} t}{1 + \frac{t^2}{m^2}} = m \int \frac{dt \cos rt}{m^2 + t^2} = \frac{\pi}{2e^{mr}},$$

en posant $\frac{a}{m} = r$; et on tire de là

$$\int \frac{dt \cos rt}{m^2 + t^2} = \frac{\pi}{2me^{mr}},$$

les limites de t étant o et l'infini.

La différentiation relative à r donne

$$\int \frac{tdt \sin rt}{m^2 + t^2} = \frac{\pi}{2e^{mr}}.$$

1212. Par cette détermination, M. Legendre (*Exerc. de Calc. int.*, t. II, p. 123), s'élève à celle de

$$\int \frac{zdz}{m^2 + z^2} \, \frac{\sin 2az}{1 - 2r \cos 2az + r^2},$$

entre les limites $z = 0$ et $z =$ infini. En développant, suivant les puissances de r, le second facteur de l'intégrale, il trouve

$$\frac{\sin 2az}{1 - 2r \cos 2az + r^2} = \sin 2az + r \sin 4az + r^2 \sin 6az + r^3 \sin 8az + \text{etc};$$

or, ce développement étant multiplié par le premier facteur de l'intégrale, conduit à des termes compris dans la formule

$$\int \frac{zdz \sin kz}{m^2 + z^2} = \frac{\pi}{2e^{km}} = \frac{\pi}{2} e^{-km};$$

faisant donc $k = 2a$, $= 4a$, $= 6a$, etc., il obtient

$$\int \frac{zd}{m^2 + z^2} \, \frac{\sin 2az}{1 - 2r \cos 2az + r^2} = \frac{\pi}{2} (e^{-2am} + re^{-4am} + r^2 e^{-6am} + \text{etc.})$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2am} - r} \ldots\ldots (a).$$

En changeant le signe de r, on aura

$$\int \frac{zdz}{m^2 + z^2} \, \frac{\sin 2az}{1 + 2r \cos 2az + r^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2am} + r} \ldots\ldots (b).$$

Posant ensuite $r=1$ dans les deux valeurs, on en déduira

$$\int \frac{zdz\cot az}{m^2+z^2} = \frac{\pi}{e^{2am}-1}\ldots\ldots(c),\quad \int \frac{zdz\,\mathrm{tang}\,az}{m^2+z^2} = \frac{\pi}{e^{2am}+1}\ldots\ldots(d),$$

en observant que

$$2-2\cos 2az = 4(\sin az)^2,\qquad 2+2\cos 2az = 4(\cos az)^2.$$

1213. M. Legendre prend la somme des équations (a) et (b), et la réduction au même dénominateur le conduit à

$$\int \frac{zdz}{m^2+z^2}\cdot\frac{(2+2r^2)\sin 2az}{(1+r^2)^2-4r^2(\cos 2az)^2} = \frac{\pi e^{2am}}{e^{4am}-r^2};$$

et comme $(\cos 2az)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4az$, le premier membre se change en

$$2(1+r^2)\int \frac{zdz}{m^2+z^2}\,\frac{\sin 2az}{1-2r^2\cos 4az+r^4}:$$

si l'on écrit alors r au lieu de r^2, a au lieu de $2a$, on obtient l'équation

$$\int \frac{zdz}{m^2+z^2}\,\frac{\sin az}{1-2r\cos 2az+r^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1+r}\,\frac{e^{am}}{e^{2am}-r}\ldots\ldots(e),$$

et, pour $r=1$,

$$\int \frac{zdz}{m^2+z^2}\,\frac{1}{\sin az} = \frac{\pi e^{am}}{e^{2am}-1}\ldots\ldots(f).$$

1214. En multipliant par $4rda$ les deux membres des équations (a) et (b), et prenant les intégrales par rapport à la lettre a, M. Legendre trouve

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}(1+r^2-2r\cos 2az) = \frac{\pi}{m}\,\mathrm{l}(1-re^{-2am})\ldots\ldots(g),$$
$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}(1+r^2+2r\cos 2az) = \frac{\pi}{m}\,\mathrm{l}(1+re^{-2am})\ldots\ldots(h);$$

mais pour parvenir à l'équation (g), il faut observer que

$$\frac{\frac{1}{2}\pi.4rda}{e^{2am}-r} = \frac{\pi}{m}\,\frac{e^{-2am}.2rmda}{1-re^{-2am}},$$

et qu'on ne doit point ajouter de constante au second membre, parce qu'ils deviennent tous deux identiques quand $a=0$, à cause qu'entre les limites $z=0$ et $z=$ infini, on a

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\,(1-r)^2 = 2\,\mathrm{l}\,(1-r)\frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}\,\mathrm{l}\,(1-r),$$

valeur qui est précisément celle que prend le second membre, dans la même circonstance. On voit par là ce qu'il faut faire pour obtenir l'équation (h).

La supposition de $r=1$ change l'équation (g) en

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\,(2-2\cos 2az) = \frac{\pi}{m}\,\mathrm{l}\,(1-e^{-2am})\,;$$

en mettant pour $2-2\cos 2az$ sa valeur $4(\sin az)^2$, le premier membre devient

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,2\,\mathrm{l}\,(2\sin az) &= 2\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\sin az + 2\,\mathrm{l}\,2\int\frac{dz}{m^2+z^2}\\ &= 2\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\sin az + \frac{\pi}{m}\,\mathrm{l}\,2\,;\end{aligned}$$

et reportant cette dernière valeur dans l'équation précédente, on en tire

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\sin az = \frac{\pi}{2m}\,\mathrm{l}\left(\frac{1-e^{-2am}}{2}\right)\ldots\ldots(i).$$

On trouverait de même, par l'équation (h),

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\cos az = \frac{\pi}{2m}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+e^{-2am}}{2}\right)\ldots\ldots(k).$$

En retranchant cette équation de la précédente, on arrive aisément à

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,az = \frac{\pi}{2m}\,\mathrm{l}\left(\frac{e^{2am}-1}{e^{2am}+1}\right)\ldots\ldots(l).$$

Enfin, les équations (g) et (h) étant différentiées par rapport à r, donneront

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\frac{r-\cos 2az}{1+r^2-2r\cos 2az} = -\frac{\pi}{2m}\,\frac{1}{e^{2am}-r}\ldots\ldots(m),$$
$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\,\frac{r+\cos 2az}{1+r^2+2r\cos 2az} = \frac{\pi}{2m}\,\frac{1}{e^{2am}+r}\ldots\ldots(n),$$

1215. Nous avons rapporté toutes ces formules, pour montrer, par les conséquences d'un seul résultat, obtenu dans le n° 1211, la fécondité des formules de ce genre. Celles qui sont placées sous les désignations (c), (d), (f), (i), (k), (l), très-remarquables dans la théorie

des intégrales définies, comme l'observe M. Legendre, sont dues à M. Georges Bidone, et font partie d'un travail considérable qu'il a publié sur ce sujet, dans les *Mémoires de l'Académie de Turin*, année 1812. Il y a fait entrer aussi la plupart des intégrales dont nous nous sommes occupés antérieurement à celles-ci, et auxquelles il est parvenu, en n'employant que la comparaison des divers développemens en séries dont est susceptible la fonction à intégrer. Cette méthode paraît plus élémentaire que les considérations variées dont nous avons fait usage; mais elle exige d'assez longs calculs; c'est pourquoi je renverrai le lecteur au Mémoire de M. Bidone.

Dans la même collection académique (tome XXIII, pag. 295), ce géomètre a donné des formules finies, qu'il annonce comme exprimant d'une manière très-approchée les transcendantes elliptiques

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1-z^2)}},\quad \int\frac{dz\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}},\quad \int\frac{dz}{(1\pm a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

prises depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. Il est à desirer qu'il en fasse connaître les fondemens, qu'il n'a pas jugé à propos de publier en même temps.

1216. En 1814, M. Cauchy a présenté à l'Institut un Mémoire sur les intégrales définies, dans lequel, en faisant usage de la considération des intégrales doubles, il est parvenu à plusieurs remarques importantes. Ce Mémoire n'est encore connu du public, que par l'extrait qu'en a donné M. Poisson, dans le *Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique* (année 1814, p. 185), et dont j'ai tiré ce qui suit.

En désignant par Y une fonction quelconque de la variable y, supposée elle-même fonction des deux variables x et z, M. Cauchy pose l'équation

$$\frac{d\left(Y\frac{dy}{dx}\right)}{dz}=\frac{d\left(Y\frac{dy}{dz}\right)}{dx},$$

facile à vérifier. Si on la multiplie par $dxdz$, et qu'on l'intègre successivement par rapport à x et par rapport à z, ce qu'il faut faire dans un ordre différent pour chaque membre, on obtiendra l'équation

$$\int Y\frac{dy}{dx}\,dx=\int Y\frac{dy}{dz}\,dz.$$

Le premier membre ayant déjà subi l'intégration relative à z, doit

être pris entre les limites assignées à cette variable; par la même raison, le second doit l'être entre les limites assignées à x. Si donc on a

$$Y\frac{dy}{dx} = f(x, z), \qquad Y\frac{dy}{dz} = F(x, z),$$

que a et a' soient les limites de x, b et b' celles de z, il viendra

$$\int f(x, b')dx - \int f(x, b)dx = \int F(a', z)dz - \int F(a, z)dz \ldots\ldots\ldots (1).$$

Cette relation entre quatre intégrales définies, paraît devoir offrir beaucoup de combinaisons pour en découvrir de nouvelles valeurs. De plus, en y faisant $y = m + n\sqrt{-1}$, et séparant la partie imaginaire de la partie réelle, dans le résultat, l'auteur le partage en deux autres équations, ce qui multiplie les chances de succès. Cependant, parmi les nombreux exemples qu'a rassemblés M. Cauchy, dans la première partie de son Mémoire, M. Poisson n'a remarqué aucune intégrale qui ne fût déjà connue; le mérite de son procédé paraît consister principalement en ce qu'il est très-général et très-uniforme.

Le passage du réel à l'imaginaire conduit immédiatement à l'un des résultats les plus généraux obtenus par M. Cauchy; mais la manière dont il y parvient a l'avantage de montrer les exceptions de ces formules, ce qui prouve que l'emploi de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ n'est pas toujours légitime.

Une observation très-digne de remarque, est celle qu'a faite M. Cauchy, sur les restrictions qu'on doit mettre à l'équation (1), qui lui ont appris que lorsqu'il s'agissait d'intégrales définies, il n'était pas toujours indifférent de changer l'ordre des intégrations, comme lorsque les intégrales sont indéfinies (519), et qu'en variant cet ordre, on trouvait des résultats divers, si la fonction soumise aux signes $\int$ devenait $\frac{0}{0}$, pour des valeurs de x et de z comprises entre les limites assignées à ces variables.

Cela s'explique en observant qu'une fonction de deux variables est véritablement indéterminée, quand elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, pour des valeurs particulières et simultanées α et β de ces quantités (155); parce qu'alors, si cette fonction est représentée par $\varphi(x, z)$, l'intégrale $\iint\varphi(x, z)dxdz$ comprend un élément $\varphi(\alpha, \beta)d\alpha d\beta$ susceptible de deux valeurs, suivant l'ordre dans lequel on fait les changemens de x en α et de z en β.

« A cette remarque de M. Cauchy, on doit ajouter (dit M. Poisson) » que l'une des deux valeurs de $\varphi(x, z)$, correspondantes à $x = \alpha$,

» $z = \beta$, doit être infinie; car si elles étaient toutes deux finies, on » pourrait négliger l'élément $\varphi(\alpha, \beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, sans que l'intégrale....... » $\iint \varphi(x, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ en fût altérée; et alors sa valeur serait encore la même, » quoiqu'on eût effectué l'intégration dans deux ordres différens.

» M. Cauchy, après avoir indiqué les cas où l'équation (1) devient » fautive, détermine la quantité A, qu'il faut ajouter à l'un de ses » membres pour rétablir l'égalité. Il fait voir que cette quantité est » exprimée par une ou plusieurs intégrales simples, qu'il nomme *in-* » *tégrales singulières;* ce sont des intégrales prises dans un intervalle » infiniment petit, d'une fonction contenant elle-même une quantité » infiniment petite, qu'on ne doit supprimer qu'après l'intégration. Ces » intégrales ne se présentent pas ici pour la première fois; on en ren- » contre une semblable dans la détermination du mouvement d'un corps » pesant sur une courbe donnée, lorsque le mobile approche d'un point » où la tangente est horizontale. S'il en est à une distance infiniment » petite, et que sa vitesse soit nulle, le temps qu'il lui faudrait pour » l'atteindre a une valeur finie, exprimée par une intégrale de l'espèce » dont nous parlons. Le propre de ces intégrales est d'être indépen- » dantes de la forme de la fonction soumise à l'intégration; ainsi dans » l'exemple que nous citons, la valeur du temps ne dépend pas de l'équa- » tion de la courbe, mais seulement de la longueur du rayon de cour- » bure au point que l'on considère, et c'est une circonstance semblable » qui permet à M. Cauchy de donner, sous une forme très-simple, la » valeur générale de la quantité A.

» Ce que le Mémoire dont nous rendons compte renferme, selon » nous, de plus curieux, c'est l'usage que l'auteur fait des intégrales » *singulières,* pour exprimer d'autres intégrales prises entre des limites » finies. Cette manière indirecte de les obtenir ne doit pas être pré- » férée aux méthodes ordinaires, mais elle n'en est pas moins très- » remarquable et digne de l'attention des géomètres. Il obtient par ce » moyen les valeurs de quelques intégrales qu'on n'avait pas encore » explicitement considérées, mais qui rentrent dans d'autres intégrales » déjà connues, ou qui s'en déduisent assez facilement.

» Par exemple, M. Cauchy donne la valeur de

$$\text{»} \int \frac{\cos bx}{\cos ax} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2},$$

» prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$; or elle est comprise dans celle-ci :

$$\text{»} \int \frac{\sin cx \sin 2ax}{1 + 2e\cos 2ax + e^2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2},$$

» dont on obtient la valeur en la réduisant en série suivant les puis- » sances de α, ainsi que M. Legendre l'a pratiqué, relativement à une » intégrale un peu moins générale (celle du n° 1212). L'intégrale de » M. Cauchy se déduit de celle que nous citons, en y supposant $\alpha=1$, » $c=a+b$, et faisant ensuite les réductions convenables (et en s'aidant » aussi de l'intégrale du n° 1211). »

1217. M. Legendre s'est occupé de cette intégrale et de ses analogues, dans la cinquième partie des *Exercices de Calcul int.*, § III. Il a consacré les trois derniers paragraphes de cette partie aux fonctions produites par le développement des expressions $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n}$, qui se présentent dans les recherches sur le système du monde, et par rapport auxquelles il avait trouvé, depuis long-temps, des théorèmes nombreux et remarquables, concernant les intégrales définies.

Dans la même partie, il fait connaître deux circonstances très-singulières dans la marche de ces intégrales. 1°. Une même intégrale, par un changement infiniment petit de l'une des quantités dont elle dépend, prend quelquefois des valeurs qui diffèrent d'une quantité finie, et il en donne l'exemple (p. 178) sur l'intégrale $\int \frac{\cos ax}{\sin bx}\frac{xdx}{1+x^2}$, dont les valeurs correspondantes à

$$a=(2k+1)b-\omega, \quad \text{sont} \quad \frac{\pi e^{-a}}{e^b-e^{-b}}+\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$a=(2k+1)b, \qquad \frac{\pi e^{-a}}{e^b-e^{-b}},$$
$$a=(2k+1)b+\omega, \qquad \frac{\pi e^{-a}}{e^b-e^{-b}}-\tfrac{1}{2}\pi,$$

ω désignant une quantité infiniment petite.

2°. « Toutes les fois qu'une intégrale passe par l'infini avant d'ar- » river à la valeur finie qu'elle obtient pour une limite déterminée, on » ne peut exécuter sur cette intégrale définie les différentiations rela- » tives aux constantes arbitraires, qu'après s'être assuré que les infinis » qui composent les deux parties de l'intégrale définie ne rendront pas » défectueux les résultats de la différentiation de cette intégrale (p. 214 » — 215) », et il en donne pour exemple l'équation

$$\int \frac{xdx \sin x}{\cos x - a} = -\pi \log(2+2a) \quad (\text{p. } 213),$$

dans laquelle $a=\cos\theta$, et d'où, par des différentiations relatives à la

lettre a, on déduirait les équations

$$\int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - a)^2} = -\frac{\pi}{1+a}, \qquad \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - a)^3} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{(1+a)^2}, \quad \text{etc.},$$

dont il a démontré antérieurement que les premiers membres, pris depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, limites de l'intégrale primitive, sont infinis.

Pour expliquer cette difficulté, M. Legendre change successivement, dans l'équation d'où il est parti, a en $a - \omega$ et $a + \omega$, ce qui lui donne

$$\int \frac{x dx \sin x}{\cos x - a + \omega} = -\pi \, l(2 + 2a - 2\omega),$$
$$\int \frac{x dx \sin x}{\cos x - a - \omega} = -\pi \, l(2 + 2a + 2\omega),$$

dont la différence

$$2\omega \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2} = -\pi \, l \frac{1 + a + \omega}{1 + a - \omega},$$

conduit à

$$\int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - a)^2} = -\pi \frac{1}{1+a},$$

lorsqu'on supprime les puissances de ω supérieures à la première; mais cette omission n'est pas permise dans le premier membre, parce que dans l'intervalle de $\cos x = a - \omega$ à $\cos x = a + \omega$, la quantité soumise au signe $\int$ passe par l'infini, et que l'intégrale $\int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2}$ a, dans cet intervalle, une partie négative dont la valeur est infinie, et détruit l'infini positif qui résulte des deux autres parties de l'intégrale, de sorte que la différence demeure finie. C'est dans l'ouvrage même de M. Legendre qu'il faut voir les calculs qui fondent cette solution; en exposant les difficultés, je n'ai eu pour but que de montrer combien le sujet est épineux. Les détails dans lesquels je suis entré prouvent assez d'ailleurs combien il est fécond, et que si l'usage des intégrales définies, dans les applications, continue à s'étendre comme il l'a fait par les recherches de M. Fourier, sur la chaleur, de MM. Poisson et Cauchy, sur le son et sur les ondes, il sera nécessaire, pour la pratique, de construire des tables où toutes les valeurs connues des intégrales définies soient classées par ordre, d'après la forme de ces intégrales, leur origine, ou quelqu'autre caractère qui en rende la recherche facile. Landen avait déjà présenté un essai de cette table, à la suite de la deuxième partie de ses *Mathematical Memoirs;* M. Bidone en a placé un autre à la fin de son grand Mémoire sur les intégrales définies.

Des séries propres à évaluer les intégrales qui sont des fonctions de grands nombres.

1218. La formule $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p$, égale à $\frac{1}{m}[p]^p\left[\frac{m}{n}\right]^{-p}$, entre les limites $x=0$ et $x=1$ (1160), se rencontre fréquemment dans la recherche de la probabilité des événemens futurs, d'après l'observation des événemens passés; les nombres m et p, qui dépendent de ces derniers, sont alors tellement grands, qu'il est impossible d'effectuer la multiplication des facteurs dont est formé le produit qui exprime cette intégrale.

On a recours, dans ce cas, à une approximation qui fait connaître les premiers chiffres de ce produit, et qui suffit, parce qu'il ne s'agit que de rapports d'intégrales semblables à la proposée. Les formules du n° 1008 donnent immédiatement cette approximation; mais M. Laplace l'a déduite aussi d'une théorie générale, dans laquelle il s'est proposé l'évaluation des fonctions de grands nombres, et dont nous allons donner un extrait.

Le principal objet de ces recherches est d'obtenir les intégrales des fonctions différentielles renfermant des facteurs élevés à de grandes puissances, par des séries d'autant plus convergentes, que les exposans de ces puissances sont plus considérables.

Soit $ydx = u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots\ldots \varphi dx$ la différentielle à intégrer entre les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$, u, u', u'', ... φ, désignant des fonctions de x, et s, s', s'', etc., des nombres très-grands. En représentant par Y ce que devient y, lorsque x devient θ, nous ferons $y = Ye^{-t}$, e étant le nombre dont le logarithme népérien est l'unité; nous tirerons de là $t = \mathrm{l}\frac{Y}{y}$, et considérant x comme une fonction de t, nous aurons

$$x = \theta + \frac{dx}{dt}\frac{t}{1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

en observant de faire, après les différentiations, $t=0$, valeur qui répond à celle de $x=\theta$ et qui change y en Y. L'équation $t = \mathrm{l}\frac{Y}{y}$ conduisant à $dt = -\frac{dy}{y}$, on aura $\frac{dx}{dt} = -\frac{ydx}{dy}$, expression dans laquelle dy introduit au dénominateur les exposans s, s', s'', etc. Si l'on fait, pour abréger, $-y\frac{dx}{dy} = v$, il viendra $dt = \frac{dx}{v}$; et cette équation fournira le moyen d'exprimer les coefficiens différentiels $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., par v, $\frac{dv}{dx}$, etc., en traitant v comme une fonction de x, et x comme une

fonction de t : on trouvera

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{vdv}{dx},\quad \frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d.vdv}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{vd.vdv}{dx^2},$$
$$\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{d.vd.vdv}{dx^3}\frac{dx}{dt}=\frac{vd.vd.vdv}{dx^3},\quad \text{etc.}$$

En général, on aura $\frac{d^nx}{dt^n}=\frac{vd.vd.v\ldots dv}{dx^{n-1}}$, en supposant dx constant dans le second membre; et représentant par V ce que devient v quand x est égal à θ, ou t égal à zéro, $\frac{Vd.Vd.V\ldots dV}{d\theta^{n-1}}$ sera ce que devient $\frac{d^nx}{dt^n}$, puis on obtiendra

$$x=\theta+V\frac{t}{1}+\frac{VdV}{d\theta}\frac{t^2}{1.2}+\frac{Vd.VdV}{d\theta^2}\frac{t^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$
$$dx=Vdt\left\{1+\frac{dV}{d\theta}\frac{t}{1}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\right\},$$
$$\int ydx=VY\int dte^{-t}\left\{1+\frac{dV}{d\theta}\frac{t}{1}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\right\}.$$

Le second membre de la dernière de ces équations dépend des intégrales comprises dans la formule $\int t^n dte^{-t}$. Si, dans cette formule, on fait $e^{-t}=z$, les limites de t étant o et l'infini, celles de z seront 1 et o, et l'on aura $-\int dz\left(l\frac{1}{z}\right)^n$, à prendre depuis $z=1$ jusqu'à $z=0$, ce qui donnera $1.2.3\ldots n$ (1159); il viendra donc

$$\int ydx=VY\left\{1+\frac{dV}{d\theta}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}+\frac{d.Vd.VdV}{d\theta^3}+\text{etc.}\right\},$$

pour la valeur de $\int ydx$, depuis $x=\theta$ jusqu'à la valeur de x, qui répond à t infini. Prenant de même la valeur de $\int ydx$, depuis $x=\theta'$ jusqu'à la valeur de x, qui répond à t infini, ce qui s'effectuera en marquant d'un accent les quantités Y et V, pour indiquer que dans ce dernier cas elles se rapportent à θ', on trouvera qu'entre les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$,

$$\left.\begin{aligned}\int ydx=\ &VY\left(1+\frac{dV}{d\theta}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}+\frac{d.Vd.VdV}{d\theta^3}+\text{etc.}\right)\\ -&V'Y'\left(1+\frac{dV'}{d\theta'}+\frac{d.V'dV'}{d\theta'^2}+\frac{d.V'd.V'dV'}{d\theta'^3}+\text{etc.}\right)\end{aligned}\right\}\ldots(A).$$

La variable t a entièrement disparu de ce résultat, dont les différentiations ne sont relatives qu'aux lettres θ et θ'; et si ces lettres entraient

primitivement dans l'expression de y, il ne faudrait faire varier que celles qu'introduirait le changement de x en θ et en θ', dans le passage de y à Y et à Y'.

Pour se convaincre que la formule (A) doit être en général très-convergente, il suffit de remarquer que la quantité

$$v = -\frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{\frac{s\,\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{d}x} + \frac{s'\,\mathrm{d}u'}{u'\,\mathrm{d}x} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\,\mathrm{d}x}}$$

deviendra d'autant plus petite, que les exposans s, s', etc., seront plus considérables, si toutefois le dénominateur ne contient pas des facteurs de la forme $(x-a)^m$, dans lesquels a diffère peu de θ ou de θ'; car il est visible que la substitution de ces quantités rendrait ce facteur très-petit, et que les termes divisés successivement par $(x-a)^m$, $(x-a)^{m+1}$, $(x-a)^{m+2}$, etc. deviendraient de plus en plus grands.

1219. Pour ce cas, on désignera par Y ce que devient y lorsqu'on y change x en a; et puisque $(x-a)^m$ est un facteur de $\frac{\mathrm{d}y}{y\,\mathrm{d}x}$, ou de $\mathrm{d}.\mathrm{l}\frac{Y}{y}$, $(x-a)^{m+1}$ sera le facteur correspondant de $\mathrm{l}\frac{Y}{y}$; on fera

$$y = Ye^{-t^{m+1}}, \qquad v = \frac{x-a}{(\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y)^{\frac{1}{m+1}}},$$

d'où l'on conclura

$$t = (\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y)^{\frac{1}{m+1}}, \qquad x - a = vt,$$

v ne devenant point infini lorsque $x = a$. Les valeurs de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, etc., déduites de l'équation $x - a = vt$, en considérant, dans le deuxième membre, v comme fonction de x, x comme fonction de t, et négligeant les termes multipliés par t, qui s'évanouissent lorsque $x = a$, se réduiront à v, $\frac{\mathrm{d}.v^2}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2.v^3}{\mathrm{d}x^2}$, etc.; et mettant dans ces dernières V au lieu de v, pour marquer qu'il faut y changer x en a, après les différentiations, on aura

$$x = a + V\frac{t}{1} + \frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}\frac{t^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^2.V^3}{\mathrm{d}x^2}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

d'où l'on déduira

$$\int y\,\mathrm{d}x = Y\int \mathrm{d}t e^{-t^{m+1}}\left\{V + \frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}\frac{t}{1} + \frac{\mathrm{d}^2.V^3}{\mathrm{d}x^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3.V^4}{\mathrm{d}x^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}\ldots\ldots(B),$$

expression dans laquelle il faut encore effectuer les intégrations comprises dans la formule $\int t^n \mathrm{d}t e^{-t^{m+1}}$, traitée dans le n° 1205.

La formule (B) doit être regardée comme un supplément à la formule (A), pour l'intervalle dans lequel x diffère peu de a.

On parviendra facilement aux valeurs de V, $\frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2.V^3}{\mathrm{d}x^2}$, etc., au moyen du développement

$$\mathrm{l}Y-\mathrm{l}y=(x-a)^{m+1}\{A+B(x-a)+C(x-a)^2+D(x-a)^3+\text{etc.}\},$$

pour lequel on a

$$A=-\frac{\mathrm{d}^{m+1}.\mathrm{l}y}{1.2\ldots.(m+1)\mathrm{d}x^{m+1}},\qquad B=-\frac{\mathrm{d}^{m+2}.\mathrm{l}y}{1.2\ldots.(m+2)\mathrm{d}x^{m+2}},\qquad \text{etc.};$$

en faisant, après les différentiations, $x=a$: on en tirera immédiatement les puissances de v.

1220. On voit mieux la nature et les avantages des formules (A) et (B), en les particularisant ; c'est pourquoi nous prendrons $y=x^p(1-x)^q$. Nous aurons pour la première

$$v=-\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x};$$

et pour exprimer que p et q sont de grands nombres, nous ferons $p=\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{\beta}{\alpha}$, α étant une très-petite fraction; il viendra alors

$$v=-\alpha\frac{x(1-x)}{1-(1+\beta)x}:$$

ainsi v sera de l'ordre α; et l'on voit évidemment que tous les termes de la série (A) seront ordonnés suivant les puissances de α. Cette série est donc très-convergente, lorsque le dénominateur de v n'est pas très-petit à l'une ou à l'autre des limites de l'intégrale, et pour cela il faut que θ et θ' diffèrent beaucoup de $\frac{1}{1+\beta}$. En effet, l'exposant du dénominateur de v croissant de deux unités d'un terme à l'autre, le terme multiplié par α^m aura un dénominateur élevé à la puissance $2m-1$. Il suit de là que α doit être moindre que le quarré du dénominateur, pour que la convergence ait lieu, et que par conséquent la formule (A) peut être employée depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{1+\beta}-\delta$, pourvu que $\alpha<\delta^2$.

On trouvera, dans cette hypothèse,

$$\int y\,\mathrm{d}x = \frac{a\beta^{q+1}[1-(1+\beta)\delta]^{p+1}\left(1+\frac{1+\beta}{\beta}\delta\right)^{q+1}}{(1+\beta)^{p+q+1}\delta} \times$$
$$\left\{1 - \frac{a[\beta+(1+\beta)^2\delta^2]}{(1+\beta)^2\delta^2} + \text{etc.}\right\}.$$

La même série peut servir aussi depuis $x = \frac{1}{1+\beta} + \delta$ jusqu'à $x = 1$; parce que la supposition de $x = 1$, donnant $y = 0$ et $v = 0$, la valeur de $\int y\,\mathrm{d}x$, dans ce dernier cas, ne diffère de celle qui répond au premier que par le changement de signe qu'a subi, dans l'expression de la limite, la quantité δ : il suffira donc d'écrire dans la série précédente, $-\delta$ au lieu de δ, et de changer le signe du résultat final, à cause que l'intégrale est prise en sens contraire.

1221. La valeur $x = \frac{1}{1+\beta}$, qui rend nul le dénominateur de v; faisant évanouir le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, répond au maximum de y (156); on ne peut donc, par ce qui précède, obtenir l'intégrale $\int y\,\mathrm{d}x$ dans le voisinage de ce maximum. Il faut alors recourir à la formule (B), dans laquelle a représentera $\frac{1}{1+\beta}$, et l'exposant m sera l'unité, en sorte qu'on aura

$$t = \sqrt{\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y}, \quad v = \frac{x-a}{\sqrt{\mathrm{l}Y-\mathrm{l}y}},$$

$$\int y\,\mathrm{d}x = Y\int \mathrm{d}t e^{-t^2}\left\{V + \frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}\frac{t}{1} + \frac{\mathrm{d}^2.V^3}{\mathrm{d}x^2}\frac{t^2}{1.2} + \text{etc.}\right\}\ldots\ldots(B').$$

Il est visible que les termes de cette série ne seront pas multipliés respectivement par α, α^2, α^3, etc., mais par $\alpha^{\frac{2}{2}}$, α, $\alpha^{\frac{3}{2}}$, etc. à cause du radical qui entre dans l'expression de v. Les intégrales relatives à t se ramènent toutes à $\int \mathrm{d}t e^{-t^2}$, ou s'obtiennent algébriquement : on a, par la formule du n° 1205,

$$\int t\mathrm{d}t e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}e^{-t^2}, \quad \int t^2\mathrm{d}t e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}te^{-t^2} + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}t e^{-t^2},$$
$$\int t^3\mathrm{d}t e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}t^2e^{-t^2} - \tfrac{1}{2}e^{-t^2}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on représente par δ et δ' les deux limites de t, on trouvera entre ces limites

$$\begin{aligned}\int y\mathrm{d}x = Y\left\{V+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2.V^3}{1.2\mathrm{d}x^2}+\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^4.V^5}{1.2.3.4\mathrm{d}x^4}+\text{etc.}\right\}\int\mathrm{d}t e^{-t^2} \\ +\frac{Y}{2}e^{-\delta^2}\left\{\frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2.V^3}{1.2\mathrm{d}x^2}\delta+\frac{\mathrm{d}^3.V^4}{1.2.3\mathrm{d}x^3}(\delta^2+1)+\text{etc.}\right\} \\ -\frac{Y}{2}e^{-\delta'^2}\left\{\frac{\mathrm{d}.V^2}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2.V^3}{1.2\mathrm{d}x^2}\delta'+\frac{\mathrm{d}^3.V^4}{1.2.3\mathrm{d}x^3}(\delta'^2+1)+\text{etc.}\right\};\end{aligned}$$

il ne s'agit plus que d'obtenir l'intégrale $\int\mathrm{d}te^{-t^2}$; et pour cela on peut, si δ et δ' sont peu considérables, développer e^{-t^2}, suivant les puissances ascendantes de t^2 et intégrer : dans le cas contraire, il faut employer la formule du n° 1157 (*).

Ce résultat se simplifie beaucoup lorsqu'on prend δ et δ', de manière qu'ils répondent aux valeurs de x, qui rendent y nulle; et l'équa-

---

(*) 1°. On aura

$$\int e^{-t^2}\mathrm{d}t = t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{1.2.5}-\frac{t^7}{1.2.3.7}+\text{etc.}$$

expression qui s'évanouit lorsque $t=0$, et qui finit toujours par être convergente.

2°. L'intégration par parties donne aussi les réductions

$$\int e^{-t^2}\mathrm{d}t = e^{-t^2}t+2\int e^{-t^2}t^2\mathrm{d}t,\quad \int e^{-t^2}t^2\mathrm{d}t = e^{-t^2}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{3}\int e^{-t^2}t^4\mathrm{d}t,\quad \text{etc.},$$

au moyen desquelles on trouve aisément

$$\int e^{-t^2}\mathrm{d}t = e^{-t^2}t\left\{1+\frac{2t^2}{1.3}+\frac{(2t^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7}+\text{etc.}\right\},$$

dont le second membre s'évanouit encore quand $t=0$.

3°. Le développement

$$\int e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1.3}{2^2t^4}-\frac{1.3.5}{2^3t^6}+\text{etc.}\right\}(1157),$$

s'évanouissant lorsque $t=$ infini, donne, pour la valeur de l'intégrale entre les limites $t=T$ et $t=$ infini,

$$\frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1-\frac{1}{2T^2}+\frac{1.3}{2^2T^4}-\frac{1.3.5}{2^3T^6}+\text{etc.}\right\};$$

si on retranche ce dernier résultat de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, qui répond aux limites o et infini, on aura la valeur de l'intégrale proposée, entre les limites o et T.

4°. Cette intégrale est convertie en fraction continue, dans le livre IV de la *Mécanique céleste*. (Voyez aussi la *Théorie analytique des Probabilités*, p. 104.)

5°. On trouve à la fin de l'*Analyse des Réfractions astronomiques*, par M. Kramp, une table très-étendue des valeurs de cette transcendante.

tion $t = \sqrt{lY - ly}$ montre qu'il faut faire pour cela $\delta = -\text{inf.}$; $\delta' = +\text{inf.}$ Dans cette hypothèse, les quantités $\delta' e^{-\delta'^2}$, $\delta'' e^{-\delta''^2}$ s'évanouissent (150); on a $\int dt e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$, et

$$\int y\,dx = Y\sqrt{\pi}\left\{V + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.V^3}{1.2dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4.V^5}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}\right\}.$$

En faisant $m = 1$, dans le développement de $lY - ly$, indiqué n° 1219, on aura

$$A = -\frac{d^2.ly}{1.2dx^2},\quad B = -\frac{d^3.ly}{1.2.3dx^3},\quad C = -\frac{d^4.ly}{1.2.3.4dx^4},\quad \text{etc.},$$

d'où l'on tirera

$$v = \{A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \text{etc.}\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= A^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}-1}B(x-a) + \text{etc.}$$

On formerait d'une manière analogue les puissances de v, que l'on différentierait ensuite comme l'exige la formule, puis on ferait $x = a$, supposition qui réduit v à $A^{-\frac{1}{2}}$, et l'expression $d^2.ly = \frac{d^2y}{y} - \frac{dy^2}{y^2}$, à... $d^2.ly = \frac{d^2y}{y}$, à cause que la valeur $x=a$, propre au maximum, fait évanouir dy. Il suit de là que, dans l'hypothèse établie après les différentiations,

$$A = -\frac{d^2.ly}{1.2dx^2} = -\frac{d^2Y}{2Ydx^2},$$

et que par conséquent $V = \frac{\sqrt{2Y}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}$; en sorte qu'en n'ayant égard qu'au premier terme de la série, il vient

$$\int y\,dx = \frac{Y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}},\quad \text{ou}\quad (\int y\,dx)^2 = \frac{2\pi Y^3}{-\frac{d^2Y}{dx^2}}.$$

Dans l'exemple que nous avons choisi, où $y = x^p(1-x)^q$, on trouve $a = \frac{p}{p+q}$; et calculant, d'après cette dernière valeur, celles de Y et de $\frac{d^2Y}{dx^2}$, on obtient, en conservant les dénominations adoptées plus haut,

$$\int y\,dx = \frac{\beta^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(1+\beta)^{p+q+\frac{3}{2}}}$$

Si l'on poursuivait le calcul, on trouverait de même les autres termes de l'expression de $\int y dx$; tous rentreraient dans ceux de la série qu'on obtiendrait en développant l'intégrale $\int y dx$, en produits infinis (1159), et en calculant ces produits par la méthode du n° 1010. C'est ce qu'a fait M. Legendre, dans la troisième partie des *Exercices de Calcul intégral* (t. I, page 548); et il observe avec raison que cette série n'est convergente que lorsque les exposans p et q sont tous deux de grands nombres. (Voyez aussi mon *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités*, note III.)

1222. M. Laplace indique ensuite ce qu'il faut faire pour appliquer sa méthode aux intégrales doubles et triples. Il montre d'abord comment on peut changer leurs limites variables en d'autres qui soient déterminées. S'il s'agissait, par exemple, d'évaluer la formule $\iint y dx dx'$, en intégrant, en premier lieu, depuis $x' = X$ jusqu'à $x' = X'$, on ferait $x' = X + u(X' - X)$; on transformerait, d'après cette hypothèse, l'expression $\iint y dx dx'$ en une autre de la forme $\iint y(X'-X) dx du$ (524), dans laquelle l'intégration relative à u s'effectuerait depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$.

Cela posé, nous regarderons, dans ce qui va suivre, l'intégrale..... $\iint y dx dx'$ comme ayant des limites constantes, savoir :

$$x = \theta, \quad x = \mu, \quad x' = \theta', \quad x' = \mu'.$$

Représentant, à l'ordinaire, par Y ce que devient y, lorsqu'on y change x et x' en θ et θ', on fera $y = Ye^{-t-t'}$, ou $lY - ly = t + t'$; substituant ensuite $\theta + z$ et $\theta' + z'$, à x et à x', puis développant $lY - ly$ en série, par rapport aux puissances de z et de z' (33), on mettra le résultat sous la forme

$$Mz + M'z' = t + t',$$

en rassemblant dans M tous les termes qui contiendront z seul ou z combiné avec z', et dans M' ceux qui ne contiendront que z'; on fera séparément

$$Mz = t, \qquad M'z' = t'.$$

La seconde équation fournira immédiatement, par le retour des suites, une expression de z' en t', à l'aide de laquelle on tirera de la première l'expression de z en t et t'; il ne restera plus qu'à transformer le produit $dx dx' = dz dz'$, au moyen des différentielles dt et dt'; et en sup-

posant $z = Nt$, $z' = N't'$, on aura (529)

$$\iint y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}x' = Y\iint \frac{\mathrm{d}.Nt}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}.N't'}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t'.e^{-t-t'}.$$

L'intégration des différens termes du second membre de cette équation dépendra des formules $\int t^n \mathrm{d}t e^{-t}$, $\int t'^n \mathrm{d}t' e^{-t'}$; si l'on commence par l'intégration relative à t', et qu'entre les limites $t' = 0$ et $t' =$ infini, l'on ait

$$\int \frac{\mathrm{d}.Nt}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}.N't'}{\mathrm{d}t'}\,e^{-t-t'}\mathrm{d}t' = Q,$$

YQ sera la valeur de $\int y\mathrm{d}x'$, depuis $x' = \theta'$ jusqu'à la valeur de x', qui répond à t' infini. Remplaçant ensuite θ' par μ', dans y et dans Q, que nous changerons en conséquence en Y'' et Q', nous aurons $Y''Q'$ pour la valeur de $\int y\mathrm{d}x'$, depuis $x' = \mu'$ jusqu'à la valeur de x' qui répond à t' infini, et nous conclurons de là que $YQ - Y''Q'$ est la valeur complète de $\int y\mathrm{d}x'$, ou que pour obtenir $\iint y\mathrm{d}x\mathrm{d}x'$, il ne reste plus qu'à intégrer, par rapport à t, la fonction $YQ\mathrm{d}t - Y''Q'\mathrm{d}t$. Faisant alors $\int Q\mathrm{d}t = R$, $\int Q'\mathrm{d}t = R'$, R et R' étant prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t =$ infini, on aura $YR - Y''R'$ pour la valeur de $\iint y\mathrm{d}x\mathrm{d}x'$, depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Enfin dans Y, Y', R et R', on changera θ en μ, et représentant les résultats par $Y_{,}$, $Y'_{,}$, $R_{,}$ et $R'_{,}$, on obtiendra $Y_{,}R_{,} - Y'_{,}R'_{,}$, pour la valeur de $\iint y\mathrm{d}x\mathrm{d}x'$, depuis $x = \mu$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Prenant la différence entre cette quantité et la précédente, on trouvera qu'entre les limites $x' = \theta'$ et $x' = \mu'$, $x = \theta$ et $x = \mu$,

$$\iint y\mathrm{d}x\mathrm{d}x' = YR - Y''R' - Y_{,}R_{,} + Y'_{,}R'_{,}.$$

1223. Cette formule est analogue à l'équation (A) du n° 1218, et ne peut pas non plus servir aux environs du maximum de y; pour en trouver une qui soit appropriée à ce cas, il faut considérer si le maximum a lieu par rapport à une des variables seulement, ou par rapport à toutes deux en même temps, c'est-à-dire s'il ne fait évanouir que l'un des coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}$, ou s'il les rend nuls tous deux (165). Si l'on avait seulement $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, on prendrait $y = Ye^{-t^2-t'}$, tandis qu'il faudrait faire $y = Ye^{-t^2-t'^2}$, si l'on avait en même temps $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'} = 0$.

Soient $x=a$, $x'=a'$, les valeurs qui donnent ce maximum; en posant

$$x=a+z,\quad x'=a'+z',\quad \text{dans}\quad lY-ly=t^2+t'^2,$$

et développant le premier membre suivant les puissances et les produits des nouvelles variables z et z', on aura un résultat qui pourra se mettre sous la forme

$$Mz^2+2Nzz'+Pz'^2=t^2+t'^2,$$

M, N, P, représentant des fonctions rationnelles et entières de z et de z'. M. Laplace, l'écrivant ensuite dans la forme

$$M\left(z+\frac{N}{M}z'\right)^2+\left(P-\frac{N^2}{M}\right)z'^2=t^2+t'^2,$$

le partage dans les deux équations

$$z\sqrt{M}+\frac{N}{\sqrt{M}}z'=t,\quad z'\sqrt{P-\frac{N^2}{M}}=t',$$

qui serviront à déterminer dz et dz' en dt et dt', pour transformer

$$\iint y\,dx\,dx'=\iint y\,dz\,dz'\quad \text{en}\quad Y\iint Ze^{-t^2-t'^2}dt\,dt'\ (529),$$

et d'où, par le retour des suites, on tirera les expressions de z et de z' en t et t', pour les substituer dans la fonction Z. Par ces opérations, l'intégrale proposée sera ramenée à une suite d'intégrales comprises dans la formule

$$\iint e^{-t^2-t'^2}t^n t'^{n'}dt\,dt';$$

les limites des variables t, t', étant l'infini négatif et l'infini positif, on reconnaîtra, comme dans le n° 1205, que l'intégrale ci-dessus s'évanouit toutes les fois que l'un des nombres n, n', est impair, et se réduit à

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1).1.3.5\ldots(2i'-1)}{2^{i+i'}},$$

lorsque ces nombres sont de la forme $2i$, $2i'$.

Si l'on veut se borner au premier terme de la série qui exprime l'intégrale $\iint y\,dx\,dx'$, terme qui suffira lorsque les exposans des facteurs de y seront de très-grands nombres, on aura, par un calcul semblable à celui qui termine le n° 1221,

$$M=-\frac{1}{2Y}\frac{d^2Y}{dx^2},\qquad N=-\frac{1}{2Y}\frac{d^2Y}{dx\,dx'},\qquad P=-\frac{1}{2Y}\frac{d^2Y}{dx'^2},$$

les quantités $\frac{d^2Y}{dx^2}$, $\frac{d^2Y}{dxdx'}$, $\frac{d^2Y}{dx'^2}$, désignant ce que deviennent les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dxdx'}$, $\frac{d^2y}{dx'^2}$, lorsqu'on y substitue a, a', au lieu de x, x'. On tirera de là

$$\iint y dx dx' = Y \iint \frac{e^{-t^2-t'^2} dt dt'}{\sqrt{PM - N^2}} = \frac{2\pi Y^2}{\sqrt{\frac{d^2Y}{dx^2}\frac{d^2Y}{dx'^2} - \left(\frac{d^2Y}{dxdx'}\right)^2}};$$

car

$$\iint e^{-t^2-t'^2} dt dt' = \int e^{-t^2} dt . \int e^{-t'^2} dt'.$$

Il ne serait pas difficile d'étendre cette méthode à un nombre quelconque de variables.

Examen de la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$.

1224. Nous allons acquitter ici l'engagement que nous avons pris dans le n° 434, de faire connaître plus en détail la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$, qui se change en $\int \frac{dz}{lz}$, lorsqu'on fait $e^x = z$.

En développant e^x, nous avons déjà trouvé la série

$$\int \frac{e^x dx}{x} = lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \ldots (1).$$

On a une limite naturelle de cette intégrale, en posant $x = 1$, ce qui donne la série convergente

$$1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \alpha,$$

d'où $\alpha = 1,31790215311$; et avec cette valeur on obtient la formule

$$\int \frac{e^x dx}{x} \left[\begin{matrix} x = \frac{1}{n} \\ x = 1 \end{matrix}\right] = \alpha - \left\{ l\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{1.2n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1.2.3n^3} + \text{etc.} \right\},$$

qui donnera facilement les diverses valeurs de l'intégrale, depuis..... $x = \frac{1}{n}$ jusqu'à $x = 1$; elle fait voir aussi que la valeur de $\int \frac{e^x dx}{x}$, prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$, est infinie; car la série, de plus en plus convergente à mesure que n augmente, se réduit à $-l\frac{1}{n}$, lorsque n est infinie : ainsi, de ce côté, la marche de l'intégrale est suffisamment connue; mais il n'en est pas de même de l'autre côté.

Si l'on se servait de la série (1) pour les valeurs négatives de x,

on serait tenté de croire que la fonction $\int \frac{e^x dx}{x}$ est imaginaire pour ces valeurs, ce qui pourtant ne saurait être, ainsi qu'on peut s'en convaincre en suivant la marche de cette intégrale par les valeurs successives de la fonction différentielle, d'après la méthode du n° 471; mais on parvient à un résultat réel, en changeant le signe de x avant l'intégration, car on a

$$\int \frac{e^{-x} \times -dx}{-x} = \int -dx \left\{ \frac{1}{-x} + 1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \text{etc.} \right\},$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x} = \mathrm{l}x - \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

x étant pris avec le signe $+$, dans cette équation. L'hypothèse $x=0$ donne encore un résultat infini; mais en fixant l'origine de l'intégrale à $x=1$, il reste à savoir ce qu'elle devient quand x est infini; car il se peut que la différence entre la partie positive et la partie négative du second membre demeure finie, quoique chacune de ces parties soit infinie, et dans ce cas, l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$, prise depuis $x=-1$ jusqu'à x infini négativement, aurait une valeur finie, ce qui résulte en effet des considérations exposées dans le n° 479. C'est Mascheroni qui, le premier, a résolu cette difficulté, en déterminant la constante arbitraire de manière que l'intégrale ci-dessus s'évanouît lorsque $x=-$infini. Mais avant d'exposer son procédé, je rapporterai, d'après lui, le calcul bien simple par lequel Grégoire Fontana prouvait que $\int \frac{dz}{\mathrm{l}z}$ est infinie entre les limites $z=0$ et $z=1$.

1225. En faisant $z=1-\omega$, on a $\int \frac{dz}{\mathrm{l}z} = -\int \frac{d\omega}{\mathrm{l}(1-\omega)}$; remplaçant $\mathrm{l}(1-\omega)$ par son développement, on obtient

$$-\int \frac{d\omega}{\mathrm{l}(1-\omega)} = \int \frac{d\omega}{\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^4 + \text{etc.}},$$

et posant alors

$$\frac{1}{\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^4 + \text{etc.}} = \frac{A}{\omega} + B + C\omega + D\omega^2 + E\omega^3 + \text{etc.},$$

on trouve sans peine que.

$$\left.\begin{array}{l} A = 1, \\ B + \frac{1}{2}A = 0, \\ C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}A = 0, \\ D + \frac{1}{2}C + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}A = 0, \\ E + \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}B + \frac{1}{5}A = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} A = 1, \\ B = -\frac{1}{2}, \\ C = -\frac{1}{3.4}, \\ D = -\frac{1}{2.3.4}, \\ E = -\frac{19}{2.3.4.5.6}, \\ \text{etc. } (*). \end{array}\right.$$

(*) La série de ces valeurs ne présentant pas de loi bien évidente, il n'est peut-être pas inutile de montrer que tous ses termes sont négatifs et renfermés entre des limites qui vont toujours en se resserrant, ensorte qu'elle ne peut devenir divergente. Pour cela je considère les équations

$$N + \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}L \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}B + \frac{1}{n}A = 0,$$
$$P + \frac{1}{2}N + \frac{1}{3}M + \frac{1}{4}L \ldots\ldots + \frac{1}{n}B + \frac{1}{n+1}A = 0,$$

placées aux n^e et $n+1^e$ rangs des précédentes, et dont la première, en y mettant pour A sa valeur, donne

$$\frac{1}{n} = -\left(N + \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}L \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}B\right),$$

d'où
$$\frac{1}{n+1} = -\frac{n}{n+1}\left(N + \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}L \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}B\right)$$

Substituant dans la seconde, on en tire

$$P = \left\{\left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\right)N + \left(\frac{1}{2}\,\frac{n}{n+1} - \frac{1}{3}\right)M + \left(\frac{1}{3}\,\frac{n}{n+1} - \frac{1}{4}\right)L \ldots + \left(\frac{n}{n^2-1} - \frac{1}{n}\right)B\right\},$$

expression qui sera négative si tous les termes qui précèdent P sont négatifs, puisqu'ils y sont multipliés par des quantités positives; et comme elle est équivalente à

$$P = -\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{3}M + \frac{1}{4}L \ldots + \frac{1}{n}B\right),$$

on voit qu'abstraction faite du signe, P est $< \frac{1}{n+1}$.

On obtient une limite plus approchée, en mettant au lieu de $\frac{1}{2}N$, sa valeur tirée de la première équation. Il résulte de là

$$P = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)M + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)L \ldots + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n}\right)B\right];$$

et comme la quantité comprise entre les crochets quarrés est positive, il s'ensuit qu'abstraction faite du signe, P est $< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}$ ou $\frac{n-1}{2n(n+1)}$, fraction qui décroît à mesure que n augmente.

Cela fait, il vient

$$\int\frac{dz}{lz}=A\,l\omega+B\omega+\tfrac{1}{2}C\omega^2+\tfrac{1}{3}D\omega^3+\tfrac{1}{4}E\omega^4+\text{etc.}+\textit{const.};$$

or, les limites de z étant o et 1, celles de ω sont 1 et o; et pour que la série précédente s'évanouisse lorsque $\omega=1$, il faut que

$$const.=-(B+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{3}D+\tfrac{1}{4}E+\text{etc.}),$$

expression dont la limite est finie.

En effet, dans la supposition de $\omega=1$, l'équation

$$\frac{1}{\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3+\frac{1}{4}\omega^4+\text{etc.}}=\frac{A}{\omega}+B+C\omega+D\omega^2+E\omega^3+\text{etc.};$$

donnant

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}}=A+B+C+D+E+\text{etc.},$$

on en conclut

$$-(B+C+D+E+\text{etc.})=A-\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}},$$

équation dont le second membre se réduit au premier terme A, qui est l'unité, puisque le dénominateur du deuxième est infini (*Int.* 30), et dont le premier membre surpasse évidemment la série qui exprime la constante, à cause des diviseurs introduits par l'intégration : cette constante est donc <1.

Si l'on met sa valeur dans celle de l'intégrale cherchée, on formera l'expression

$$\int\frac{dz}{lz}=l\,\omega+B(\omega-1)+\tfrac{1}{2}C(\omega^2-1)+\tfrac{1}{3}D(\omega^3-1)+\tfrac{1}{4}E(\omega^4-1)+\text{etc.},$$

au moyen de laquelle, tant que $\omega>o$, il est possible d'assigner la valeur de $\int\frac{dz}{lz}$, qui ne devient infinie que pour $\omega=o$, c'est-à-dire $z=1$.

Mascheroni observe ensuite qu'on peut donner cette propriété à la série

$$\int\frac{dz}{lz}=llz+\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\text{etc.}+\textit{const.}\ (434);$$

mais pour cela il faut d'abord changer la constante en $\alpha+l(-1)$, et joindre $l(-1)$ à llz afin d'obtenir $l(-lz)$, terme que la supposition de $z<1$ ne rend plus imaginaire. Cela posé, substituant $1-\omega$ au lieu de z, et $-(\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3+\text{etc.})$, au lieu de $l(1-\omega)$, on trouvera

$$\int\frac{dz}{lz}=\alpha+l(\omega+\tfrac{1}{2}\omega^2+\tfrac{1}{3}\omega^3+\text{etc.})$$
$$-\frac{(\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3+\text{etc.})}{1}+\frac{1}{2}\frac{(\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3+\text{etc.})^2}{1.2}-\text{etc.};$$

qui, par le développement de $l(\omega+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3+\text{etc.})$, donnera

$$\int\frac{dz}{lz}=\alpha+l\omega+b\omega+c\omega^2+\text{etc.},$$

b, c, etc. étant des coefficiens purement numériques. Cette expression étant ainsi ramenée à la même forme que la précédente, par rapport à la lettre ω, il résulte de leur comparaison

$$\alpha=-(B+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{3}D+\tfrac{1}{4}E+\text{etc.})$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.2.3.4}+\frac{19}{4.2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$

Telle est la valeur de la constante qui rend l'équation

$$\int\frac{dz}{lz}=\alpha+l(-lz)+\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

propre à donner la valeur de l'intégrale depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

Par les quatre premiers termes de l'expression de α, on obtient 0,562152; et en y ajoutant le cinquième et le sixième terme, savoir,

$$\frac{27}{5.2.2.3.4.5.6}+\frac{863}{6.2.2.2.3.3.4.5.6.7}=0{,}006128,$$

il vient 0,568280, valeur qui n'est pas fort éloignée de 0,577216, que Mascheroni trouve de deux manières différentes, ainsi qu'on va le voir.

1226. Il considère d'abord l'expression

$$\int\frac{dz}{lz}=llz+\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ \ldots\ldots(2)$$

où $z=e^x$, en sorte que les valeurs $x=-1$ et x infini négativement correspondent à $z=e^{-1}$ et à $z=0$, limites dans lesquelles la série ci-dessus a des termes infinis et un imaginaire. Si l'on intègre $\int\frac{dz}{lz}$ par parties, relativement au facteur dz, on obtiendra

$$\int\frac{dz}{lz}=\frac{z}{lz}+\int\frac{1.dz}{(lz)^2},$$
$$\int\frac{dz}{(lz)^2}=\frac{z}{(lz)^2}+\int\frac{1.2dz}{(lz)^3},$$
etc.,

d'où l'on conclura l'équation

$$\int \frac{dz}{lz} = z\left\{\frac{1}{lz} + \frac{1}{(lz)^2} + \frac{1.2}{(lz)^3} + \frac{1.2.3}{(lz)^4} + \text{etc.}\right\}\ldots\ldots(3),$$

dont le second membre a la propriété de s'évanouir lorsque $z=0$, et se réduit à

$$-e^{-1}\{1-1+1.2-1.2.3+\text{etc.}\},$$

lorsque $z=e^{-1}$. Cela posé, en donnant à la constante qu'il faut ajouter à la série (2) la forme $A+l-1$, et en observant que $l-1+llz=l(-lz)$, on aura

$$\int \frac{dz}{lz} = A + l(-lz) + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots(4);$$

et comparant cette série avec (3), en supposant dans l'une et dans l'autre $z=e^{-1}$, on formera l'équation

$$A - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= -e^{-1}\{1-1+1.2-1.2.3+\text{etc.}\},$$

de laquelle on tirera

$$A = -e^{-1}\{1-M\} + N,$$

en représentant par M la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \text{etc.},$$

dont la limite, rapportée n° 1124 est 0,40365226377, et par N la série convergente

$$1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1.2.3} - \text{etc.},$$

égale à 0,7965995992 97; on aura donc $A=0,577216$. Les séries (3) et (4) étant égales pour une valeur de z, doivent le demeurer toujours; ainsi la première s'évanouissant quand $z=0$, la seconde en doit faire autant. L'expression

$$\int \frac{dz}{lz} = A + l(-lz) + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \text{etc.}\ldots\ldots(2'),$$

donnera par conséquent la valeur de $\int \frac{dz}{lz}$, à partir de $z=0$, pour toutes les valeurs négatives de lz, et la formule correspondante

$$\int \frac{e^x dx}{x} = A + l(-x) + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots(1');$$

celles de $\int \frac{e^x dx}{x}$, à partir de x infini négativement.

1227. En opérant immédiatement sur l'expression $\int \frac{e^x dx}{x}$, nous allons déterminer de nouveau la constante A, et avec plus d'exactitude que ci-dessus. Si l'on intègre par parties la différentielle $\frac{e^x dx}{x}$, par rapport au facteur $e^x dx$, on trouvera

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x dx}{x^2},$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\int \frac{e^x dx}{x^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + \frac{2.3e^x}{x^4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{2.3.4\ldots(n-1)e^x}{x^n} + 2.3.4\ldots\ldots n\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}};$$

développant ensuite e^x suivant les puissances de x, on aura

$$\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}} = \int \frac{dx}{x^{n+1}}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right)$$
$$= A_n - \frac{1}{nx^n} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{2(n-2)x^{n-2}} \ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{2.3\ldots\ldots(n-1)x} + \frac{1(-x)}{2.3\ldots\ldots n}$$
$$+ \frac{x}{2.3\ldots(n+1)} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2.3\ldots(n+2)} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{2.3\ldots(n+3)} + \text{etc.},$$

en désignant par A_n la constante arbitraire, qui peut dépendre de l'exposant n, et en observant de changer le terme $\frac{dx}{x}$ en $\frac{-dx}{-x}$, afin d'éviter les imaginaires pour le cas où x serait négatif. La substitution de ce développement dans celui de $\int \frac{e^x dx}{x}$, obtenu plus haut, conduit à

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} \ldots\ldots + \frac{2.3.4\ldots(n-1)e^x}{x^n}$$
$$+ A_n - \frac{2.3\ldots n}{nx^n} - \frac{2.3\ldots\ldots n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots - \frac{n}{x} + 1(-x)$$
$$+ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\ldots\ldots(N).$$

Ce résultat renferme trois séries, dont les deux premières sont finies; le nombre de leurs termes dépend de n, et si l'on prend $n+1$ au lieu de n, on aura, en changeant la constante arbitraire A_n en A_{n+1},

$$\int\frac{e^x dx}{x}=\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots+\frac{2.3\ldots\ldots(n-1)e^x}{x^n}+\frac{2.3\ldots.ne^x}{x^{n+1}}$$
$$+A_{n+1}-\frac{2.3\ldots(n+1)}{(n+1)x^{n+1}}\ldots\ldots-\frac{n+1}{x}+1(-x)$$
$$+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{2(n+2)(n+3)}+\frac{x^3}{3(n+2)(n+3)(n+4)}+\text{etc.}\ldots\ (N+1).$$

Pour comparer ce résultat au précédent, il faut développer dans l'un le terme $\frac{2.3\ldots.ne^x}{x^{n+1}}$, qui ne se trouve pas dans l'autre et qui donne la série

$$\frac{2.3\ldots.n}{x^{n+1}}+\frac{2.3\ldots\ldots n}{x^n}\ldots.+\frac{1}{x}+\frac{1}{n+1}+\frac{x}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.};$$

effaçant ensuite les termes communs, et rapprochant de la constante A_{n+1} le terme invariable $\frac{1}{n+1}$, il restera seulement

$$A_n=A_{n+1}+\frac{1}{n+1},\quad \text{ou}\quad A_{n+1}=A_n-\frac{1}{n+1},$$

équation qui montre ce que devient la constante lorsqu'on introduit un nouveau terme dans la série

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}+\text{etc.},$$

ou que l'on passe du développement de

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots\ldots\ldots+2.3\ldots\ldots n\int\frac{e^x dx}{x^{n+1}},$$

à celui de

$$\frac{e}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots\ldots\ldots+2.3\ldots(n+1)\int\frac{e^x dx}{x^{n+2}}.$$

Maintenant, il est visible que puisque la constante A répond au cas où l'on développe immédiatement e^x suivant les puissances de x, la constante A_1 sera celle qu'il faudra substituer à A quand on prendra $\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x dx}{x^2}$, et l'on aura $A_1=A-1$; lorsqu'on emploiera

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+2\int\frac{e^x dx}{x^3},$$

il viendra

$$A_2=A_1-\frac{1}{2}=A-1-\frac{1}{2}.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra

$$A_n = A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots\ldots - \frac{1}{n};$$

au moyen de cette valeur, l'équation (N) ne dépendra plus que de la constante A, et deviendra

$$\int \frac{e^x dx}{x} = e^x \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} \ldots\ldots + \frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n} \right\}$$
$$+ A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots - \frac{1}{n}$$
$$- \frac{2.3\ldots n}{nx^n} - \frac{2.3\ldots n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots\ldots - \frac{n}{x} + \mathrm{l}(-x)$$
$$+ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.} \ldots (N').$$

Si l'on fait $x = -n$, dans les diverses séries qui composent le second membre de cette équation, et qu'on en cherche la limite en supposant n infinie, on verra d'abord que la première, multipliée par e^{-n}, doit s'évanouir; quant aux séries

$$- \frac{2.3\ldots n}{nx^n} - \frac{2.3\ldots n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots\ldots - \frac{(n-1)n}{2x^2} - \frac{n}{x}$$
$$+ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.},$$

elles se détruisent réciproquement, savoir, le dernier terme de la première avec le premier de la seconde, l'avant-dernier de l'une avec le deuxième de l'autre, et ainsi de suite, à cause que les quantités

$$\frac{n}{n} \text{ et } \frac{n}{n+1}, \quad \frac{(n-1)n}{2n^2} \text{ et } \frac{n^2}{2(n+1)(n+2)}, \quad \text{etc.},$$

sont égales lorsqu'on suppose n infinie : on aura donc

$$\int \frac{e^x dx}{x} = A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots - \frac{1}{n} + \mathrm{l}(n).$$

La valeur de la constante A ne dépend donc que de celle de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

dont la somme, lorsque n est très-grand, est $\mathrm{l}\,n + C$ (1000), C représentant le nombre 0,5772156649015328. Il suit de là qu'à la limite, ou

lorsque $x = -n = -$ infini, on a

$$\int \frac{e^x dx}{x} = A - C,$$

et qu'en prenant par conséquent cette limite pour l'origine de l'intégrale, on aura $A = C$, ou $A = 0{,}5772156649015328$, résultat beaucoup plus exact que celui du numéro précédent.

Mascheroni, en poussant le calcul indiqué dans le n° 1000, jusqu'au centième terme de la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ etc., a trouvé

$$C \text{ ou } A = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39.$$

La relation qui existe entre A et M (1226), savoir, $A = N + e^{-1}(M - 1)$, donnant $M = e(A - N) + 1$, le conduit à

$$M = 0{,}403652\ 637676\ 805925\ 7.$$

Cette valeur de la limite de la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \text{etc.},$$

est beaucoup plus approchée que celle du n° 1124.

Il faut observer que tout ce qui précède repose sur les séries

$$\frac{z}{lz} + \frac{z}{(lz)^2} + \frac{2z}{(lz)^3} + \frac{2.3z}{(lz)^4} + \text{etc.},$$
$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + \frac{2.3e^x}{x^4} + \text{etc.},$$

qui sont divergentes et ne peuvent par conséquent donner immédiatement les valeurs de $\int \frac{dz}{lz}$ et de $\int \frac{e^x dx}{x}$, à moins qu'on ne tienne compte du complément (*Int.* 5), lorsqu'on s'arrête à un terme particulier; c'est ce qu'on a fait pour la seconde, en développant l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}}$; mais quant à la première, on l'a toujours considérée en entier et comme un développement, suivant la remarque du n° 4 de l'Introduction.

1228. La série (2′) est visiblement celle qu'il faut employer lorsque z est peu différent de l'unité, parce qu'alors lz est une quantité fort petite : elle devient encore convergente après un certain nombre de termes, même quand lz est assez grand; mais la série (N') étant transformée comme on va le voir, est plus commode pour ce cas. Si l'on fait $n = -x + r$, r désignant une petite fraction, soit positive, soit

négative, on aura

$$1-x=1(n-r)=1n-\frac{r}{n}-\frac{r^2}{2n^2}-\frac{r^3}{3n^3}-\text{etc.},$$

et l'on changera par ce moyen l'équation (N') en

$$\begin{aligned}\int\frac{e^x dx}{x}=e^x\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{2.3}{x^4}\ldots\ldots+\frac{2.3\ldots(n-1)}{x^n}\right\}\\ +A-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots-\frac{1}{n}+1n-\frac{r}{n}-\frac{r^2}{2n^2}-\frac{r^3}{3n^3}-\text{etc.}\\ +\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\frac{n}{x}-\frac{(n-1)n}{2x^2}-\frac{(n-2)(n-1)n}{3x^3}-\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

résultat dans lequel il faudra remplacer la série $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-$etc., par la somme obtenue dans le n° 1000. En mettant ensuite $1z$, au lieu de x, il viendra

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{1z}=z\left\{\frac{1}{1z}+\frac{1}{(1z)^2}+\frac{2}{(1z)^3}+\frac{2.3}{(1z)^4}\ldots\ldots\ldots+\frac{2.3\ldots(n-1)}{(1z)^n}\right\}\\ -\frac{1}{2n}+\frac{B_1}{2n^2}-\frac{B_3}{4n^4}+\frac{B_5}{6n^6}-\text{etc.}-\frac{r}{n}-\frac{r^2}{2n^2}-\frac{r^3}{3n^3}-\text{etc.}\\ +\frac{1z}{n+1}+\frac{(1z)^2}{2(n+1)(n+2)}+\frac{(1z)^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\frac{n}{1z}-\frac{(n-1)n}{2(1z)^2}-\frac{(n-2)(n-1)n}{3(1z)^3}-\text{etc.},\end{aligned}$$

formule dans laquelle B_1, B_3, B_5, etc., représentent les nombres de Bernoulli, $1z=-(n-r)$, et dont tous les termes sont moindres que l'unité, à l'exception de $\frac{-n}{1z}$, qui est égal à $\frac{n}{n-r}$, et <2.

1229. La difficulté que présente l'évaluation de $\int\frac{e^x dx}{x}$, par rapport aux valeurs négatives de x (1224), se rencontre aussi dans le développement des intégrales

$$\int\frac{dx\cos x}{x},\quad\int\frac{dx\sin x}{x^2},$$

quand on y substitue les expressions de $\cos x$ et de $\sin x$ en séries; le premier terme du résultat est encore $1x$. Mascheroni a levé cette difficulté, comme la précédente, par le changement du signe de x avant l'intégration, et par la détermination de la constante arbitraire.

Relativement au premier point, il pensait que l'on doit écrire

$$\int \frac{dx}{x} = l(\pm x),$$

lorsqu'on part de la différentielle $\frac{dx}{x}$, et qu'on ignore si elle vient de $\frac{+dx}{+x}$, ou de $\frac{-dx}{-x}$. En admettant, avec Euler, que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires, quand ceux des nombres positifs sont réels, il prescrivait de prendre le signe inférieur, lorsque x était négatif par lui-même, afin de tomber sur une valeur réelle, quand ce que l'on cherche est possible, comme, par exemple, la quadrature de l'espace asymptotique de la branche d'hyperbole située du côté des abscisses négatives (492).

Il me semble que, sous ce point de vue, l'intégrale ne saurait être regardée comme unique, mais qu'elle est réellement composée de deux formules distinctes, ainsi que le sont les racines d'une équation du second degré, et que le passage de l'une à l'autre tient, comme on l'a vu (517), à ce que le saut de l'infini positif à l'infini négatif, rompt ici le lien de la continuité, quoiqu'il ne le fasse pas dans d'autres circonstances. Le cas qui nous occupe paraîtra d'ailleurs assez semblable à celui de l'hyperbole, par la discussion des courbes qu'il s'agit de quarrer.

1230. Considérons d'abord celle qui a pour équation

$$y = \frac{e^x}{x}, \text{ correspondant à } \int \frac{e^x dx}{x}.$$

Cette courbe, représentée par $K'M'F'FHK$ dans la figure 10, y est comparée à l'hyperbole $D'E'ED$, dont l'équation est $y' = \frac{1}{x}$, et dont les branches sont ponctuées. L'axe AB' des abscisses négatives est l'asymptote de la branche $M'K'$, qui s'en approche beaucoup plus rapidement que ne le fait la branche hyperbolique $N'D'$, puisqu'en posant $x' = -x$, on a FIG. 10.

$$\frac{P'M'}{P'N'} = \frac{y}{y'} = e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

rapport qui diminue à mesure que x augmente, et peut devenir aussi petit qu'on voudra.

Il n'en est pas ainsi des branches $M'F'$ et $N'E'$, par rapport à leur asymptote commune AC'. Lorsqu'on fait $y' = -y$, il vient

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Q'R'}{Q'S'} = \frac{x}{x'} = \frac{1}{e^x},$$

rapport qui tend sans cesse vers l'unité, lorsque x diminue ; la marche de la branche $M'F'$ vers l'asymptote AC', se rapproche donc sans cesse de celle que suit la branche hyperbolique $N'E'$; aussi trouve-t-on que l'espace asymptotique $B'K'M'P'$ est fini, tandis que $P'M'F'C'A$ est infini.

Du côté des x positifs, la branche FMH, extérieure à la branche EN qui lui correspond dans l'hyperbole, forme avec l'asymptote AG un espace infini, et établit un passage pareil à celui qui a lieu entre les deux branches $N'E'$ et NE de l'hyperbole : c'est là que se trouve celui du réel à l'imaginaire, ou le changement de formule nécessaire pour exprimer successivement les deux aires.

Le coefficient différentiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

s'évanouissant lorsque $x = 1$, montre qu'au point H, où $AG = 1$, la tangente est parallèle à la ligne des abscisses; ce point est un minimum après lequel la courbe se relève et s'étend à l'infini. Les segmens relatifs à cette branche croissent jusqu'à l'infini, ce qui s'accorde avec la marche de la formule (1) du n° 1224 (*).

Si l'on passe à l'intégrale $\int \frac{dz}{lz}$, l'équation de la courbe est $y = \frac{1}{lz}$;
FIG 11. sa forme est celle que montre la figure 11. Au point A, où $z = 0$, $y = 0$, la courbe commence brusquement, et comme plusieurs autres courbes transcendantes, fait exception au théorème du n° 175, qui n'est généralement vrai que pour les courbes algébriques. L'espace asymptotique $AFH'G$, correspondant à l'intégrale prise entre les limites $z = 0$ et $z = 1$, est infini, ce dont on trouvera encore la raison, en construisant l'hyperbole ordinaire ayant pour asymptote GH', et pour équation $y' = \frac{1}{z-1}$; car si l'on fait $y' = y$, et qu'on mette le signe — à

(*) La soutangente $\frac{x}{x-1}$, ayant pour limite l'unité, tend à devenir constante, ce qui rapproche la courbe d'une logarithmique (243), sans cependant que cette dernière soit asymptote de l'autre; car la différence de leurs ordonnées pour la même abscisse, tend à devenir infinie.

cette ordonnée, on aura

$$z = e^{-\frac{1}{y}} = 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} - \text{etc.},\quad z' = 1 - \frac{1}{y},\quad \frac{1-z}{1-z'} = 1 - \frac{1}{2y} + \text{etc.};$$

d'où il suit que le rapport des distances respectives des branches $M'F'$ et $N'E'$ à l'asymptote GH', tend sans cesse vers l'unité, et que $M'F'$ tombe entre $N'E'$ et GH'. Pour MF et NE, on aurait $\frac{z-1}{z'-1} = 1 + \frac{1}{y} + \text{etc.}$, et enfin $\frac{y}{y'} = \frac{z-1}{\mathrm{l}z}$ pour MK et ND, ce qui place toutes ces branches comme le montre la figure.

1231. Depuis Mascheroni, plusieurs géomètres se sont occupés de la fonction $\int \frac{dz}{\mathrm{l}z}$, dans l'intention de perfectionner les moyens d'en calculer la valeur, lorsque z est un nombre considérable. Tel paraît être le but de l'écrit que M. Soldner a publié à Munich en 1809, sous le titre de *Théorie et Tables d'une nouvelle transcendante*, dont je ne connais que la citation qu'en a faite M. Bessel, dans les *Archives naturelles et mathématiques* de Kœnigsberg (janvier 1811) (*), où, après avoir rapporté une formule de M. Soldner, il reprend le sujet d'une manière fort étendue et fort élégante. Ce dernier Mémoire étant écrit en allemand, je n'ai pu prendre qu'une légère connaissance des calculs, parmi lesquels j'ai extrait deux séries que je vais rapporter, l'une de M. Soldner, et l'autre de M. Bessel.

La première est un développement de $\int \frac{dx}{\mathrm{l}(a+x)}$, suivant les puissances de $\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)$, et peut s'obtenir comme il suit.

En posant $\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right) = y$, on a d'abord

$$\frac{1}{\mathrm{l}(a+x)} = \frac{1}{\mathrm{l}a + \mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{\mathrm{l}a + y} = \frac{1}{\mathrm{l}a}\left(1 - \frac{y}{\mathrm{l}a} + \frac{y^2}{(\mathrm{l}a)^2} - \text{etc.}\right);$$

et substituant cette valeur, on obtient

$$\int \frac{dx}{\mathrm{l}(a+x)} = \frac{1}{\mathrm{l}a}\int dx - \frac{1}{\mathrm{l}a}\int dx\left(\frac{y}{\mathrm{l}a} - \frac{y^2}{(\mathrm{l}a)^2} + \frac{y^3}{(\mathrm{l}a)^3} - \text{etc.}\right);$$

mais comme

$$1 + \frac{x}{a} = e^y,\quad dx = ae^y dy = a\,dy\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right),$$

(*) *Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik*, jahrgang 1811, erstes stück.

on a, en dernier lieu,

$$\int\frac{dx}{l(a+x)}=\frac{1}{la}\int dx$$
$$-\frac{a}{la}\int dy\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)\left(\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\text{etc.}\right).$$

On trouve sans peine une loi très-simple pour former les coefficiens de la série ci-dessus; car si l'on désigne par

$$A_1y+A_2y^2+A_3y^3\ldots\ldots+A_ny^n+\text{etc.}$$

le produit des polynomes en y soumis au signe $\int$, on voit que

$$A_n=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)la}-\frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)(la)^2}\ldots\pm\frac{1}{(la)^n},$$
$$A_{n+1}=\frac{1}{1.2.3\ldots n\,la}-\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)(la)^2}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)(la)^3}\ldots\mp\frac{1}{(la)^{n+1}};$$

d'où l'on conclut l'équation

$$\frac{A_n}{la}+A_{n+1}=\frac{1}{1.2.3\ldots n\,la},$$

qui fait connaître chaque coefficient par celui qui le précède (*).

L'intégration donne ensuite

$$\int\frac{dx}{l(a+x)}=\frac{x}{la}-\frac{a}{la}\left(A_1\frac{y^2}{2}+A_2\frac{y^3}{3}+A_3\frac{y^4}{4}+\text{etc.}\right)+const.,$$

Pour déterminer la constante, il faut faire $x=0$, d'où il résulte $y=0$, et le premier membre se réduit à la valeur que prend la fonction $\int\frac{dz}{lz}$, quand $z=a$. M. Soldner, ainsi que M. Bessel, donnent en général à cette fonction le nom de *logarithme intégral*, et la représentent par li$z$; suivant cette notation, on a donc *const.* $=$ li$a$ (**).

(*) Cette détermination des coefficiens, qui n'est pas celle de M. Soldner, m'a paru la plus directe; on peut leur donner beaucoup d'autres formes. Si, par exemple, on faisait $A_n=\frac{B_n}{1.2.3\ldots n(la)^n}$, l'équation ci-dessus deviendrait

$$B_{n+1}+(n+1)B_n=(n+1)(la)^n.$$

(**) Mascheroni proposait de donner à la fonction $\int\frac{dz}{lz}$ le nom d'*hyper-logarithme*, et Caluso, celui de *logologarithme*, en considérant que $\int\frac{dz}{lz}=\int\frac{dz}{\int\frac{dz}{z}}$ (*Mémoires de la Société italienne*, tome XII).

1232. M. Bessel substitue dans $\int\frac{dx}{lx}$, au lieu de lx, la série

$$m\{(x^{\frac{1}{m}}-1)-\tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{m}}-1)^2+\tfrac{1}{3}(x^{\frac{1}{m}}-1)^3-\text{etc.}\},$$

qu'on peut, à volonté, rendre convergente (*Int.* 25); et il pose

$$\frac{1}{m[(x^{\frac{1}{m}}-1)-\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{m}}-1)^2+\frac{1}{3}(x^{\frac{1}{m}}-1)^3-\text{etc.}]}=$$

$$\frac{1}{m(x^{\frac{1}{m}}-1)}+\frac{A}{m}+\frac{A'}{m}(x^{\frac{1}{m}}-1)+\frac{A''}{m}(x^{\frac{1}{m}}-1)^2+\frac{A'''}{m}(x^{\frac{1}{m}}-1)^3+\text{etc.}$$

Il n'est pas difficile de voir que les coefficiens A, A', A'', etc., de ce développement sont, aux signes près, ceux qui ont été désignés par B, C, D, etc., dans le n° 1225, puisqu'on rend les deux fractions identiques, au signe près, en faisant $\omega=-(x^{\frac{1}{m}}-1)$.

Cela posé, on aura

$$\int\frac{dx}{lx},\quad\text{ou}\quad \text{li}\,x=\int\frac{dx}{m(x^{\frac{1}{m}}-1)}+\frac{A}{m}x+\frac{A'}{m}\int dx(x^{\frac{1}{m}}-1)$$
$$+\frac{A''}{m}\int dx(x^{\frac{1}{m}}-1)^2+\text{etc.}$$

Le développement des puissances entières et positives de $x^{\frac{1}{m}}-1$ suffit pour intégrer tous les termes de cette expression, à partir du troisième; quant au premier, si l'on fait $x^{\frac{1}{m}}=z$, on trouve

$$\int\frac{dx}{m(x^{\frac{1}{m}}-1)}=\int\frac{z^{m-1}dz}{z-1}=\int\left\{\frac{z^{m-1}-1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\right\}dz$$
$$=\int\left\{z^{m-2}+z^{m-3}\ldots+1+\frac{1}{z-1}\right\}dz,$$

d'où

$$\int\frac{dx}{m(x^{\frac{1}{m}}-1)}=l(x^{\frac{1}{m}}-1)+x^{\frac{1}{m}}+\tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{m}}+\tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{m}}\ldots+\frac{1}{m-1}x^{\frac{m-1}{m}};$$

puis en affectant du double signe $\pm$ la quantité soumise à la caractéristique l (1229), on obtient

$$\text{li}\,x = \text{l}[\pm(x^{\frac{1}{m}} - 1)] + x^{\frac{1}{m}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{m}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{m}} \ldots + \frac{1}{m-1}x^{\frac{m-1}{m}}$$

$$+ \frac{Ax}{m} + \frac{A'x}{m}\left(\frac{x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}} - 1\right) + \frac{A''x}{m}\left(\frac{x^{\frac{2}{m}}}{1+\frac{2}{m}} - \frac{2x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}} + 1\right)$$

$$+ \frac{A'''x}{m}\left(\frac{x^{\frac{3}{m}}}{1+\frac{3}{m}} - \frac{3x^{\frac{2}{m}}}{1+\frac{2}{m}} + \frac{3x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}} - 1\right) + \text{etc.} + \textit{const.}$$

Observant ensuite que les quantités comprises dans les parenthèses de la deuxième et de la troisième ligne de la formule ci-dessus, ne sont autre chose que les différences successives des termes de la série

$$1,\quad \frac{x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}},\quad \frac{x^{\frac{2}{m}}}{1+\frac{2}{m}},\quad \frac{x^{\frac{3}{m}}}{1+\frac{3}{m}},\ldots\ldots \frac{x^{\frac{n}{m}}}{1+\frac{n}{m}},$$

M. Bessel les représente par Δ°, Δ', Δ'', Δ''', etc., et écrit, pour dernier résultat,

$$\text{li}\,x = \textit{const.} + \text{l}[\pm(x^{\frac{1}{m}} - 1)] + x^{\frac{1}{m}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{m}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{m}} \ldots + \frac{1}{m-1}x^{\frac{m-1}{m}}$$

$$+ \frac{x}{m}\{A^{\circ}\Delta^{\circ} + A'\Delta' + A''\Delta'' + A'''\Delta''' + \text{etc.}\}.$$

Pour s'assurer que cette suite est convergente, l'auteur fait voir que celle des quantités Δ°, Δ', Δ'', etc., l'est tant que $x^{\frac{1}{m}} < 2$.

Il remarque encore que li$x$ étant o lorsque $x = 0$ (1225), on doit y supprimer la constante arbitraire.

Ensuite, x étant > 1, mais tel que $x^{\frac{1}{m}} - 1$ soit une fraction positive dont le logarithme sera négatif, il y aura une valeur de x, pour laquelle li$x$ sera encore nul; et M. Bessel l'a trouvée égale à.... 1,45136923495. Mascheroni avait remarqué la même circonstance, en cherchant la valeur de z par celle de $\int \frac{dz}{lz} = z'$; et il avait obtenu $z = 1,45137$, lorsque $z' = 0$.

CHAPITRE VII.

Des Intégrales définies appliquées à la résolution des équations différentielles et des équations aux différences.

1233. Il existe probablement des fonctions dont les coefficiens différentiels ne peuvent s'exprimer par la variable indépendante seulement, ce qui rend impossible la séparation des variables dans les équations différentielles d'où dépendent ces fonctions. Quand même on aurait l'analyse complète des transcendantes *explicites*, c'est-à-dire exprimées par des intégrales à une seule variable, ou relatives aux quadratures, on ne saurait encore rien sur la nature de celles qui sont *implicites*, ou données seulement par des équations différentielles dans lesquelles les variables sont mêlées. La difficulté de séparer les variables dans une équation différentielle, tient sans doute quelquefois à la manière dont elles sont liées, même algébriquement, dans son intégrale. Si cette dernière était, par rapport à l'une et à l'autre, d'un degré supérieur, et qu'on ne sût pas la résoudre généralement, il ne serait pas étonnant que ne pouvant parvenir à l'expression finie de la fonction par l'équation primitive, on ne pût pas non plus obtenir une semblable expression de son coefficient différentiel; mais outre ce cas, dans lequel le facteur propre à rendre l'équation différentielle intégrable, doit être susceptible d'une forme finie, on sent qu'il peut en exister d'autres où la relation primitive entre la fonction et la variable indépendante, ne saurait être exprimée algébriquement. C'est pour ceux-là, que l'on rencontre presque toujours lorsqu'on veut appliquer les Mathématiques à la Physique, qu'il faut se préparer des ressources particulières. Euler a encore donné, dans ce genre, une nouvelle preuve de la fécondité de son génie, en indiquant le parti qu'on pouvait tirer des intégrales définies : voici comme il présente la chose.

Usage des intégrales définies, pour exprimer les fonctions données par des équations différentielles.

Soit $y=\int V dx$, V étant une fonction de x et de u, l'intégration ne devant avoir lieu que par rapport à la première de ces variables, et se terminant à $x=a$; de cette manière y se réduit à une fonction de

u seul, et ses coefficiens différentiels sont $\frac{dy}{du}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, etc. Il est visible que la variable x, qui disparaît après l'intégration, introduit dans l'expression de y une généralité beaucoup plus grande que celle des formes employées jusqu'ici; aussi est-il arrivé, comme nous le verrons bientôt, que des équations différentielles en y et u, dont on n'avait pu obtenir l'intégrale sous une forme finie, ont eu une solution de cette nature, la *transcendance* de la relation entre y et u étant rejetée sur la nouvelle variable x. Euler n'est d'abord parvenu qu'à former l'équation différentielle, par le moyen de l'intégrale, ainsi qu'il suit.

En différentiant complètement y, on a

$$dy = Vdx + du\int\frac{dV}{du}dx \quad (546),$$

l'intégrale $\int\frac{dV}{du}dx$ étant prise entre les mêmes limites que $\int Vdx$. La fonction y resterait encore indéterminée, si l'on ne fixait pas en même temps l'origine de l'intégrale, et c'est ce qu'Euler fait en supposant qu'elle s'évanouit lorsque $x=0$. Maintenant, si l'intégrale $\int Vdx$ devient nulle dans cette circonstance, quel que soit d'ailleurs u, il en arrivera autant à $\frac{dy}{du}$, puisqu'on a $y+dy=y+\frac{dy}{du}du=0$; il faudra donc prendre aussi $\int\frac{dV}{du}dx$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$.

En poussant jusqu'au second ordre la différentiation sous le signe, il en résultera $\frac{d^2y}{du^2}=\int\frac{d^2V}{du^2}dx$; et si l'on désigne par L, M et N, des fonctions quelconques de u, il viendra

$$L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+Ny=\int dx\left\{L\frac{d^2V}{du^2}+M\frac{dV}{du}+NV\right\}.$$

Lorsque l'intégration du second membre pourra s'effectuer, et qu'après la substitution de $x=a$, il donnera pour résultat une fonction de u, que nous représenterons par U, la valeur $y=\int Vdx$ satisfera évidemment à l'équation

$$L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+Ny=U.$$

On voit que la difficulté de la méthode consiste à choisir la fonction V, de manière que la fonction $dx\left\{L\frac{d^2V}{du^2}+M\frac{dV}{du}+NV\right\}$ soit intégrable relativement à x; et Euler observe qu'il faut exclure celles de la forme

PQ, P étant une fonction de u seul, et Q une fonction de x seul; car elles conduiraient à

$$y = P\int Q\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}\int Q\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}u^2}\int Q\mathrm{d}x,$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + Ny = \left\{L\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}u^2} + M\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} + NP\right\}\int Q\mathrm{d}x,$$

résultats dans lesquels l'intégrale $\int Q\mathrm{d}x$ n'entre que comme un facteur constant.

1234. Prenons, pour premier exemple,

$$V = x^{n-1}(u^2+x^2)^p(c^2-x^2)^q;$$

nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} = 2pux^{n-1}(u^2+x^2)^{p-1}(c^2-x^2)^q,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2} = 2px^{n-1}(c^2-x^2)^q(u^2+x^2)^{p-2}\{(2p-1)u^2+x^2\},$$

d'où nous tirerons l'expression

$$\int x^{n-1}\mathrm{d}x(c^2-x^2)^q(u^2+x^2)^{p-2}\left\{\begin{array}{lr} & 2p(2p-1)Lu^2 + 2pLx^2 + Nx^4 \\ + & 2pMu^3 + 2pMux^2 \\ + & Nu^4 + 2Nu^2x^2 \end{array}\right\},$$

qu'il faudra rendre intégrable par rapport à x. Euler prend

$$x^n(u^2+x^2)^{p-1}(c^2-x^2)^{q+1},$$

pour la fonction primitive dont l'expression précédente est dérivée, et en différentiant, il obtient

$$x^{n-1}\mathrm{d}x(u^2+x^2)^{p-2}(c^2-x^2)^q$$
$$\times\,\{n(u^2+x^2)(c^2-x^2) + 2(p-1)x^2(c^2-x^2) - 2(q+1)x^2(u^2+x^2)\};$$

développant et comparant de part et d'autre les termes affectés d'une même puissance de x, il trouve

$$\begin{aligned}
&2p(2p-1)Lu^2 + 2pMu^3 + Nu^4 = nc^2u^2,\\
&2pL + 2pMu + 2Nu^2 = nc^2 - nu^2 + 2(p-1)c^2 - 2(q+1)u^2,\\
&N = -n - 2(p-1) - 2(q+1) = -n - 2p - 2q.
\end{aligned}$$

Si, de la première de ces équations divisée par u^2, on retranche la seconde, il viendra

$$4p(p-1)L - Nu^2 = (n+2q+2)u^2 - 2(p-1)c^2;$$

et mettant pour N sa valeur donnée par la dernière, on aura

$$L = -\frac{u^2 + c^2}{2p},$$

d'où l'on déduira

$$M = \frac{(n + 2p - 1)(c^2 + u^2)}{2pu} + \frac{(p + q)u}{p}.$$

L'intégrale définie, de laquelle nous sommes partis, s'évanouira d'elle-même lorsque $x = 0$, tant que $n > 0$; faisant donc $x = a$, l'équation différentielle cherchée sera

$$-\frac{c^2 + u^2}{2p}\frac{d^2y}{du^2} + \left\{\frac{(n + 2p - 1)(c^2 + u^2)}{2pu} + \frac{(p + q)u}{p}\right\}\frac{dy}{du}$$
$$- (n + 2p + 2q)y = a^n(a^2 + u^2)^{p-1}(c^2 - a^2)^{q+1},$$

et sera satisfaite par l'équation

$$y = \int x^{n-1}dx(u^2 + x^2)^p(c^2 - x^2)^q,$$

l'intégrale indiquée étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$.

En supposant $a = c$, ce qui fait évanouir $(c^2 - a^2)^q$, lorsque l'exposant q est positif, on a seulement

$$(c^2 + u^2)ud^2y - \{(n + 2p - 1)(c^2 + u^2) + 2(p + q)u^2\}dudy$$
$$+ 2p(n + 2p + 2q)uydu^2 = 0;$$

l'intégrale définie restant la même que ci-dessus, doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = c$.

Si l'on fait

$$n + 2p - 1 = \alpha, \qquad n + 4p + 2q - 1 = \beta,$$

on trouvera

$$2p = \alpha + 1 - n, \qquad 2q = \beta - 1 + n - 2\alpha;$$

l'équation différentielle et l'expression de y se changeront en

$$(c^2 + u^2)ud^2y - (\alpha c^2 + \beta u^2)dydu + (\alpha + 1 - n)(\beta - \alpha + n)uydu^2 = 0,$$
$$y = \int x^{n-1}dx(u^2 + x^2)^{\frac{\alpha + 1 - n}{2}}(c^2 - x^2)^{\frac{\beta - 1 + n - 2\alpha}{2}}.$$

La solution ci-dessus peut aussi convenir à l'équation

$$x^2(a + bx^n)d^2y + x(c + ex^n)dxdy + (f + gx^n)ydx^2 = 0,$$

que nous avons traitée par les séries dans le n° 665. En y mettant d'abord z pour y, et faisant ensuite

$$z = x^{\frac{a-c}{a}+h}(a+bx^n)^{\frac{bc-ae}{nab}+1}y,$$

on la transformera dans cette autre

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x\{2a-c+2ah+(2b-e+2nb+2bh)x^n\}dydx$$
$$+\{f+ah-ch+ah^2+[g+(b-e+nb+bh)(n+h)]x^n\}ydx^2=0;$$

la quantité h restant arbitraire, on en disposera pour faire disparaître la première partie du coefficient du dernier terme, afin qu'il devienne divisible par x : on tirera de cette condition,

$$f+ah-ch+ah^2=0, \quad \text{ou} \quad ah^2+(a-c)h+f=0 \ (*).$$

Pour achever de rendre notre transformée identique avec l'équation à laquelle nous voulons la comparer, il faut y faire $x^n = u^2$. Euler n'a point poussé le calcul plus loin, parce qu'il traite la même équation par un autre moyen, que nous ferons connaître plus bas.

1255. Soit encore $V = e^{mux}x^n(c-x)^p$; on tire de là

$$\frac{dV}{du} = me^{mux}x^{n+1}(c-x)^p, \qquad \frac{d^2V}{du^2} = m^2e^{mux}x^{n+2}(c-x)^p,$$

et il faut rendre intégrable, par rapport à x, la fonction

$$e^{mux}x^ndx(c-x)^p\{m^2Lx^2+mMx+N\}.$$

(*) La transformation que nous indiquons ici se déduit de la deuxième du n° 609. En comparant l'équation

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dydx+(f+gx^n)ydx^2=0,$$

à celle de cet article, on a

$$P=\frac{c+ex^n}{x(a+bx^n)}, \qquad Q=\frac{f+gx^n}{x^2(c+ex^n)};$$

et si l'on veut prendre pour R une fonction telle, que la transformée conserve la même forme que la proposée, il faudra supposer $R=\frac{\mu+\nu x^n}{x(a+bx^n)}$, μ et ν étant indéterminés. Développant ensuite la fonction $\frac{dR}{dx}+R^2+PR$, qui aura pour dénominateur commun $(a+bx^n)^2$, on disposera de μ et de ν de manière à réduire ce dénominateur à $a+bx^n$. Ceci suffit pour indiquer la marche qu'il faut suivre dans ce calcul.

Pour y parvenir, on suppose qu'elle correspond à la fonction primitive $e^{mux}x^{n+1}(c-x)^{p+1}$; différentiant cette dernière, et comparant le résultat avec la précédente, il vient

$$N=(n+1)c, \quad mM=mcu-(n+p+2), \quad m^2L=-mu,$$

d'où l'on conclut l'équation différentielle

$$-\frac{u}{m}\frac{d^2y}{du^2}+\left(cu-\frac{n+p+2}{m}\right)\frac{dy}{du}+(n+1)cy=e^{mcu}a^{n+1}(c-a)^{p+1},$$

et la solution

$$y=\int e^{mux}x^n dx(c-x)^p,$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$.

Lorsqu'on fait $m=1$ et $c=a$, on a seulement

$$ud^2y-(au-n-p-2)dydu-(n+1)aydu^2=0,$$
$$y=\int e^{ux}x^n dx(a-x)^p,$$

en supposant d'ailleurs $p+1>0$ et $n+1>0$, pour que l'intégrale ne devienne pas infinie quand $x=a$ et quand $x=0$.

Si l'on suppose $y=e^{\int z du}$, ou $z=\frac{dy}{ydu}$, on obtient cette transformée du premier ordre

$$udz+uz^2du-auzdu+(n+p+2)zdu-(n+1)adu=0,$$

à laquelle on satisfait en prenant

$$z=\frac{\int e^{ux}x^{n+1}dx(a-x)^p}{\int e^{ux}x^n dx(a-x)^p}.$$

Euler transforme cette expression de plusieurs manières, en faisant successivement

$$z=\tfrac{1}{2}a+v, \quad v=u^{-n-p-2}s, \quad u^{-n-p-1}=-(n+p+1)t,$$

et il obtient

$$udv+uv^2du+(n+p+2)vdu-\tfrac{1}{4}a^2udu-\tfrac{1}{2}(n-p)adu=0,$$
$$u^{-n-p-1}ds+u^{-2n-2p-3}s^2du-\tfrac{1}{4}a^2udu-\tfrac{1}{2}(n-p)adu=0,$$
$$ds+s^2dt-\tfrac{1}{4}a^2u^{2n+2p+4}dt-\tfrac{1}{2}(n-p)au^{2n+2p+3}dt=0;$$

enfin, posant $-(n+p+1)t=r$, $s=-(n+p+1)q$, il arrive, en dernier résultat, à l'équation

$$dq+q^2dr-\frac{a^2r^{\frac{-2n-2p-4}{n+p+1}}+2a(n-p)r^{\frac{-2n-2p-3}{n+p+1}}}{4(n+p+1)^2}\,dr=0,$$

qui se tire immédiatement de la transformée en z et u, en y faisant

$$u=r^{\frac{-1}{n+p+1}},\qquad z=\tfrac{1}{2}a-(n+p+1)r^{\frac{n+p+2}{n+p+1}}q.$$

Il transforme aussi l'équation du second ordre entre y et u, et parvient à un résultat remarquable par sa simplicité. Après avoir mis cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{du}-ady+\frac{(n+p+2)dy}{u}-\frac{(n+1)aydu}{u}=0,$$

il fait $u=bt^q$, d'où $d\frac{dy}{du}=d\frac{dy}{bt^{q-1}dt}$, et parvient à

$$\frac{d^2y}{bqt^{q-1}dt}-\frac{(q-1)dy}{bqt^q}-ady+\frac{(n+p+2)dy}{bt^q}-\frac{q(n+1)aydt}{t}=0,$$

en prenant dt pour constante. Cette dernière équation revient à

$$d^2y-bqat^{q-1}dydt+\frac{(qn+qp+q+1)dydt}{t}-bq^2(n+1)at^{q-2}y\,dt^2=0,$$

et est satisfaite par $y=\int e^{btqx}x^n dx(a-x)^p$.

Pour transformer celle-ci, Euler prend

$$z=e^{-\int Pdt}y,\quad\text{ou}\quad\frac{dy}{y}=Pdt+\frac{dz}{z},$$

ce qui lui donne

$$d^2z+2Pdtdz-bqat^{q-1}dtdz+(qn+qp+q+1)\frac{dtdz}{t}+zdtdP$$

$$+zdt^2\left\{P^2-bqat^{q-1}P+\frac{(qn+qp+q+1)P}{t}-bq^2(n+1)at^{q-2}\right\}=0;$$

et pour faire disparaître les termes multipliés par dz, il fait

$$2P-bqat^{q-1}+\frac{qn+qp+q+1}{t}=0.$$

La valeur de P qui résulte de cette équation, le conduit à

$$d^2z-zdt^2\left\{\frac{(qn+qp+q)^2-1}{4t^2}+\tfrac{1}{2}bq^2(n-p)at^{q-2}+\tfrac{1}{4}b^2q^2a^2t^{2q-2}\right\}=0,$$

dont la solution est

$$z = e^{-\frac{1}{2}bat^{q}}\, t^{\frac{qn+qp+q+1}{2}} \int e^{bt^q x} x^n \mathrm{d}x(a-x)^p.$$

Ces formules se simplifient par la supposition de

$$p = n, \quad q^2(2n+1)^2 - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad q = \frac{\pm 1}{2n+1},$$

et

$$b = \pm\frac{2}{q} = \pm 2(2n+1);$$

il vient alors

$$\mathrm{d}^2z - a^2 z t^{\frac{\pm 2}{2n+1}-2}\mathrm{d}t^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}^2z - a^2 t^{2q-2} z \mathrm{d}t^2 = 0,$$

et

$$z = e^{\pm(2n+1)at^{\frac{\pm 1}{2n+1}}}\, t^{\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm 1}{2n+1}}x} x^n \mathrm{d}x(a-x)^n,$$

ou

$$z = e^{-\frac{a}{q}t^q}\, t\int e^{\frac{2x}{q}t^q} x^{\pm\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(a-x)^{\mp\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}}.$$

1236. La supposition de $y = \int \mathrm{d}x(a^2-x^2)^{p-1}\cos bu^q x$ conduit aussi à une équation différentielle de la même forme que celle du numéro précédent : on en déduit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} = -\, bqu^{q-1}x(a^2-x^2)^{p-1}\sin bu^q x,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2} = -\, \{bq(q-1)u^{q-2}\sin bu^q x + b^2q^2u^{2q-2}x\cos bu^q x\}(a^2-x^2)^{p-1}x;$$

et substituant dans l'expression $\int \mathrm{d}x\left(L\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2} + M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} + NV\right)$, on a la fonction

$$\int \mathrm{d}x(a^2-x^2)^{p-1}\left\{\begin{matrix} N\cos bu^q x - bqMu^{q-1}x\sin bu^q x - bq(q-1)Lu^{q-2}x\sin bu^q x \\ -b^2q^2Lu^{2q-2}x^2\cos bu^q x \end{matrix}\right\},$$

à laquelle on assignera pour intégrale la fonction primitive........ $(a^2-x^2)^p\sin bu^q x$, qui s'évanouit lorsque $x=0$ et lorsque $x=a$. La différentiation de cette dernière, et la comparaison du résultat avec la précédente, donneront

$$L = \frac{u^{-q+2}}{bq^2}, \qquad M = \frac{(2pq-q+1)u^{-q+1}}{bq^2}, \qquad N = a^2bu^q.$$

Il faut observer que l'équation différentielle

$$L\frac{d^2y}{du^2} + M\frac{dy}{du} + Ny = \int dx \left\{ L\frac{d^2V}{du^2} + M\frac{dV}{du} + NV \right\};$$

se réduit à

$$L\frac{d^2y}{du^2} + M\frac{dy}{du} + Ny = 0,$$

lorsque l'intégrale du second membre s'évanouit à la limite $x=a$; ainsi l'on aura seulement, dans l'exemple qui nous occupe,

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{(2pq-q+1)}{u}\frac{dy}{du} + q^2a^2b^2u^{2q-2}y = 0,$$

et

$$y = \int dx(a^2-x^2)^{p-1}\cos bu^q x.$$

Si l'on fait $p=\frac{q-1}{2q}$ et $b=\frac{1}{q}$, on tombe sur un cas particulier très-remarquable, savoir,

$$\frac{d^2y}{du^2} + a^2u^{2q-2}y = 0,$$

pour lequel on a

$$y = \int dx(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\cos\frac{1}{q}u^q x,$$

l'intégrale étant prise de manière à s'évanouir lorsque $x=0$. On a montré, dans le n° 663, que cette dernière équation différentielle répondait à celle de Riccati; on passe de l'une à l'autre en faisant $y=e^{\int z du}$, d'où il résulte.

$$dz + z^2du + a^2u^{2q-2}du = 0,$$

$$z = \frac{1}{y}\frac{dy}{du} = -\frac{u^{q-1}\int x dx(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\sin\frac{1}{q}u^q x}{\int dx(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\cos\frac{1}{q}u^q x}:$$

les intégrations relatives à x s'effectueront toutes les fois que $\frac{-q-1}{2q}$ sera un nombre entier positif. En posant donc $\frac{-q-1}{2q}=i$, on aura... $q=-\frac{1}{2i+1}$, et il viendra

$$dz + z^2du + a^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}du = 0,$$

équation qui comprend la seconde classe des cas d'intégrabilité que

nous avons trouvés dans le n° 565. L'équation du second ordre et sa solution sont

$$d^2y + a^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}y\,du^2 = 0,$$

$$y = \int dx(a^2-x^2)^i \cos[-(2i+1)u^{\frac{-1}{2i+1}}x].$$

1237. Dans ce qui précède, nous sommes partis de l'intégrale $\int V dx$, pour arriver à l'équation différentielle; mais cette méthode est indirecte, puisque c'est toujours l'équation qui est donnée, et qu'on cherche l'expression de la fonction qu'elle détermine. Euler, en conséquence, retourne son procédé; il suppose que l'on ait le développement en série de la fonction cherchée (659 et suiv.), et il tâche d'obtenir la limite de cette série, au moyen d'intégrales définies, en s'aidant des procédés indiqués dans les n°s 1140 et suiv.

Pour faire connaître la marche d'Euler, nous commencerons avec lui par déterminer la somme de la série

$$A + Bs + Cs^2 + \dots\dots\dots + Ms^{i-1} + Ns^i + \text{etc.},$$

dans laquelle

$$B = \frac{0m+h}{1n+k}A, \quad C = \frac{1m+h}{2n+k}B, \quad D = \frac{2m+h}{3n+k}C, \dots N = \frac{(i-1)m+h}{in+k}M.$$

Il est visible que cette série rentre dans celle qui a été traitée n° 1148; mais comme dans l'équation de cet article, nous n'avons point dégagé la somme de l'équation à laquelle nous sommes parvenus, nous reprendrons en entier ici les calculs d'Euler. Soit donc

$$z = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 \dots\dots\dots + Ms^{i-1} + Ns^i + \text{etc.};$$

nous tirerons de là

$$\frac{sdz}{ds} = 1Bs + 2Cs^2 + 3Ds^3 \dots\dots\dots + (i-1)Ms^{i-1} + iNs^i + \text{etc.};$$

multipliant cette équation par m, la précédente par h, et réunissant les produits, nous aurons

$$\frac{msdz}{ds} + hz = hA + (m+h)Bs + (2m+h)Cs^2 \dots\dots + [(i-1)m+h]Ms^{i-1} + (im+h)Ns^i + \text{etc.};$$

nous parviendrons semblablement à

$$\frac{nsdz}{ds} + kz = kA + (n+k)Bs + (2n+k)Cs^2 \ldots\ldots + [(i-1)n+k]Ms^{i-1} + (in+k)Ns^i + \text{etc.};$$

et en observant que

$$(n+k)B = hA,\ (2n+k)C = (m+h)B,\ \ldots (in+k)N = [(i-1)m+h]M,\ \text{etc.},$$

nous aurons

$$\frac{nsdz}{ds} + kz = kA + hAs + (m+h)Bs^2 + (2m+h)Cs^3 + (3m+h)Ds^4 + \text{etc.}$$

Mais d'après l'une des équations ci-dessus, la partie qui suit le terme kA, dans le second membre de celle-ci, est égale à $s\left(\frac{msdz}{ds} + hz\right)$; nous pouvons donc former l'équation

$$\frac{nsdz}{ds} + kz = kA + \frac{ms^2dz}{ds} + hsz,$$

ou

$$dz + \frac{zds(k-hs)}{s(n-ms)} = \frac{kAds}{s(n-ms)},$$

dont l'intégration fera connaître z.

On a

$$\frac{ds(k-hs)}{s(n-ms)} = \frac{kds}{ns} + \frac{(mk-nh)ds}{n(n-ms)};$$

en intégrant, il vient $s^{\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}}$ pour le facteur qui rend intégrable l'équation en z (570), et au moyen duquel on arrive à

$$(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}} s^{\frac{h}{n}} z = Ak\int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

d'où l'on conclut

$$z = Aks^{-\frac{h}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

l'intégrale étant prise de manière à donner $z = A$ lorsque $s = 0$.

Euler considère en particulier les cas où $m = 0$ et $n = 0$, dans lesquels la valeur générale de z devient illusoire; et en remontant à l'équation différentielle, il trouve pour le premier

$$z = \frac{Ak}{n} e^{\frac{hs}{n}} s^{-\frac{k}{n}} \int e^{-\frac{hs}{n}} s^{\frac{k}{n}-1} ds,$$

et pour le second

$$z = -\frac{Ak}{m} e^{-\frac{k}{m^2 s}} s^{-\frac{h}{m}} \int e^{\frac{k}{m^2 s}} s^{\frac{h}{m}-2} ds.$$

Il remarque encore que l'intégration indiquée s'effectue toutes les fois que k est un multiple de n dans l'un, et de m dans l'autre.

1238. Passons à la série

$$AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 \ldots\ldots + MM'u^{i-1} + NN'u^i + \text{etc.},$$

en supposant que

$$B = \frac{0m+h}{1n+k} A,\ C = \frac{1m+h}{2n+k} B,\ D = \frac{2m+h}{3n+k} C, \ldots N = \frac{(i-1)m+h}{in+k} M;$$
$$B' = \frac{0m'+h'}{1n'+k'} A',\ C' = \frac{1m'+h'}{2n'+k'} B',\ D' = \frac{2m'+h'}{3n'+k'} C', \ldots N' = \frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'} M'.$$

Soit

$$y = AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 \ldots\ldots + MM'u^{i-1} + NN'u^i + \text{etc.},$$

et considérons la série

$$z = A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + Eu^4x^4 + \text{etc.},$$

en y faisant $ux = s$; nous aurons alors, par le numéro précédent,

$$z = Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}.$$

Formons ensuite l'équation

$$V = \int Pz dx = \int P dx (A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}),$$

dans laquelle nous regarderons la quantité u comme constante, et nous chercherons à déterminer la fonction P, de manière qu'en effectuant les intégrations relatives à x, on obtienne la série proposée. Pour cela, il faudra qu'entre les limites assignées à la variable x, on ait

$$\int Px dx = \frac{B'}{A'} \int P dx,\ \int Px^2 dx = \frac{C'}{A'} \int P dx,\ \int Px^3 dx = \frac{D'}{A'} \int P dx;\ \text{etc.};$$

car il en résultera

$$V = \{AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 + \text{etc.}\} \frac{1}{A'} \int P dx,$$

d'où

$$y = \frac{A'Y}{\int P\mathrm{d}x} = \frac{A'\int Pz\mathrm{d}x}{\int P\mathrm{d}x},$$

les intégrales indiquées étant prises entre les limites convenables. Mais si l'on compare chacune des intégrales $\int Px\mathrm{d}x$, $\int Px^2\mathrm{d}x$, etc., à celle qui la précède, on aura les relations

$$\int Px\mathrm{d}x = \frac{B'}{A'}\int P\mathrm{d}x,\ \int Px^2\mathrm{d}x = \frac{C'}{B'}\int Px\mathrm{d}x,\ \int Px^3\mathrm{d}x = \frac{D'}{C'}\int Px^2\mathrm{d}x, \text{ etc.},$$

d'où l'on conclura

$$\int Px^i\mathrm{d}x = \frac{N'}{M'}\int Px^{i-1}\mathrm{d}x = \frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'}\int Px^{i-1}\mathrm{d}x;$$

or, en observant que ces relations ne doivent avoir lieu qu'aux limites des intégrales, on verra facilement qu'on peut supposer en général

$$\int Px^i\mathrm{d}x = \frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'}\int Px^{i-1}\mathrm{d}x + \frac{x^iQ}{in'+k'},$$

pourvu que la fonction x^iQ s'évanouisse à ces limites. Différentions cette équation et divisons ensuite ses deux membres par x^{i-1}, nous aurons, après avoir fait disparaître les dénominateurs,

$$(in'+k')Px\mathrm{d}x = (im'-m'+h')P\mathrm{d}x + x\mathrm{d}Q + iQ\mathrm{d}x.$$

Cette dernière devant avoir lieu quel que soit i, se partage nécessairement en deux autres, qui sont

$$n'Px\mathrm{d}x = m'P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}x, \quad k'Px\mathrm{d}x = (h'-m')P\mathrm{d}x + x\mathrm{d}Q,$$

et desquelles on tire

$$P\mathrm{d}x = \frac{Q\mathrm{d}x}{n'x-m'} \quad \text{et} \quad P\mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{d}Q}{k'x-(h'-m')},$$

divisant l'une des valeurs de $P\mathrm{d}x$ par l'autre, il vient

$$\frac{x\mathrm{d}Q}{Q\mathrm{d}x} = \frac{k'x+m'-h'}{n'x-m'}, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \frac{\mathrm{d}x(k'x+m'-h')}{x(n'x-m')},$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \frac{(h'-m')\mathrm{d}x}{m'x} + \frac{(m'k'+m'n'-h'n')\mathrm{d}x}{m'(n'x-m')},$$

$$Q = x^{\frac{h'}{n'}-1}(n'x-m')^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1} \times \mathit{const.};$$

faisant la constante égale à $(-1)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}$, et substituant la valeur de Q dans celle de Pdx, nous aurons

$$Pdx = x^{\frac{h'}{m'}-1}dx(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}.$$

Nous déduirons de là

$$(in'+k')\int Px^i dx = [(i-1)m'+h']\int Px^{i-1}dx$$
$$+ x^{i+\frac{h'}{m'}-1}(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1};$$

mais comme la partie intégrée doit s'évanouir aux deux limites de l'intégrale, il faudra prendre cette intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{m'}{n'}$. On aura alors

$$\int Px^i dx = \frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'}\int Px^{i-1}dx,$$

pourvu que

$$i+\frac{h'}{m'}-1>0, \qquad \frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1>0;$$

et avec ces conditions, il vient

$$y = \frac{A'\int Pzdx}{\int Pdx} = \frac{A'\int x^{\frac{h'}{m'}-1}zdx(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}}{\int x^{\frac{h'}{m'}-1}dx(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}},$$

en observant que

$$z = Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds(n-ms)^{\frac{hn-km}{mn}-1}:$$

cette dernière intégrale doit être prise de manière à donner $z=A$ lorsque $s=0$; et il faut changer dans sa valeur s en ux, puis regarder u comme constant dans l'intégration relative à x.

Il est visible que l'on peut échanger, dans les résultats ci-dessus, les coefficiens A, B, C, etc., avec les coefficiens A', B', C', etc., parce que ceux de la première suite sont de la même forme que ceux de la seconde. Il suit de là que l'on peut obtenir deux expressions de la somme y, en y changeant m, n, h, k en m', n', h', k', et réciproquement.

On doit remarquer que la fonction Q n'est introduite dans le calcul

que pour donner les limites des intégrales $\int P\mathrm{d}x$, et que les conditions

$$i + \frac{h'}{m'} - 1 > 0, \quad \frac{k'm' - h'n'}{m'n'} + 1 > 0,$$

n'étant pas remplies lorsque $m' = 0$, ou $n' = 0$, il faut déterminer Q d'une manière spéciale pour chacun de ces cas. Les deux valeurs de $P\mathrm{d}x$ se réduisent, dans le premier, à

$$P\mathrm{d}x = \frac{Q\mathrm{d}x}{n'x}, \qquad P\mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{d}Q}{k'x - h'};$$

on en tire

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \frac{\mathrm{d}x(k'x - h')}{n'x^2}, \quad \text{et} \quad Q = e^{\frac{h'}{n'x}} x^{\frac{k'}{n'}}:$$

on a, dans le second cas,

$$P\mathrm{d}x = \frac{Q\mathrm{d}x}{-m'}, \qquad P\mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{d}Q}{k'x + m' - h'},$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \frac{(k'x + m' - h')\mathrm{d}x}{-m'x} = -\frac{k'\mathrm{d}x}{m'} + \frac{h' - m'}{m'}\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad Q = e^{-\frac{k'x}{m'}} x^{\frac{h'}{m'} - 1}.$$

1239. Nous allons appliquer ce qui précède à l'équation

$$x^2(a + bx^n)\mathrm{d}^2y + x(c + ex^n)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + (f + gx^n)y\mathrm{d}x^2 = 0,$$

d'après laquelle on peut développer y dans une série de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^{\alpha+n} + Cx^{\alpha+2n} + Dx^{\alpha+3n} + \text{etc.},$$

α étant donné par l'équation du second degré

$$\alpha(\alpha - 1)a + \alpha c + f = 0 \ (665).$$

Si l'on fait, pour abréger, $\alpha(\alpha - 1)b + \alpha e + g = h$, on aura

$$B = \frac{-h}{n[na + (2\alpha - 1)a + c]}A,$$

$$C = \frac{-n^2b - (2\alpha - 1)nb - ne - h}{2n[2na + (2\alpha - 1)a + c]}B,$$

$$D = \frac{-4n^2b - 2(2\alpha - 1)nb - 2ne - h}{3n[3na + (2\alpha - 1)a + c]}C,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N = \frac{-(i-1)^2n^2b - (i-1)(2\alpha - 1)nb - (i-1)ne - h}{in[ina + (2\alpha - 1)a + c]}M.$$

Les facteurs du dénominateur de ces expressions sont de la forme de

ceux de la série du numéro précédent ; et le numérateur, étant une fonction du second degré, se décompose en deux facteurs du premier, par la résolution de l'équation

$$(i-1)^2n^2b+(2\alpha-1)(i-1)nb+(i-1)ne+h=0,$$

qui donne

$$(i-1)n=-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)-\frac{e}{2b}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(2\alpha-1)^2+\frac{(2\alpha-1)e}{2b}+\frac{e^2}{4b^2}-\frac{h}{b}},$$

ce qu'on réduit à

$$(i-1)n=-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)-\frac{e}{2b}\pm\frac{1}{2b}\sqrt{(b-e)^2-4bg},$$

en vertu de l'équation d'où dépend α. Si, pour abréger, on fait.... $\sqrt{(b-e)^2-4bg}=q$, il viendra

$$(i-1)n=-\frac{(2\alpha-1)b+e\mp q}{2b},$$

d'où il résultera

$$N=\frac{-\{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q\}\{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q\}}{inb[ina+(2\alpha-1)a+c]}M.$$

Soit à présent $x^n=u$, et

$$\frac{y}{x^a}=AA'+BB'u+CC'u^2\ldots\ldots\ldots\ldots+MM'u^{i-1}+NN'u^i;$$

nous aurons, dans cette forme,

$$N=\frac{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q}{-inb}M,$$

$$N'=\frac{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q}{ina+(2\alpha-1)a+c}M',$$

valeurs dont la comparaison avec celles du numéro précédent, nous montre qu'il faut y changer

m en nb, h en $\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q$,
n en $-nb$, k en 0,
m' en nb, h' en $\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q$,
n' en na, k' en $(2\alpha-1)a+c$.

Nous chercherons, d'après ces dernières dénominations, l'expression de z, et pour éviter toute ambiguïté, nous y écrirons t au lieu de x ;

nous aurons $s = ut = x^n t$, et

$$z = A(1+s)^{\frac{-(2\alpha-1)b-e+q}{2nb}} = A(1+x^n t)^{\frac{-(2\alpha-1)b-e+q}{2nb}}.$$

Nous conserverons dans l'expression de y les lettres m', n', h' et k', mais nous changerons u en x^n; et faisant attention que y est divisé par x^α, nous obtiendrons

$$y = \frac{A'x^\alpha \int t^{\frac{h'}{m'}-1} z dt (m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}}{\int t^{\frac{h'}{m'}-1} dt (m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}},$$

les intégrales étant nulles lorsque $t=0$, et terminées à $t = \frac{m'}{n'} = \frac{b}{a}$, en observant d'ailleurs les conditions

$$i + \frac{h'}{m'} - 1 > 0, \qquad \frac{k'm'-h'n'}{m'n'} + 1 > 0,$$

dont la première se réduit à

$$\frac{(2\alpha-1)b+e+q}{2nb} > 0,$$

à cause que la plus petite valeur de i est l'unité, et la seconde devient

$$\frac{(2\alpha-1)ab + abc - ae - aq}{2nab} + 1 > 0.$$

Il est facile de voir aussi que l'intégrale définie $\int t^{\frac{h'}{m'}-1} dt (m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}$ peut être remplacée par une constante arbitraire, et que l'on aura enfin

$$y = Cx^\alpha \int t^{\frac{h'}{m'}-1} z dt (m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}.$$

Le coefficient A, qui entre dans la valeur de z, étant arbitraire, la dernière expression de y est une intégrale complète, puisqu'elle renferme les deux constantes A et C.

La possibilité d'échanger entr'elles les quantités n et n', k et k', en prenant

na pour n, $-nb$ pour n', $(2\alpha-1)a+c$ pour k, et 0 pour k',

conduit à une seconde solution, dans laquelle on a

$$z = Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{hn-mk}{mn}-1},$$

la fonction z devant être égale à A, lorsque $s=0$, et

$$y = Cx^{\alpha}\int t^{\frac{h'}{n'}-1} z\,dt\,(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

l'intégrale relative à t devant s'évanouir lorsque $t=0$, et lorsque $t=\frac{m'}{n'}$. Les conditions de cette expression sont $\frac{h'}{m'}>0$, et $1-\frac{h'}{m'}>0$, à cause que $k'=0$. La relation entre z et s, délivrée du signe d'intégration, est

$$\frac{dz}{ds} = \frac{Ak - z(k-hs)}{s(n-ms)}.$$

1240. Euler donne encore deux solutions de l'équation différentielle proposée; il les tire de la série descendante

$$y = x^{\alpha}(A + Bx^{-n} + Cx^{-2n} + Dx^{-3n} + \text{etc.}),$$

pour laquelle α est déterminé par l'équation

$$\alpha(\alpha-1)b + \alpha e + g = 0.$$

Faisant $\alpha(\alpha-1)a + \alpha c + f = h$, il trouve

$$B = \frac{-h}{n[nb-(2\alpha-1)b-e]}A,$$

$$C = \frac{-n^2a + (2\alpha-1)na + nc - h}{2n[2nb-(2\alpha-1)b-e]}B,$$

....

$$N = \frac{-(i-1)^2n^2a + (2\alpha-1)(i-1)na + (i-1)nc - h}{in[inb-(2\alpha-1)b-e]}M.$$

L'expression de N se décompose ainsi :

$$N = \frac{-\{(i-1)na - \frac{1}{2}(2\alpha-1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p\}\{(i-1)na - \frac{1}{2}(2\alpha-1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p\}}{ina[inb-(2\alpha-1)b-e]}M,$$

en posant $\sqrt{(a-c)^2-4af}=p$. Par cette opération, le développement de y peut être mis sous la forme

$$\frac{y}{x^{\alpha}} = AA' + BB'u + CC'u^2 \ldots\ldots + MM'u^{i-1} + NN'u^i + \text{etc.},$$

en y changeant x^{-n} en u, et prenant

$$N = \frac{(i-1)na - \frac{1}{2}(2\alpha-1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p}{-ina}M,$$

$$N' = \frac{(i-1)na - \frac{1}{2}(2\alpha-1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p}{inb-(2\alpha-1)b-e}M';$$

comparant ces valeurs avec celles du n° 1238, nous verrons que les lettres m, h, n et k, doivent être remplacées par

$$na, \quad -\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}p, \quad -na \quad \text{et} \quad 0,$$

et les lettres m', h', n' et k', par

$$na, \quad -\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}p, \quad nb \quad \text{et} \quad -(2\alpha-1)b-e.$$

En faisant $s=ut=x^{-n}t$, nous aurons

$$z=A(1+s)^{-\frac{h}{m}}=A(1+x^{-n}t)^{-\frac{h}{m}},$$
$$y=Cx^{\alpha}\int t^{\frac{k'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

les limites de l'intégrale relative à t étant déterminées par la condition qu'à l'une et à l'autre on ait

$$t^{\frac{k'}{m'}}(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}=0.$$

Si l'on permute entr'elles les lettres analogues, en prenant

nb pour n, $\quad -na$ pour n',

$-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}p$ pour h, $\quad -\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}p$ pour h',
$-(2\alpha-1)b-e$ pour k et 0 pour k',

l'expression de z se déduira de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{ds}=\frac{Ak-z(k-hs)}{s(n-ms)},$$

et l'on aura

$$z=Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds(n-ms)^{\frac{hn-km}{mn}-1},$$
$$y=Cx^{\alpha}\int t^{\frac{k'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

en observant qu'aux deux limites de l'intégrale relative à t,

$$t^{\frac{k'}{m'}}(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}=0.$$

1241. Éclaircissons ce qui précède en l'appliquant à l'équation particulière

$$x^2(1-x^2)d^2y-x(1+x^2)dx\,dy+x^2y\,dx^2=0.$$

En la comparant avec celle du n° 1239, nous aurons

$$a=1,\quad b=-1,\quad c=-1,\quad e=-1,\quad f=0,\quad g=1,\quad n=2,$$
$$\alpha(\alpha-1)-\alpha=0,\ \text{d'où}\ \alpha=0,\quad \alpha=2\quad \text{et}\quad q=\pm 2.$$

Avec ces données, et en ayant égard aux deux valeurs dont α est susceptible, nous obtiendrons, par les formules du numéro cité, les quatre résultats suivans :

$$\begin{cases} z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}}, & y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\mathrm{d}t(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}\dots\dots(1), \\ z=(1+x^2t)^{-1\mp\frac{1}{2}}, & y=Cx^2\int t^{\mp\frac{1}{2}}z\mathrm{d}t(1+t)^{\pm\frac{1}{2}}\dots\dots\dots(2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{-2A+z(2\pm s)}{2s(1+s)}, & y=C\int t^{\pm\frac{1}{2}-1}z\mathrm{d}t(1+t)^{\mp\frac{1}{2}}\dots\dots\dots(3), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{2A-z[2+(2\mp1)s]}{2s(1+s)}, & y=Cx^2\int t^{\pm\frac{1}{2}}z\mathrm{d}t(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}}\dots\dots(4). \end{cases}$$

Les valeurs de α relatives à la série descendante du n° 1240, étant $+1$ et -1, conduisent de même à ces quatre autres résultats :

$$\begin{cases} z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{\pm\frac{1}{2}}, & y=Cx\int t^{\pm\frac{1}{2}-1}z\mathrm{d}t(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}}\dots\dots(5), \\ z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{-1\pm\frac{1}{2}}, & y=\frac{C}{x}\int t^{\pm\frac{1}{2}}z\mathrm{d}t(1+t)^{\mp\frac{1}{2}}\dots\dots\dots\dots(6), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{-2A+z(2\mp s)}{2s(1+s)}, & y=Cx\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\mathrm{d}t(1+t)^{\pm\frac{1}{2}}\dots\dots(7), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{2A-z[2+(2\pm1)s]}{2s(1+s)}, & y=\frac{C}{x}\int t^{\mp\frac{1}{2}}z\mathrm{d}t(1+t)^{-1\pm\frac{1}{2}}\dots\dots(8). \end{cases}$$

Pour répandre sur le sujet qui nous occupe toute la clarté qu'on y peut desirer, il nous reste à montrer comment les valeurs de y satisfont à l'équation proposée. La chose est très-facile à l'égard de celles qui sont comprises dans la formule

$$z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}},\qquad y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\mathrm{d}t(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}:$$

en prenant le signe inférieur, par exemple, il vient

$$z=\sqrt{1+x^2t},\qquad y=C\int\frac{z\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}};$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{xt}{\sqrt{1+x^2t}},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C\int\frac{xt\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{t}{(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=C\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où il résulte

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+x^2y=C\int\frac{x^2dt(1-x^2t^2)}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}};$$

et l'intégrale du second membre étant

$$\frac{2Cx^2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+t)(1+x^2t)}},$$

s'évanouit lorsque $t=0$ et lorsque t est infini : c'est donc entre ces limites que doit être prise celle qui exprime la valeur de y.

Venons à l'une des formules où z n'est donné que par une équation différentielle; prenons la quatrième : en n'ayant égard qu'au signe inférieur, nous aurons à traiter l'équation

$$dz+\frac{zds(2+3s)}{2s(1+s)}=\frac{Ads}{s(1+s)}.$$

En la multipliant par $s\sqrt{1+s}$, et l'intégrant, nous en tirerons

$$sz\sqrt{1+s}=2A\sqrt{1+s}+B,\qquad z=\frac{2A}{s}+\frac{B}{s\sqrt{1+s}};$$

et en observant qu'on doit avoir $z=A$, lorsque $s=0$, nous trouverons $B=-2A$, d'où

$$z=\frac{2A(\sqrt{1+s}-1)}{s\sqrt{1+s}}=\frac{2A}{tx^2}-\frac{2A}{tx^2\sqrt{1+tx^2}},$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{4A}{tx^3}+\frac{2A(2+3tx^2)}{tx^3(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{12A}{tx^4}-\frac{6A(2+5tx^2+4t^2x^4)}{tx^4(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Substituant ces valeurs dans les suivantes,

$$y=C\int\frac{x^2zdt}{\sqrt{t(1+t)}},$$

$$\frac{dy}{dx}=2C\int\frac{xzdt}{\sqrt{t(1+t)}}+C\int\frac{x^2dt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2C\int\frac{zdt}{\sqrt{t(1+t)}}+4C\int\frac{xdt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{dz}{dx}+C\int\frac{x^2dt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{d^2z}{dx^2},$$

et les résultats dans l'équation proposée, nous obtiendrons

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+x^2y=$$
$$C\int\frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}}\left\{\frac{2Ax^2}{t}-\frac{2Ax^2(1+4tx^2+3t^2x^4)}{t(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}:$$

le second membre de celle-ci a pour intégrale l'expression

$$-\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}+\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{(1+tx^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}}=$$
$$\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{(1+tx)^{\frac{1}{2}}}-1\right),$$

qui devient nulle lorsque $t=-1$, et lorsque $t=0$ (*); c'est donc entre ces limites qu'il faut prendre l'intégrale qui exprime y. En y remplaçant z par sa valeur, elle prendra la forme

$$y=D\int\frac{dt}{t\sqrt{t(1+t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+tx^2}}\right).$$

Si l'on écrit $-t$, au lieu de t, et $D\sqrt{-1}$ au lieu de D, on aura

$$y=D\int\frac{dt}{t\sqrt{t(1-t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-tx^2}}\right),$$

les limites de l'intégrale étant $t=0$ et $t=1$.

1242. M. Laplace a montré le premier, que la sommation des séries par les intégrales définies, conduisait aussi à l'intégrale de l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2z}{dudv}+P\frac{dz}{du}+Q\frac{dz}{dv}+Mz=0\ldots\ldots\ldots\ldots(A),$$

dans quelques-uns des cas où elle échappe à la méthode du n° 766: c'est ce que nous allons faire voir, en suivant, à peu de chose près, la marche qu'il a tenue.

Il est visible que la série

(*) Pour s'en convaincre dans le dernier cas, il suffit de développer $\frac{1}{(1+tx)^{\frac{1}{2}}}$ suivant les puissances de t.

$$B\varphi(u) + C\varphi'(u) + D\varphi''(u) + \text{etc.}$$
$$+ B_1\psi(v) + C_1\psi'(v) + D_1\psi''(v) + \text{etc.},$$

prise dans le n° 784 pour la valeur de z, peut être remplacée par celle-ci :

$$Af\mathrm{d}u\varphi(u) + Bf\mathrm{d}uf\mathrm{d}u\varphi(u) + Cf\mathrm{d}uf\mathrm{d}uf\mathrm{d}u\varphi(u) + \text{etc.}$$
$$+ A_1f\mathrm{d}v\psi(v) + B_1f\mathrm{d}vf\mathrm{d}v\psi(v) + C_1f\mathrm{d}vf\mathrm{d}vf\mathrm{d}v\psi(v) + \text{etc.}$$

En réduisant les intégrales doubles, triples, etc., en intégrales simples, au moyen des formules du n° 484, on changera la première partie en

$$Af\mathrm{d}u\varphi(u)$$
$$+ \frac{B}{1}\{uf\mathrm{d}u\varphi(u) - fu\mathrm{d}u\varphi(u)\}$$
$$+ \frac{C}{1.2}\{u^2f\mathrm{d}u\varphi(u) - 2ufu\mathrm{d}u\varphi(u) + fu^2\mathrm{d}u\varphi(u)\}$$
$$+ \frac{D}{1.2.3}\{u^3f\mathrm{d}u\varphi(u) - 3u^2fu\mathrm{d}u\varphi(u) + 3ufu^2\mathrm{d}u\varphi(u) - fu^3\mathrm{d}u\varphi(u)\}$$
$$+ \text{etc.};$$

maintenant, afin de distinguer les facteurs où la variable u se trouve hors du signe intégral, de ceux où elle en est affectée, on écrira dans les derniers t à la place de u; on pourra après cela passer les autres sous le signe f, en observant de les regarder alors comme constans, et on aura par ce moyen

$$f\mathrm{d}t\varphi(t)\left\{A + \frac{B(u-t)}{1} + \frac{C(u-t)^2}{1.2} + \frac{D(u-t)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}$$
$$= f\mathrm{d}tT\varphi(t),$$

T désignant la somme de la série renfermée entre les accolades, et les intégrales étant prises depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$. On trouvera de même, que la seconde partie de la série proposée revient à

$$f\mathrm{d}t\psi(t)\left\{A_1 + \frac{B_1(v-t)}{1} + \frac{C_1(v-t)^2}{1.2} + \frac{D_1(v-t)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}$$
$$= f\mathrm{d}tT_1\psi(t),$$

en observant que les limites de l'intégrale sont ici $t=0$ et $t=v$; on aura donc

$$z = f\mathrm{d}tT\varphi(t) + f\mathrm{d}tT_1\psi(t).$$

Pour déterminer les fonctions T et T_1, il faut connaître d'abord les

relations que les coefficiens A, B, C, etc., A_1, B_1, C_1, etc., ont entr'eux, et qui s'obtiennent en substituant dans l'équation proposée, au lieu de z, la série

$$A\int du\varphi(u) + B\int du\int du\varphi(u) + C\int du\int du\int du\varphi(u) + \text{etc.}$$
$$+ A_1\int dv\psi(v) + B_1\int dv\int dv\psi(v) + C_1\int dv\int dv\int dv\psi(v) + \text{etc.}:$$

on aura, relativement à la fonction φ, les équations suivantes

$$\frac{dA}{dv} + PA = 0,$$
$$\frac{dB}{dv} + PB + \frac{d^2A}{dudv} + P\frac{dA}{du} + Q\frac{dA}{dv} + MA = 0,$$
$$\frac{dC}{dv} + PC + \frac{d^2B}{dudv} + P\frac{dB}{du} + Q\frac{dB}{dv} + MB = 0,$$
etc.;

et l'on en trouverait de semblables entre A_1, B_1, C_1, etc. Si l'on pouvait tirer de ces équations les valeurs des coefficiens, la question serait ramenée à sommer les séries

$$A + \frac{B(u-t)}{1} + \frac{C(u-t)^2}{1.2} + \frac{D(u-t)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$
$$A_1 + \frac{B_1(v-t)}{1} + \frac{C_1(v-t)^2}{1.2} + \frac{D_1(v-t)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

1243. Appliquons ces idées générales à différens cas particuliers, afin de faire mieux connaître le parti qu'on en peut tirer. Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dudv} + p\frac{dz}{du} + q\frac{dz}{dv} + mz = 0\ldots\ldots(a),$$

dans laquelle p, q, m, désignent des constantes. En traitant cette équation par la méthode du n° 766, on retrouve à chaque transformation la condition $pq - m = 0$, et il est par conséquent impossible d'obtenir par ce moyen l'intégrale de la proposée sous une forme finie, lorsque cette condition n'est pas remplie; mais les équations

$$\frac{dA}{dv} + pA = 0,$$
$$\frac{dB}{dv} + pB + \frac{d^2A}{dudv} + p\frac{dA}{du} + q\frac{dA}{dv} + mA = 0,$$
$$\frac{dC}{dv} + pC + \frac{d^2B}{dudv} + p\frac{dB}{du} + q\frac{dB}{dv} + mB = 0,$$
etc.,

qu'on obtient par la méthode précédente, conduisent facilement à une série. En effet, la première donne, par l'intégration, $A = e^{-pv}\alpha$, α étant une fonction arbitraire de u; et en la différentiant par rapport à u, on en tire

$$\frac{d^2A}{dv\,du} + p\frac{dA}{du} = 0,$$

ce qui réduit la suivante à

$$\frac{dB}{dv} + pB + q\frac{dA}{dv} + mA = 0.$$

Pour satisfaire à celle-ci, on fera $B = e^{-pv}\beta$, β étant une fonction inconnue de v et de u. La substitution des valeurs de B et de A donnera, après des réductions évidentes,

$$\frac{d\beta}{dv} - (pq - m)\alpha = 0;$$

en se bornant à satisfaire à cette équation, on aura seulement

$$\beta = (pq - m)\alpha v,$$

et l'on déduira de là

$$\frac{dB}{dv} = -e^{-pv}\alpha p(pq - m)v + e^{-pv}\alpha(pq - m),$$

$$q\frac{dB}{dv} + mB = -e^{-pv}\alpha v(pq - m)^2 + e^{-pv}\alpha q(pq - m),$$

$$\frac{dB}{dv} + pB = e^{-pv}\alpha(pq - m),\quad \frac{d^2B}{du\,dv} + p\frac{dB}{du} = e^{-pv}(pq - m)\frac{d\alpha}{du},$$

valeurs qui changeront l'équation d'où dépend C, en

$$\frac{dC}{dv} + pC + e^{-pv}\left\{(pq - m)\left(\frac{d\alpha}{du} + \alpha q\right) - (pq - m)^2\alpha v\right\} = 0.$$

Faisons d'abord $C = e^{-pv}\gamma$; l'équation précédente deviendra divisible par e^{-pv}, et nous aurons

$$\frac{d\gamma}{dv} + (pq - m)\left(\frac{d\alpha}{du} + \alpha q\right) - (pq - m)^2\alpha v = 0;$$

il ne faudra plus, pour ramener cette équation à la forme des autres, que supposer $\frac{d\alpha}{du} + \alpha q = 0$, ce qui déterminera la fonction arbitraire α, en donnant $\alpha = e^{-qu}$; puis il viendra

$$\frac{d\gamma}{dv} - (pq - m)^2\alpha v = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{(pq-m)^2\alpha v^2}{2}, \qquad C = e^{-pv}\alpha\,\frac{(pq-m)^2v^2}{1.2}.$$

L'équation en D étant

$$\frac{dD}{dv} + pD + \frac{d^2C}{du\,dv} + p\,\frac{dC}{du} + q\,\frac{dC}{dv} + mC = 0,$$

se réduirait, au moyen des valeurs de C, de α, et en supposant... $D = e^{-pv}\delta$, à

$$\frac{d\delta}{dv} - \alpha\,\frac{(pq-m)^3v^2}{1.2} = 0;$$

l'on aurait par conséquent

$$\delta = \frac{(pq-m)^3\alpha v^3}{1.2.3}, \qquad D = e^{-pv}\alpha\,\frac{(pq-m)^3v^3}{1.2.3}.$$

Il suit des calculs ci-dessus, qu'on emploierait aussi à la recherche des coefficiens A_1, B_1, C_1, etc., que

$$\left.\begin{array}{l} A = e^{-pv-qu}, \\ B = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)v}{1}, \\ C = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)^2v^2}{1.2}, \\ D = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)^3v^3}{1.2.3}, \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\ \text{et}\ \left\{\begin{array}{l} A_1 = e^{-pv-qu}, \\ B_1 = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)u}{1}, \\ C_1 = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)^2u^2}{1.2}, \\ D_1 = e^{-pv-qu}\,\dfrac{(pq-m)^3u^3}{1.2.3}, \\ \text{etc.,} \end{array}\right.$$

et que les séries qu'il faut sommer sont

$$T = e^{-pv-qu}\left\{1 + \frac{nv(u-t)}{1.1} + \frac{n^2v^2(u-t)^2}{1.2.1.2} + \frac{n^3v^3(u-t)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}\right\},$$

$$T_1 = e^{-pv-qu}\left\{1 + \frac{nu(v-t)}{1.1} + \frac{n^2u^2(v-t)^2}{1.2.1.2} + \frac{n^3u^3(v-t)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}\right\},$$

lorsqu'on fait $pq - m = n$.

Si nous désignons par y la somme de l'une quelconque des séries comprises entre les accolades, y sera une fonction de $v(u-t)$, pour la première série, et de $u(v-t)$ pour la seconde, mais de la même forme dans l'un et l'autre cas; et la fonction $e^{-pv-qu}y$ sera une valeur particulière de z. En faisant, pour abréger, $v(u-t) = \theta$, nous aurons

$$\frac{dz}{du} = -\,qe^{-pv-qu}y + e^{-pv-qu}\frac{dy}{d\theta}\,\frac{d\theta}{du},$$

$$\frac{dz}{dv} = -\,pe^{-pv-qu}y + e^{-pv-qu}\frac{dy}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dv};$$

mais comme $\frac{d\theta}{du} = v$, $\frac{d\theta}{dv} = u - t$, il viendra

$$\frac{dz}{du} = e^{-pv-qu}\left\{-qy + v\frac{dy}{d\theta}\right\},$$
$$\frac{dz}{dv} = e^{-pv-qu}\left\{-py + (u-t)\frac{dy}{d\theta}\right\},$$
$$\frac{d^2z}{dudv} = e^{-pv-qu}\left\{pqy - [q(u-t)+pv-1]\frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2}\right\}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation proposée, la changera en

$$\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} + \frac{dy}{d\theta} + (m-pq)y = 0 \ldots\ldots\ldots (b);$$

les deux constantes qui entrent dans la valeur complète de y se déterminent par la condition que $y = 1$ et $\frac{dy}{d\theta} = pq - m$, lorsque $\theta = 0$, condition qui résulte des deux premiers termes de la série dont y est la somme. La somme de la seconde série se tirera de l'expression de y, en y supposant $\theta = u(v-t)$; et prenant y_1 pour représenter y dans ce nouvel état, la valeur complète de z sera

$$z = e^{-pv-qu}\{\int y\,dt\varphi(t) + \int y_1 dt\psi(t)\},$$

la première intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$, et la seconde depuis $t=0$ jusqu'à $t=v$.

Si l'on voulait s'assurer que ce résultat satisfait à l'équation proposée, il faudrait observer qu'en général, lorsqu'une intégrale $\int T dt$ doit être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$, t doit être considéré comme une fonction implicite de u, et que l'on doit avoir par conséquent (11)

$$\frac{d(\int T dt)}{du} = \frac{d.\int T dt}{du} + \frac{d.\int T dt}{dt}\cdot\frac{dt}{du},$$

or

$$\frac{d.\int T dt}{du} = \int\frac{dT}{du}dt \ (546), \quad \frac{d\int T dt}{dt} = T \quad \text{et} \quad \frac{dt}{du} = 1,$$

lorsque $t=u$; ainsi en représentant par U ce que devient alors T, on aurait

$$\frac{d(\int T dt)}{du} = \int\frac{dT}{du}dt + U.$$

1244. M. Laplace applique encore sa méthode à l'équation

$$\frac{d^2z}{dudv} + \frac{p}{u+v}\frac{dz}{du} + \frac{q}{u+v}\frac{dz}{dv} + \frac{m}{(u+v)^2}z = 0 \ldots\ldots (a),$$

dont nous nous sommes occupés dans le n° 768; on satisfait aux équations qui déterminent les coefficiens A, B, C, etc., en supposant

$$\begin{array}{ll} A = (u+v)^{-p}, & A_1 = (u+v)^{-q}, \\ B = \alpha A(u+v)^{-1}, & B_1 = \alpha_1 A_1(u+v)^{-1}, \\ C = \beta B(u+v)^{-1}, & C_1 = \beta_1 B_1(u+v)^{-1}, \\ \text{etc.}, & \text{etc.}, \end{array}$$

α, β, etc., α_1, β_1, etc., étant des constantes telles que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = p(1-q)+m, \\ 2\beta = (p+1)(2-q)+m, \\ 3\gamma = (p+2)(3-q)+m, \\ \text{etc.}, \end{array}\right\}\begin{array}{l} \alpha_1 = q(1-p)+m, \\ 2\beta_1 = (q+1)(2-p)+m, \\ 3\gamma_1 = (q+2)(3-p)+m, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Les termes de ces suites, correspondans à l'indice quelconque i, seront

$$(p+i-1)(i-q)+m, \quad (q+i-1)(i-p)+m,$$

et l'on aura

$$T = (u+v)^{-p}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\,\frac{u-t}{u+v}+\frac{\alpha\beta}{1.2}\left(\frac{u-t}{u+v}\right)^2+\text{etc.}\right\},$$

$$T_1 = (u+v)^{-q}\left\{1+\frac{\alpha_1}{1}\,\frac{v-t}{u+v}+\frac{\alpha_1\beta_1}{1.2}\left(\frac{v-t}{u+v}\right)^2+\text{etc.}\right\}.$$

On fera $T=(u+v)^{-p}y$, en considérant y comme une fonction de la quantité $\frac{u-t}{u+v}$ que l'on représentera par θ, et l'on obtiendra l'équation en y, comme dans le numéro précédent, par la substitution des fonctions

$$T,\ \frac{dT}{du},\ \frac{dT}{dv},\ \frac{d^2T}{dudv},\ \text{au lieu de } z,\ \frac{dz}{du},\ \frac{dz}{dv},\ \frac{d^2z}{dudv},$$

qui donnera

$$\theta(1-\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2}+\{\theta(q-p-2)+1\}\frac{dy}{d\theta}+(pq-p-m)y=0\ldots.(b).$$

Pour former T_1, il suffira de changer dans cette équation p en q, q en p et y en y_1; l'on aura $T_1=(u+v)^{-q}y_1$; les constantes des expressions de y et de y_1 se détermineront, comme précédemment, par le moyen des deux premiers termes des séries T et T_1: enfin on obtiendra

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\int y\,dt\,\varphi(t)+\frac{1}{(u+v)^q}\int y_1\,dt\,\psi(t).$$

L'une des fonctions y et y_1 peut aussi se déduire immédiatement de l'autre; car l'équation (b), transformée d'après ce qui a été dit plus haut, se change en

$$\theta(1-\theta)\frac{d^2y_1}{d\theta^2}+\{\theta(p-q-2)+1\}\frac{dy_1}{d\theta}+\{pq-q-m\}y_1=0\ldots.(b'),$$

et redevient (b) lorsqu'on fait $y_1=(1-\theta)^{p-q}y$. La détermination des constantes arbitraires de y ne change point cette relation, car lorsque $\theta=0$, on doit avoir

$$y=1,\quad \frac{dy}{d\theta}=p-pq+m,\quad y_1=1,\quad \frac{dy_1}{d\theta}=q-pq+m,$$

et les deux dernières de ces valeurs résultent aussi de l'équation.... $y_1=(1-\theta)^{p-q}y$, quand on la combine avec les premières. Maintenant, puisque $(1-\theta)^{p-q}=\left(1-\frac{u-t}{u+v}\right)^{p-q}$, on aura

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\{\int y\,dt\varphi(t)+\int(v+t)^{p-q}y\,dt\psi(t)\},$$

1245. Il est bon de remarquer que l'on peut changer les limites des intégrales. Si à t l'on substitue ut dans la première, et vt dans la seconde, et que l'on désigne par y' et y'', ce que devient alors y, on aura

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\{\int y'u\,dt\varphi(ut)+\int(v+vt)^{p-q}y''v\,dt\psi(vt)\},$$

les intégrales devant être prises toutes deux entre les limites $t=0$ et $t=1$.

Si l'on représente par K et K_1 les valeurs des intégrales $\int y\,dt\varphi(t)$ et $\int y_1dt\psi(t)$, prises depuis $t=0$ jusqu'à t infini, les quantités

$$K-\int y\,dt\varphi(t)\quad\text{et}\quad K_1-\int y_1dt\psi(t),$$

seront les valeurs des mêmes intégrales, à partir de t infini; mettant au lieu de t, dans la première, $u+t'$, et dans la seconde, $v+t'$, puis désignant par Y et par Y_1, ce que deviennent y et y_1, on aura

$$\begin{aligned}&\int y\,dt\varphi(t)+\int y_1dt\psi(t)\\ &=K+K_1-\int Y\,dt'\varphi(u+t')-\int Y_1dt'\psi(v+t').\end{aligned}$$

Les limites des intégrales du second membre seront visiblement t' infini et $t'=0$, lorsque celles du premier seront $t=0$ et $t=u$, $t=0$ et $t=v$; puis comprenant la quantité constante $K+K_1$ dans les fonc-

tions arbitraires, et changeant le signe des intégrales, on pourra, à une expression de la forme

$$z = \int y dt \varphi(t) + \int y_1 dt \psi(t),$$

dans laquelle les intégrales sont prises, l'une entre $t=0$ et $t=u$, et l'autre entre $t=0$ et $t=v$, substituer celle-ci :

$$z = \int Y dt' \varphi(u+t') + \int Y_1 dt' \psi(v+t'),$$

dont les intégrales seront prises depuis t' infini jusqu'à $t'=0$.

1246. Ce qui précède renferme la substance de ce que contient le Mémoire de M. Laplace, relativement à l'intégration des équations différentielles partielles par des intégrales définies, et se lie parfaitement avec les travaux d'Euler sur les équations différentielles à deux variables, surtout lorsqu'on rapproche les nos 783 et 1238. En faisant dépendre de l'équation (b) la sommation des séries T et T_1, et réduisant par là l'intégration de l'équation différentielle partielle (a), à celle d'une équation différentielle à deux variables, M. Laplace a réellement ramené l'intégrale de la première à ne dépendre uniquement que des intégrales définies, toutes les fois que la seconde sera susceptible d'être traitée par la méthode d'Euler, ou que les séries T et T_1 seront analogues à celles du n° 1238.

La méthode par laquelle M. Parseval somme la suite

$$AA' + BB' + CC' + \text{etc. } (1152),$$

conduit aussi à un résultat semblable; car il est visible que la série

$$1 + \frac{nv(u-t)}{1.1} + \frac{n^2v^2(u-t)^2}{1.2.1.2} + \frac{n^3v^3(u-t)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.},$$

à laquelle nous sommes parvenus dans le n° 1243, étant mise sous la forme

$$1 + \frac{\alpha^2}{1.1} + \frac{\alpha^4}{1.2.1.2} + \frac{\alpha^6}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.},$$

en faisant $nv(u-t) = \alpha^2$, résulte des deux séries

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha^2}{1.2}x^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} = e^{\alpha x},$$

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{1}{x} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{1}{x^3} + \text{etc.} = e^{\alpha\frac{1}{x}},$$

multipliées terme à terme; et on en trouvera par conséquent la somme

en substituant successivement $\cos s + \sqrt{-1}\sin s$ et $\cos s - \sqrt{-1}\sin s$, à la place de x daus la fonction

$$e^{\alpha x} \times e^{\alpha\frac{1}{x}} = e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)};$$

on aura par là

$$e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{2\alpha\cos s^2 + 2\alpha\sqrt{-1}\cos s\sin s}{\cos s + \sqrt{-1}\sin s}},$$

$$e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{2\alpha\cos s^2 - 2\alpha\sqrt{-1}\cos s\sin s}{\cos s - \sqrt{-1}\sin s}};$$

multipliant le numérateur et le dénominateur de l'exposant, dans la première formule par $\cos s - \sqrt{-1}\sin s$, et dans la seconde par $\cos s + \sqrt{-1}\sin s$, on verra facilement qu'elles se réduisent toutes deux à $e^{2\alpha\cos s}$, d'où l'on conclura que la série

$$1 + \frac{\alpha^2}{1.1} + \frac{\alpha^4}{1.2.1.2} + \frac{\alpha^6}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.} = \frac{1}{\pi}\int e^{2\alpha\cos s}\mathrm{d}s,$$

l'intégrale étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=\pi$; et l'on passera à $T = \frac{1}{\pi}e^{-pv-qu}\int e^{2\alpha\cos s}\mathrm{d}s$. Cette expression deviendra celle de T_1, lorsqu'on y supposera $nu(v-t) = \alpha^2$; et on aura eufin

$$z = \frac{1}{\pi}e^{-pv-qu}\left\{\int\int e^{2\cos s\sqrt{nv(u-t)}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\varphi(t)\right.$$

$$\left. + \int\int e^{2\cos s\sqrt{nu(v-t)}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\psi(t)\right\}.$$

M. Parseval avait aussi appliqué la méthode précédente à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = a^2\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}\right),$$

qui exprime les conditious du son, lorsqu'on donne deux dimensions à l'air; mais il a repris ce sujet avec plus d'étendue et d'une autre manière, dans le tome premier des *Mémoires présentés à l'Institut par divers savans* (p. 379), et nous y renverrons le lecteur.

1247. Les intégrales en séries de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y},$$

traitée dans le n° 781, peuvent être sommées par des intégrales définies, ainsi que M. Laplace l'a fait voir dans le XVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

La série

$$z = \varphi(x) + \frac{y}{1}\varphi''(x) + \frac{y^2}{1.2}\varphi^{\text{iv}}(x) + \frac{y^3}{1.2.3}\varphi^{\text{vi}}(x) + \text{etc.},$$

dans laquelle φ'', φ^{iv}, φ^{vi}, etc., désignent les coefficiens différentiels des ordres pairs de la fonction φ, resulte de

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt\varphi(x+2t\sqrt{y}),$$

en y développant $\varphi(x+2t\sqrt{y})$ suivant les puissances de t, par le théorème de Taylor; car il vient

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)\int e^{-t^2}dt + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1}\varphi'(x)\int e^{-t^2}2tdt + \frac{y^{\frac{2}{2}}}{1.2}\varphi''(x)\int e^{-t^2}4t^2dt$$
$$+ \frac{y^{\frac{3}{2}}}{1.2.3}\varphi'''(x)\int e^{-t^2}8t^3dt + \frac{y^{\frac{4}{2}}}{1.2.3.4}\varphi^{\text{iv}}(x)\int e^{-t^2}16t^4dt + \text{etc.};$$

et en observant qu'entre les limites $t = -$ infini, $t = +$ infini,

$$\int e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi},\quad \int e^{-t^2}t^{2r-1}dt = 0,\quad \int e^{-t^2}t^{2r}dt = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)\sqrt{\pi}}{2^r} \text{ (1205)},$$

on retombe sur la série rapportée plus haut : on a par conséquent... $z = \int e^{-t^2}dt\varphi(x+2t\sqrt{y})$, en comprenant dans la fonction arbitraire, le diviseur $\sqrt{\pi}$.

La différentiation vérifie aisément cette nouvelle intégrale : on a d'abord

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \int e^{-t^2}dt\varphi''(x+2t\sqrt{y}),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}\int e^{-t^2}tdt\varphi'(x+2t\sqrt{y})$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-t^2}\varphi'(x+2t\sqrt{y}) + \int e^{-t^2}dt\varphi''(x+2t\sqrt{y}),$$

en intégrant par parties, par rapport au facteur $e^{-t^2}tdt$; et si l'on suppose la fonction $\varphi'(x+2t\sqrt{y})$ telle, que son produit par e^{-t^2} demeure nul lorsque $t =$ infini, $\frac{dz}{dy}$ prendra la même valeur que $\frac{d^2z}{dx^2}$.

M. Laplace montre encore que l'expression de z avec deux fonctions arbitraires φ et ψ (781) revient à

$$z = \int e^{-t^2}dt\{\Gamma(x+2t\sqrt{y}) + \Pi(x+2t\sqrt{y})\},$$

en distinguant Γ et Π par la condition que l'une renferme seulement des puissances paires de la quantité qu'elle affecte, et l'autre des puis-

sances impaires, ce qui revient, au fond, à l'intégrale exprimée ci-dessus par la fonction φ.

1248. On a vu, dans le n° 778, qu'Euler avait satisfait à des équations différentielles partielles, par des séries d'exponentielles en partie arbitraires et multipliées par des coefficiens constans et arbitraires; on peut remplacer ces séries par des intégrales dont les limites soient arbitraires.

Si, dans l'équation du numéro cité,

$$\frac{d^2z}{dxdy} = az, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dxdy} - az = 0,$$

on fait $z = \int e^{nx+py}\varphi(n)dn$, on la change en

$$\int e^{nx+py}\varphi(n)dn[np-a] = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{a}{n},$$

et par conséquent

$$z = \int e^{nx+\frac{ay}{n}}\varphi(n)dn,$$

la fonction φ demeurant entièrement arbitraire, ainsi que les limites de la variable n.

Cette forme n'est qu'une dérivation très-simple de la série trouvée par Euler; car, en regardant une intégrale comme la somme des différentielles, on a

$$z = e^{n_0x+\frac{ay}{n_0}}\varphi(n_0)dn + e^{n_1x+\frac{ay}{n_1}}\varphi(n_1)dn + \text{etc.},$$

ce qui n'est autre chose que la somme d'une infinité de valeurs particulières de z, multipliées par des coefficiens constans infiniment petits.

Il est visible que le même procédé peut s'appliquer à toutes les équations du premier degré, de quelqu'ordre qu'elles soient, pourvu qu'elles n'aient point de termes indépendans de z ou de ses coefficiens différentiels. Une modification bien facile à trouver, suffit pour le rendre applicable aux équations du même genre qui contiennent plus de trois variables.

Nous prendrons pour exemple l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0,$$

et nous y satisferons au moyen de l'expression

$$z = \iint e^{mt+nx+py}\varphi(n, p)dndp,$$

qui conduit à

$$\iint e^{mt+nx+py}\varphi(n,\,p)\mathrm{d}n\mathrm{d}p\{m^2-a^2(n^2+p^2)\}=0,$$

d'où $m^2=a^2(n^2+p^2)$, et par conséquent

$$\begin{aligned} z = & \iint e^{at\sqrt{n^2+p^2}+nx+py}\varphi(n,\,p)\mathrm{d}n\mathrm{d}p \\ & + \iint e^{-at\sqrt{n^2+p^2}+nx+py}\varphi(n,\,p)\mathrm{d}n\mathrm{d}p. \end{aligned}$$

1249. Les valeurs

$$z=e^{-q^2y}\cos qx, \qquad z=e^{-q^2y}\sin qx,$$

satisfaisant à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y},$$

quelle que soit la quantité q, on en conclut, d'après ce qui précède,

$$z=\int e^{-q^2y}\mathrm{d}q\varphi(q)\cos qx + \int e^{-q^2y}\mathrm{d}q\psi(q)\sin qx.$$

Cette expression a, sur les séries d'exponentielles multipliées par des coefficiens constans, l'avantage de la continuité, qui permet de déterminer les fonctions arbitraires $\varphi(q)$ et $\psi(q)$, de manière que, pour un état initial, répondant à $y=0$, z devienne $F(x)$, F désignant une fonction donnée. Telle est l'importante question que M. Fourier s'est proposée, et qu'il a résolue complètement dans son premier Mémoire sur la propagation de la chaleur, présenté à l'Institut le 21 décembre 1807, et mentionné dans le *Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, mars 1808, p. 113. Ses recherches, qui doivent paraître bientôt, dans la Pièce que l'Institut a couronnée en 1810, l'ont conduit à un théorème très-remarquable que je vais indiquer, d'après une note qu'il a eu la complaisance de me donner.

La supposition de $y=0$ réduit l'expression de z à

$$\int \mathrm{d}q\varphi(q)\cos qx + \int \mathrm{d}q\psi(q)\sin qx,$$

dans laquelle il faut observer que le premier terme demeurant le même, lorsqu'on y change x en $-x$, ne peut représenter qu'une fonction de x ayant ce caractère, tandis que le second terme, qui change alors de signe, en donnera une du caractère contraire. Or, une fonction quelconque de x peut toujours se décomposer en deux autres qui remplissent séparément ces conditions; car si l'on désigne par $P(x)$ et $Q(x)$

des fonctions telles que

$$P(-x) = P(x), \quad Q(-x) = -Q(x),$$

et qu'ensuite on pose

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = P(x) + Q(x), \\ F(-x) = P(x) - Q(x), \end{array}\right\} \text{ il vient } \left\{\begin{array}{l} P(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(-x), \\ Q(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}F(-x): \end{array}\right.$$

on aura donc

$$F(x) = \int dq\varphi(q)\cos qx + \int dq\psi(q)\sin qx,$$

si l'on peut déterminer φ et ψ de sorte que

$$\int dq\varphi(q)\cos qx = P(x), \qquad \int dq\psi(q)\sin qx = Q(x);$$

et c'est à quoi l'on parviendra en prenant

$$\varphi(q) = \frac{1}{\pi}\int d\alpha P(\alpha)\cos q\alpha, \qquad \psi(q) = \frac{1}{\pi}\int d\alpha Q(\alpha)\sin q\alpha,$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et les limites de α étant o et l'infini.

Voilà le théorème annoncé ci-dessus. En mettant dans $P(x)$ et dans $Q(x)$ les valeurs de $\varphi(q)$ et de $\psi(q)$, on en conclut aussi

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\int dq\cos qx\int d\alpha P(\alpha)\cos q\alpha, \quad Q(x) = \frac{1}{\pi}\int dq\sin qx\int d\alpha Q(\alpha)\sin q\alpha.$$

Ce théorème établit entre les fonctions P et φ, Q et ψ, une liaison que, dans le *Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique* (ann. 1817, p. 121), M. Cauchy a nommée *loi de réciprocité*. Dans le même Journal (année 1815, p. 165), et dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1816, M. Poisson résout la même question, par des formules analogues aux précédentes.

Cette transformation, à laquelle on doit déjà des résultats importans dans la théorie de la chaleur et dans celle des ondes, paraît aussi devoir enrichir celle des intégrales définies, de déterminations nouvelles; et, ce qui est sur-tout digne de remarque, c'est qu'elle transporte à une fonction quelconque $F(x)$, au moyen des fonctions $P(x)$ et $Q(x)$, les propriétés des fonctions spéciales et élémentaires $\cos qx$ et $\sin qx$ par lesquelles, non-seulement la première, mais ses différentielles, ses

différences, ses intégrales, soit aux différentielles, soit aux différences,

$$\frac{d^nF(x)}{dx^n}, \quad \int^n dx^n F(x), \quad \Delta^n F(x) \quad \text{et} \quad \Sigma^n F(x),$$

sont très-simplement exprimées.

Il faut observer aussi que par cette même transformation, on obtient séparément la partie réelle et la partie imaginaire, résultantes de la substitution de $\mu + \nu\sqrt{-1}$ au lieu de x, dans $F(x)$, puisqu'il suffit de la faire dans les facteurs $\cos qx$ et $\sin qx$, ce qui s'effectue aisément par le n° 41 de l'Introduction.

Enfin, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

qui, par la méthode du n° 753, se présente sous la forme

$$z = \varphi(x+y\sqrt{-1}) + \psi(x-y\sqrt{-1}),$$

peut être transformée sur-le-champ en termes réels et finis. Il est donc à desirer que M. Fourier fasse bientôt connaître la démonstration du théorème sur lequel repose une transformation aussi utile.

1250. L'équation $\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dx^2}$ (1247), quand on y met my au lieu de y, m désignant une constante, devient

$$\frac{dz}{mdy} = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dy} = m\frac{d^2z}{dx^2};$$

et dérivant alors de son intégrale celle de l'équation à quatre variables

$$\frac{dz}{dt} = m\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

M. Poisson, vient d'en déduire l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0 \ldots\ldots (2),$$

contenant les conditions suivant lesquelles vibrent les surfaces élastiques. (*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, année 1818, p. 125.)

En changeant y en my et t en α, dans l'expression de z obtenue pour la première de ces équations, on a

$$z = \int e^{-\alpha^2}\varphi(x + 2\alpha\sqrt{my})d\alpha,$$

l'intégrale prise entre les limites $\alpha = -$ infini et $\alpha = +$ infini; l'analogie indique pour une variable de plus, la forme

$$z = \iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}\varphi(x + 2\alpha\sqrt{mt},\ \ y + 2\beta\sqrt{mt})d\alpha d\beta,$$

qui, en effet, vérifie l'équation (1).

Cela posé, si l'on différentie l'équation (1) par rapport à t, on obtiendra

$$\frac{d^2z}{dt^2} = m\left(\frac{d^3z}{dx^2dt} + \frac{d^3z}{dy^2dt}\right) = m\left(\frac{d^2\frac{dz}{dt}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{dz}{dt}}{dy^2}\right),$$

d'où chassant $\frac{dz}{dt}$, par le moyen de l'équation (1), il en résultera

$$\frac{d^2z}{dt^2} = m^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right),$$

qui deviendra l'équation (2), si l'on pose $m^2 = -a^2$.

Substituant donc successivement chacune des valeurs

$$m = a\sqrt{-1}, \quad m = -a\sqrt{-1},$$

dans l'expression de z indiquée plus haut, on en déduira deux autres qui satisferont à l'équation (2); et comme elle est du premier degré, on y satisfera encore avec leur somme, en sorte que

$$\left.\begin{aligned} z = &\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}\varphi(x+2\alpha\sqrt{at\sqrt{-1}},\ \ y+2\beta\sqrt{at\sqrt{-1}})d\alpha d\beta \\ + &\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}\psi(x+2\alpha\sqrt{-at\sqrt{-1}},\ \ y+2\beta\sqrt{-at\sqrt{-1}})d\alpha d\beta \end{aligned}\right\},$$

sera l'intégrale de l'équation (2) avec deux fonctions arbitraires, et par conséquent générale, suivant la remarque du n° 781.

M. Poisson détermine ensuite les fonctions arbitraires φ et ψ, par les conditions qu'à $t = 0$ réponde

$$z = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

quels que soient x et y. La première lui donne

$$\mathrm{f}(x,y)=[\varphi(x,y)+\psi(x,y)]\int e^{-\alpha^2}d\alpha.\int e^{-\beta^2}d\beta\ldots\ldots(3).$$

Pour remplir la seconde, il conçoit qu'on développe, suivant les puissances de t, la valeur générale de z. Il n'est pas difficile de voir que ce développement sera de la forme

$$\left.\begin{aligned} z=\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha d\beta\left[\varphi(x,y)+\frac{d\varphi}{dt}\frac{t}{1}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\right]\\ +\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha d\beta\left[\psi(x,y)+\frac{d\psi}{dt}\frac{t}{1}+\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\right]\end{aligned}\right\},$$

t n'entrant plus dans les fonctions φ et ψ, puisqu'il faut faire $t=0$, après les différentiations : ainsi on aura

$$\frac{dz}{dt}=\iint e^{-\alpha^2}e^{-\beta^2}d\alpha d\beta\left\{\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\right)+\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)\frac{t}{1}+\text{etc.}\right\},$$

expression qui s'anéantira indépendamment de x et de y, quand $t=0$, si $\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{d\psi}{dt}$; or, c'est ce qui arrivera si l'on prend $\varphi(x,y)=\psi(x,y)$. Par ce moyen, l'équation (3), en y mettant les valeurs des intégrales indiquées (1167), devient

$$\mathrm{f}(x,y)=2\pi\varphi(x,y),\quad \text{d'où}\quad \varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{f}(x,y)=\psi(x,y).$$

En introduisant la fonction f à la place des fonctions φ et ψ, on simplifie déjà la valeur de z, qui est entièrement déterminée; mais on l'abrège encore, et on chasse les imaginaires, en remplaçant α et β par

$$\frac{\alpha}{\sqrt{+\sqrt{-1}}},\quad \frac{\beta}{\sqrt{+\sqrt{-1}}},$$

sous la première intégrale, et par

$$\frac{\alpha}{\sqrt{-\sqrt{-1}}},\quad \frac{\beta}{\sqrt{-\sqrt{-1}}},$$

sous la seconde : les limites restent les mêmes, les exponentielles imaginaires s'expriment en sinus, et M. Poisson trouve ainsi

$$z=\frac{1}{\pi}\iint \sin(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{f}(x+2\alpha\sqrt{at},\,y+2\beta\sqrt{at})d\alpha d\beta,$$

qu'il ramène à la forme

$$z=\frac{1}{4a\pi t}\iint \mathrm{f}(p,q)\sin\left[\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{4at}\right]dp\,dq,$$

en faisant

$$x+2\alpha\sqrt{at}=p,\qquad y+2\beta\sqrt{at}=q,$$

ces nouvelles variables ayant encore pour limites —infini et +infini.

M. Poisson termine sa note en remarquant que la dernière expression de z coïncide avec celle que M. Fourier, dans son Mémoire sur les vibrations des plaques élastiques (*Bulletin des Sciences*, année 1818, p. 129), a obtenue par la sommation des séries d'exponentielles qui satisfont à l'équation (2), ce qui confirme la généralité des intégrales en séries d'exponentielles à coefficiens et exposans indéterminés.

Applications des formules $\int e^{-ux}v\,du$, $\int u^x v\,du$, etc. à l'intégration des équations aux différences et différentielles.

1251. Dans le Mémoire cité au nº 1218, et aussi dans sa *Théorie analytique des Probabilités*, M. Laplace, après avoir obtenu des séries qui donnent les valeurs approchées des intégrales dans lesquelles entrent comme exposans des nombres très-grands, développe une méthode pour ramener à des intégrales définies les fonctions déterminées par des équations aux différences. Voici l'esprit de cette méthode.

Soit l'équation du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences

$$X = Ay_x + B\Delta y_x + C\Delta^2 y_x + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (1),$$

dans laquelle A, B, C, etc., représentent des fonctions rationnelles et entières de la variable x, et peuvent être mis par conséquent sous l'une ou l'autre de ces formes (984) :

$$A = a + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.} \qquad A = a + a_1[x]^1 + a_2[x]^2 + \text{etc.},$$

$$B = b + b_1 x + b_2 x^2 + \text{etc.} \qquad B = b + b_1[x]^1 + b_2[x]^2 + \text{etc},$$

etc. etc.

Dans le premier cas, on fera $y_x = \int e^{-ux}v\,du$; on supposera que les limites de l'intégrale sont indépendantes de x, v étant une fonction de u seul; et il en résultera

$$\Delta y_x = \int e^{-ux}(e^{-u} - 1)v\,du, \qquad \Delta^2 y_x = \int e^{-ux}(e^{-u} - 1)^2 v\,du, \qquad \text{etc.}$$

Si, pour abréger, on fait $e^{-ux} = \alpha$, on aura

$$xe^{-ux} = -\frac{d\alpha}{du}, \qquad x^2 e^{-ux} = \frac{d^2\alpha}{du^2}, \qquad x^3 e^{-ux} = -\frac{d^3\alpha}{du^3}, \qquad \text{etc.};$$

et substituant dans l'équation (1), ces expressions ainsi que les précédentes, on obtiendra

$$X = \int v\mathrm{d}u \left\{\begin{array}{l} \qquad \alpha[a + b\,(e^{-u} - 1) + c\,(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}\,[a_1 + b_1(e^{-u} - 1) + c_1(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}u^2}\,[a_2 + b_2(e^{-u} - 1) + c_2(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ - \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Dans le second cas, on fera $y_x = \int u^x v\mathrm{d}u$, $u^x = \alpha$; on aura, par conséquent,

$$\Delta y_x = \int\alpha(u-1)v\mathrm{d}u, \qquad \Delta^2 y_x = \int\alpha(u-1)^2 v\mathrm{d}u, \qquad \text{etc.},$$

$$\overset{1}{[x]}u^x = u\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}, \qquad \overset{2}{[x]}u^x = u^2\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}u^2}, \qquad \text{etc.},$$

$$X = \int v\mathrm{d}u \left\{\begin{array}{l} \qquad \alpha[a + b\,(u-1) + c\,(u-1)^2 + \text{etc.}] \\ + u\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}\,[a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2 + \text{etc.}] \\ + u^2\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}u^2}\,[a_2 + b_2(u-1) + c_2(u-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Ce résultat et le précédent sont compris dans la formule

$$X = \int v\mathrm{d}u \left\{M\alpha + N\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u} + P\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}u^2} + Q\frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}u^3} + \text{etc.}\right\},$$

M, N, P, Q, etc., étant des fonctions de u seul. Comme ce n'est que dans α que se trouve la variable x, on peut la faire sortir entièrement du signe $\int$, en intégrant par parties (394), et l'on aura

$$\begin{array}{rl} X = & \int\alpha\mathrm{d}u\left\{Mv - \frac{\mathrm{d}(Nv)}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2(Pv)}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}^3(Qv)}{\mathrm{d}u^3} + \text{etc.}\right\} \\ + \mathit{const.} + & \alpha\left\{Nv - \frac{\mathrm{d}(Pv)}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2(Qv)}{\mathrm{d}u^2} - \text{etc.}\right\} \\ + & \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}\left\{Pv - \frac{\mathrm{d}(Qv)}{\mathrm{d}u} + \text{etc.}\right\} \\ + & \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}u^2}\left\{Qv - \text{etc.}\right\} \\ + & \text{etc.} \end{array}$$

Maintenant, puisque la fonction v est indépendante de x, il faut que la partie soumise au signe d'intégration, dans l'équation ci-dessus, soit nulle par elle-même, ce qui fournit l'équation

$$Mv - \frac{\mathrm{d}(Nv)}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2(Pv)}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}^3(Qv)}{\mathrm{d}u^3} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

pour déterminer la fonction v; et il restera ensuite à satisfaire à l'équation

$$\left.\begin{array}{l} X = const. + \alpha \left\{Nv - \frac{d(Pv)}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2} - \text{etc.}\right\} \\ + \frac{d\alpha}{du}\left\{Pv - \frac{d(Qv)}{du} + \text{etc.}\right\} \\ + \frac{d^2\alpha}{du^2}\left\{Qv - \text{etc.}\right\} \\ + \text{etc.}, \end{array}\right\} \ldots\ldots(3)$$

qui fera connaître les limites de l'intégrale $\int \alpha v du$.

Il est à remarquer que l'équation (2) est précisément celle qui exprime les conditions d'intégrabilité de la fonction différentielle

$$v du \left\{M\alpha + N\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d^2\alpha}{du^2} + Q\frac{d^3\alpha}{du^3} + \text{etc.}\right\};$$

v peut donc être regardé comme le facteur qui rend intégrable l'équation

$$M\alpha + N\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d^2\alpha}{du^2} + Q\frac{d^3\alpha}{du^3} + \text{etc.} = 0,$$

du même ordre que l'équation (2); et il est facile de voir que cet ordre dépend du degré où montent les puissances de x dans les coefficiens de la proposée (1).

Pour montrer comment on doit employer l'équation (3), nous supposerons d'abord que l'on ait $X=0$; et supprimant la constante, il faudra que ce qui reste de l'équation s'évanouisse, lorsqu'on y substitue pour u les deux valeurs relatives aux limites de l'intégrale $\int \alpha v du$. On remplit une de ces conditions, en donnant à u une valeur qui fasse évanouir en même temps les quantités

$$\alpha, \quad \frac{d\alpha}{du}, \quad \frac{d^2\alpha}{du^2}, \quad \text{etc.},$$

savoir, u infini, lorsqu'on prend $\alpha = e^{-ux}$, et $u=0$, quand $\alpha = u^x$; mais c'est au moyen des constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de v, que l'on obtient la seconde limite, en déterminant ces constantes de manière que chaque ligne de l'équation (3) s'évanouisse d'elle-même : on obtient ainsi un nombre d'équations

$$Nv - \frac{d(Pv)}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2} - \text{etc.} = 0,$$
$$Pv - \frac{d(Qv)}{du} + \text{etc.} = 0,$$
$$Qv - \text{etc.} = 0,$$
etc.,

égal à celui des constantes. On éliminera toutes ces constantes, à l'exception d'une seule; les valeurs de u, tirées de l'équation finale, seront autant de limites de l'intégrale $\int avdu$: on les introduira dans les expressions des autres constantes, et on en déduira un pareil nombre de valeurs de v, que nous représenterons par v', v'', v''', etc. Par ce moyen, on aura successivement les expressions

$$y' = \int av'du, \quad y'' = \int av''du, \quad y''' = \int av'''du, \quad \text{etc.},$$

qui satisferont à la proposée; et comme elle est du premier degré, par rapport à la fonction y et à ses coefficiens différentiels, on pourra faire

$$y = A'\int av'du + A''\int av''du + A'''\int av'''du + \text{etc.}$$

A', A'', A''', etc., étant des constantes arbitraires, et toutes les intégrales ayant pour une de leurs limites la valeur qui rend a et ses coefficiens différentiels nuls, et pour l'autre les diverses valeurs de u déterminées d'après ce qui précède.

On sent qu'il y aurait lieu à des discussions délicates et nécessaires sur la possibilité de déterminer u, ainsi que sur le nombre et la nature de ses valeurs, circonstances desquelles dépend le succès de la méthode et la généralité des résultats; mais on ne peut ici que les indiquer comme objets de recherches.

Lorsque X n'est pas nul, il faut premièrement que cette fonction puisse être ramenée à la forme que prend le second membre de l'équation (3) après la substitution de l'expression complète de v, afin qu'en comparant de part et d'autre les termes semblables par rapport à x, on puisse obtenir des équations qui ne renferment que u et les constantes arbitraires introduites par l'expression de v. C'est par ces équations qu'on déterminera comme ci-dessus les limites de l'intégrale $\int avdu$; mais on ne pourra pas, dans le cas actuel, multiplier chacune de ses valeurs par une constante arbitraire; car c'est leur somme, et non pas chacune en particulier, qui vérifie l'équation (1). M. Laplace propose, en conséquence, d'ajouter à cette somme l'expression de y, dans le cas où $X=0$; ce qui satisfait évidemment à l'équation proposée, puisque cette partie fait évanouir par lui-même le second membre de l'équation (3).

Il est visible que l'esprit de cette méthode consiste à donner à l'expression de y une forme telle que l'on puisse, après la substitution dans l'équation proposée, rendre entièrement indépendante de x la partie qui demeure soumise au signe d'intégration. Elle peut s'appliquer à

un système d'équations du premier degré aux différences, entre un nombre quelconque de variables, et en ramène l'intégration à celle d'un système d'équations différentielles du premier degré; mais cette dernière est le plus souvent sujette à des difficultés aussi grandes que celle du système proposé.

1252. Lorsqu'on n'a qu'une seule équation du premier degré aux différences, l'ordre de l'équation (2) dépendant du plus haut exposant de la variable x, il en résulte qu'on ne peut guère résoudre généralement que celles où cette variable ne passe pas le premier degré, et que l'on peut représenter par

$$V + xT = 0,$$

V et T étant des fonctions du premier degré de y_x et de ses différences. La supposition de $y = \int a v du$ conduit alors à des résultats de la forme

$$Mv - \frac{d(Nv)}{du} = 0, \qquad const. + aNv = 0;$$

le premier donne $v = \frac{A'}{N} e^{\int \frac{M}{N} du}$, A' étant une constante arbitraire, et le second conduit aux limites de l'intégrale.

Prenons pour exemple l'équation du premier ordre

$$y_{x+1} - (x+1)y_x = 0.$$

En y supposant $y_x = \int u^x v du$, ou $a = u^x$, on obtiendra

$$v(1-u) - \frac{d(uv)}{du} = 0,$$
$$vu^{x+1} = 0,$$

d'où l'on déduira $v = A'e^{-u}$, puis l'on aura $A'u^{x+1}e^{-u} = 0$, ce qui peut arriver de deux manières, 1°. lorsque $u = 0$, 2°. lorsque u est infini; on aura donc $y_x = A' \int e^{-u} u^x du$, l'intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à u infini.

Nous sommes retombés ici sur un des résultats du n° 1205; car l'intégrale de l'équation $y_{x+1} - (x+1)y_x = 0$ est

$$y_x = A[x]^x \ (1038).$$

1253. La méthode que nous venons d'exposer convient aussi aux

équations différentielles : M. Laplace le montre sur l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(a+bx)y_x+(a'+b'x)\frac{dy_x}{dx}+(a''+b''x)\frac{d^2y_x}{dx^2}\\ \qquad +(a'''+b'''x)\frac{d^3y_x}{dx^3}+\text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

La supposition de $y_x=\int\alpha v du$ et de $\alpha=e^{-ux}$ conduit, dans ce cas, à

$$\int v du\left\{\begin{array}{l}\alpha(a-a'u+a''u^2-a''u^3+\text{etc.})\\ -\frac{d\alpha}{du}(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})\end{array}\right\}=0,$$

et l'intégration par parties fournit les deux équations

$$v\{a-a'u+a''u^2-a'''u^3+\text{etc.}\}+\frac{d.v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})}{du}=0,$$
$$e^{-ux}v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})=0,$$

dont la première, étant de la forme

$$vM+\frac{d.vN}{du}=0,\quad \text{ou}\quad \frac{Mdu}{N}+\frac{Ndv+vdN}{Nv}=0,$$

donne

$$1Nv+\int\frac{Mdu}{N}=1A',\quad \text{ou}\quad v=A'e^{-\int\frac{Mdu}{N}}\frac{1}{N}.$$

L'équation des limites revient à $e^{-ux}vN=0$: elle est satisfaite lorsque u est infini, et par toutes les valeurs de u qui font évanouir la fonction N, ou qui sont les racines de l'équation

$$b-b'u+b''u^2-\text{etc.}=0;$$

et ces valeurs étant désignées par m', m'', etc., on aura

$$y=A'\int\alpha v du+A''\int\alpha v du+A'''\int\alpha v du+\text{etc.},$$

en observant de prendre la première intégrale, depuis $u=m'$ jusqu'à u infini; la seconde, depuis $u=m''$ jusqu'à u infini, et ainsi de suite.

1254. Si l'on représente par

$$Sx+Ty+V=0,$$

une équation dans laquelle S, T, V, soient des fonctions du premier

degré par rapport à $z_{x,y}$ et à ses différences partielles, ou à ses différentielles partielles, et qu'on y fasse $z_{x,y} = \int t^x u^y v dt$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\int t^x u^y v dt \{M + Nx + Py\} = 0,$$

M, N, P, ne contenant que les variables t et u. Pour lui donner la forme $\int v dt \left\{M'\alpha + N' \frac{d\alpha}{dt}\right\}$, il faut regarder u et v comme des fonctions de t, et observer que

$$\frac{d.t^x u^y}{dt} = t^x u^y \left(\frac{x}{t} + \frac{y du}{u dt}\right);$$

faisant alors $t^x u^y = \alpha$, et posant

$$\frac{x}{t} + \frac{Py}{Nt} = \frac{x}{t} + \frac{y du}{u dt},$$

c'est-à-dire $\frac{P}{Nt} = \frac{du}{u dt}$, d'où il suit $\frac{du}{u} = \frac{P dt}{Nt}$, on aura

$$\int v dt \left\{M\alpha + Nt \frac{d\alpha}{dt}\right\} = 0.$$

En intégrant par parties, on obtiendra

$$Mv - \frac{d(Ntv)}{dt} = 0, \qquad Ntv\alpha = 0.$$

L'expression de v, tirée de la première de ces équations, ne contenant point de fonction arbitraire, ne donnera qu'une valeur particulière de la fonction z; mais on peut y introduire une fonction arbitraire de la constante que doit renfermer l'expression de u tirée de l'équation différentielle $\frac{du}{u} = \frac{P dt}{Nt}$, et pour cela il faudra, en désignant cette constante par ω, supposer $z_{x,y} = \iint t^x u^y v \varphi(\omega) dt d\omega$. Il est facile de s'assurer que cette formule satisfera aussi à l'équation proposée; les limites de l'intégration relative à ω n'étant assujéties qu'à la seule condition d'être indépendantes des variables x et y. Celles de l'intégration relative à t doivent se déduire de l'équation $Ntv\alpha = 0$, et chacune des valeurs de t en u donnera, pour l'expression de z, un terme dans lequel on pourra mettre une fonction arbitraire distincte de celles qui entrent dans les autres.

1255. On obtiendra aussi par des intégrales définies les différences,

les différentielles et les intégrales de toute fonction qui dépendra d'équations, soit aux différences, soit différentielles, intégrables par les méthodes précédentes; car cette fonction étant exprimée par des termes de la forme

$$A'\int u^x v du, \quad \text{ou} \quad A'\int e^{-ux} v du,$$

on aura

$$\frac{d^n y_x}{dx^n} = A'\int u^x v du (lu)^n, \quad \Delta^n y_x = A'\int u^x v du (u-1)^n,$$

ou bien

$$\frac{d^n y_x}{dx^n} = (-1)^n A'\int e^{-ux} u^n v du, \quad \Delta^n y_x = A'\int e^{-ux} v du (e^{-u}-1)^n;$$

les intégrales $\int^n y_x dx^n$ et $\Sigma^n y_x$, se déduiront de ces formules, en rendant négatif l'exposant n.

Nous prendrons pour exemple la fonction $\frac{1}{x^m}$, qui est l'intégrale de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} + my = 0.$$

Cette équation étant traitée comme celle du n° 1253, on en tire

$$mv - \frac{d.vu}{du} = 0, \quad auv = 0,$$

d'où

$$v = A'u^{m-1}, \quad y = \frac{1}{x^m} = A'\int e^{-ux} u^{m-1} du,$$

et les limites de l'intégrale seront $u = 0$ et u infini. La constante devant être telle, que la fonction se réduise à 1, lorsque $x = 1$; et l'intégrale définie devenant alors $\int e^{-u} u^{m-1} du$, il en résulte

$$\frac{1}{x^m} = \frac{\int e^{-ux} u^{m-1} du}{\int e^{-u} u^{m-1} du}.$$

L'expression que nous venons d'obtenir peut être employée à trouver les différences, les différentielles et les intégrales à *indices fractionnaires* de la fonction $\frac{1}{x^m}$ (1062); on en tire

$$\Delta^n \frac{1}{x^m} = \frac{\int u^{m-1} e^{-ux} du (e^{-u} - 1)^n}{\int u^{m-1} e^{-u} du};$$

en y changeant le signe de m, on aura $\Delta^n . x^m$. M. Laplace s'est particulièrement attaché à déterminer ces fonctions par des séries convergentes, et il a donné sur cela des détails où l'on ne saurait entrer ici. Il faut consulter à ce sujet sa *Théorie analytique des Probabilités*, et les *Exercices de Calcul intégral*, par M. Legendre, tom. II, p. 131.

CHAPITRE VIII.

Des Equations aux différences mêlées.

1256. Nous avons montré suffisamment, dans ce qui précède, que le Calcul différentiel et le Calcul aux différences pouvaient s'appliquer l'un à l'autre; mais nous n'avons considéré qu'isolément les questions où il s'agit de déterminer une fonction par la connaissance de ses relations avec ses coefficiens différentiels, ou avec ses différences. Pour compléter le tableau des divers points de vue sous lesquels on peut être conduit à la recherche d'une fonction, au moyen des circonstances que présentent les changemens dont elle est susceptible, il nous reste à examiner le cas où la condition qui doit la déterminer mène à une équation contenant en même temps des coefficiens différentiels et des différences, et que nous appellerons *équation aux différences mêlées*. Ce genre d'équations, dont Condorcet et M. Laplace se sont occupés les premiers, n'est pas une simple combinaison de formules analytiques; il répond, dans la théorie des courbes, à des questions aussi difficiles que variées, et quelques-unes de ces questions s'étaient déjà offertes aux géomètres, dès l'origine du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

Théorie analytique des équations aux différences mêlées.

L'équation

$$a\frac{dy}{dx}+b\Delta y+cy=0$$

est une des plus simples de celles qu'on peut se proposer entre les coefficiens différentiels et les différences; elle n'est que du premier degré et du premier ordre, tant par rapport au coefficient différentiel, qu'à l'égard de la fonction et de sa différence. Si l'on suppose $\Delta x=1$, on y pourra faire $y=Ce^{mx}$: elle se changera en $am+b(e^{m}-1)+c=0$; et toute détermination de m qui satisfera à cette dernière équation, donnera une valeur de y renfermant une constante arbitraire.

On satisferait encore, par la supposition de $y=Ce^{mx}$, à l'équation

$$a\frac{d\Delta y}{dx}+b\frac{dy}{dx}+c\Delta y+fy=0,$$

qui diffère de la précédente par le terme $a\frac{d\Delta y}{dx}$, dans lequel les caractéristiques d et Δ sont appliquées l'une sur l'autre; on aurait, dans l'hypothèse établie,

$$\frac{dy}{dx}=Ce^{mx}m,\quad \Delta y=Ce^{mx}(e^m-1),\quad \frac{d\Delta y}{dx}=Ce^{mx}m(e^m-1);$$

et pour déterminer m, on trouverait l'équation

$$am(e^m-1)+bm+c(e^m-1)+f=0.$$

A ne considérer que les équations qui déterminent m, on ne soupçonnerait pas que les deux équations aux différences mêlées, que nous venons de rapporter, pussent ne pas admettre deux intégrales de la même généralité; mais si l'on fait attention que la seconde contient des termes affectés en même temps des deux caractéristiques d et Δ, il sera facile de reconnaître que tandis que la première peut être envisagée comme le résultat de l'élimination de deux constantes arbitraires entre trois équations de la forme

$$V=0,\quad dV=0,\quad \Delta V=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

la seconde en suppose quatre de la forme

$$V=0,\quad dV=0,\quad \Delta V=0,\quad d\Delta V=0\ldots\ldots(2),$$

entre lesquelles on peut éliminer trois quantités.

Le dernier système d'équations offre aussi la possibilité d'éliminer, entre les équations $V=0$ et $\Delta V=0$, une fonction arbitraire du genre de celles qui complètent les intégrales des équations aux différences (1066); nommant $V'=0$ le résultat, on aura encore à éliminer une constante entre les équations

$$V'=0,\quad dV'=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Les équations qui sont le produit de cette dernière génération, sont toujours telles, qu'en y regardant Δy comme une nouvelle variable, elles satisfont aux conditions relatives à l'intégrabilité des équations différentielles à trois variables, et se distinguent par là de celles qui résultent des équations (1) ou des équations (2). En considérant les équations

$$dV'=0\quad \text{et}\quad \Delta dV'=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

dans lesquelles dV représente une fonction différentielle quelconque du premier ordre et à deux variables, on obtiendrait des équations aux différences mêlées, qui pourraient être mises sous la forme d'équations aux différences contenant les trois variables x, y et $\frac{dy}{dx}$. M. Biot, dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Institut (Voy. le tom. I des *Mémoires présentés à l'Institut par divers Savans*, p. 296.), et dont nous avons tiré une grande partie de ce chapitre, désigne sous le nom d'*équations aux différences successives*, celles que donnent les systèmes (3) et (4), parce qu'elles résultent immédiatement ou d'une différentiation effectuée sur une différence, ou d'une différence succédant à une différentiation.

1257. Toute équation aux différences successives doit être susceptible de deux intégrations distinctes, l'une par rapport à la caractéristique Δ, et l'autre par rapport à la caractéristique d; mais l'étendue du résultat dépend de l'ordre dans lequel s'effectue chacune de ces intégrations. Lorsque celle des différentielles peut s'effectuer la première, le résultat que l'on obtient d'abord contient une constante arbitraire, et l'intégration aux différences introduit ensuite une fonction arbitraire; mais si l'on intègre d'abord par rapport aux différences, on sera souvent obligé de particulariser la fonction arbitraire, pour effectuer l'intégration aux différentielles.

Soit pour exemple

$$\Delta y = x\Delta\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \Delta y = x\frac{d\Delta y}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2.$$

Cette équation, ne renfermant que les variables x et Δy que nous représenterons par z, peut être mise sous la forme

$$z = x\frac{dz}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dz^2}{dx^2},$$

qui en fait une équation différentielle à deux variables, de la classe de celles qui s'intègrent après une différentiation (587). On en tire par ce moyen

$$0 = \left(x - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\right)\frac{d^2z}{dx^2} \qquad \text{d'où} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0, \ \frac{dz}{dx} = a, \ z = ax - \frac{1}{4}a^2;$$

puis en mettant pour z sa valeur, il vient

$$\Delta y = ax - \tfrac{1}{4}a^2, \quad y = \Sigma(ax - \tfrac{1}{4}a^2) + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

et par conséquent

$$y = \frac{1}{2}a(x^2 - x) - \frac{1}{4}a^2x + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

résultat délivré de tout signe d'intégration.

Le facteur $x - \frac{z}{2}\frac{dz}{dx} = 0$, qui conduit à la solution particulière de l'équation différentielle en z, donne

$$z = \Delta y = x^2, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

C'est par l'intégration aux différences qu'on doit commencer, sur l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x\Delta\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

parce qu'en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, elle devient

$$p = x\Delta p - \frac{1}{4}\Delta p^2;$$

et pour l'intégrer il faut d'abord en prendre la différence (1077), qui se réduit à

$$0 = [x + 1 - \frac{1}{4}(2\Delta p + \Delta^2 p)]\Delta^2 p.$$

Le second facteur, donnant $\Delta p = a$, conduit à

$$p = ax - \frac{1}{4}a^2,$$

équation différentielle dont l'intégrale est

$$y = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}a^2x + b,$$

quand on prend pour a une simple constante, et qui, devenant

$$y = \int x dx\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x) - \frac{1}{4}\int dx\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)^2,$$

quand on y met pour a sa valeur générale, demeure affectée du signe $\int$.

Il est à propos de remarquer que le facteur

$$x + 1 - \frac{1}{4}(2\Delta p + \Delta^2 p) = 0$$

est relatif à l'intégrale indirecte de l'équation aux différences (1077).

1258. Comme les équations aux différences, celles qui sont aux différences mêlées peuvent être changées en équations différentielles d'un

ordre infini, par la substitution des valeurs de Δy, $\Delta \frac{dy}{dx}$, etc., qui sont les séries

$$\frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$\text{etc.};$$

il restera ensuite à satisfaire, de la manière la plus générale, aux transformées, ce qui sera souvent très-difficile (1067).

On peut encore faire l'inverse de ce qu'on vient d'indiquer, changer en équations aux différences pures, les équations aux différences mêlées, en y remplaçant les coefficiens différentiels par leurs développemens tirés de la formule du nº 937; mais alors, comme l'observe M. Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, 13ᵉ cahier, p. 128), il ne faut pas, dans l'intégrale de la transformée, considérer les constantes comme des fonctions arbitraires périodiques dont la différence est nulle.

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y,$$

dont la transformée serait

$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 y - \tfrac{1}{3}\Delta^3 y + \tfrac{1}{4}\Delta^4 y - \text{etc.} = 0,$$

on satisferait à celle-ci en posant $\Delta^2 y = 0$, dont l'intégrale serait

$$y = x\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x) + \psi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x);$$

mais cette intégrale a besoin d'être particularisée, pour vérifier l'équation d'où l'on est parti, puisqu'elle donne

$$\Delta y = \varphi, \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi + x\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx},$$

expressions qui ne sont pas égales dans tout état.

On voit aussi la même chose par l'examen du développement de $\frac{d^n y}{dx^n}$, qui devient o lorsque y est une fonction périodique à différences nulles, quoiqu'alors ce coefficient différentiel ne soit pas nul.

1259. On est encore bien peu avancé sur l'intégration des équations aux différences mêlées, et ce qu'on connaît de plus général est l'appli-

cation de la méthode du n° 766 à ce genre d'équations, faite par M. Poisson, dans le Mémoire cité au numéro précédent.

Pour plus de simplicité, il transforme les différences en valeurs successives (1036); ainsi, au lieu de l'équation

$$\frac{d\Delta y}{dx}+P\frac{dy}{dx}+Q\Delta y+Ny=M,$$

il prend

$$\frac{d(y_1-y)}{dx}+P\frac{dy}{dx}+Q(y_1-y)+Ny=M,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{dy_1}{dx}+P\frac{dy}{dx}+Qy_1+Ny=M\ldots\ldots(1),$$

en changeant $P-1$ en P et $N-Q$ en N.

On suppose ici $\Delta x=1$, parce qu'il est toujours possible de ramener les choses à cet état, par la transformation du n° 1056.

Cela posé, si l'on fait

$$y_1+Py=y'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

d'où il suit

$$\frac{dy_1}{dx}+P\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx}-y\frac{dP}{dx},\quad Qy_1=Qy'-PQy,$$

la proposée devient

$$\frac{dy'}{dx}+Qy'=M+\left(\frac{dP}{dx}+PQ-N\right)y;$$

et s'il arrivait que

$$\frac{dP}{dx}+PQ-N=0\ldots\ldots(c),$$

on obtiendrait pour transformée l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré

$$\frac{dy'}{dx}+Qy'=M\ldots\ldots(3),$$

dont l'intégration, donnant y' en x (562), conduirait à la valeur de y par l'intégration de l'équation (2), qui est aux différences et aussi du premier degré et du premier ordre (1038).

Si la condition (c) n'est pas remplie, on fera

$$\frac{dP}{dx}+PQ-N=\alpha;$$

et, au lieu de l'équation (3), on aura

$$\frac{dy'}{dx} + Qy' = M + \alpha y \ldots\ldots\ldots (4),$$

pour éliminer y de (2) et obtenir une transformée en y', qui sera alors aux différences mêlées, et susceptible de la même forme que la proposée (1). En effet, on aura

$$y = \frac{\frac{dy'}{dx} + Qy' - M}{\alpha}, \quad y_1 = \frac{\frac{dy'_1}{dx} + Q_1 y'_1 - M_1}{\alpha_1},$$

valeurs au moyen desquelles on changera l'équation (2) en

$$\frac{dy'_1}{dx} + P' \frac{dy'}{dx} + Q_1 y'_1 + N'y' = M' \ldots\ldots (1'),$$

si l'on fait

$$\frac{P\alpha_1}{\alpha} = P', \quad \frac{PQ\alpha_1}{\alpha} - \alpha_1 = N', \quad M_1 + \frac{PM\alpha_1}{\alpha} = M'.$$

Posant ensuite, dans (1'),

$$y'_1 + P'y' = y'' \ldots\ldots\ldots\ldots (2'),$$

on obtiendra la nouvelle équation

$$\frac{dy''}{dx} + Q_1 y'' = M' + \alpha' y' \ldots\ldots\ldots (4'),$$

dans laquelle

$$\alpha' = \frac{dP'}{dx} + P'Q_1 - N';$$

et si l'on avait $\alpha' = 0$, l'équation (4'), réduite à

$$\frac{dy''}{dx} + Q_1 y'' = M' \ldots\ldots\ldots (3'),$$

ferait trouver y'', qui servirait à obtenir y', par l'équation (2'), et l'équation (4) donnerait y par une simple différentiation. Si α' n'était pas nul, on passerait à une troisième transformation absolument pareille aux précédentes, et que, par cette raison, il est inutile de développer.

Quant à la forme de l'expression de y, il est déjà fort aisé de la prévoir, puisqu'à quelque point que s'arrête la série des quantités α, α', α'', etc., on n'aura jamais à intégrer qu'une dernière équation dif-

férentielle, qui sera de la même forme que (3), puis une équation aux différences semblable à (2).

La première opération introduit une simple constante arbitraire; la seconde, une fonction périodique dont la différence est nulle; et comme on remonte ensuite, par des différentiations, jusqu'à la variable primitive y, son expression contiendra en outre un certain nombre des coefficiens différentiels de la fonction périodique, en sorte que si l'on désigne cette fonction par φ, et la constante arbitraire par c, on aura

$$y = A + Bc + C\varphi, \quad \text{quand } \alpha = 0,$$
$$y = A' + B'c + C'\varphi + D'\frac{d\varphi}{dx}, \quad \alpha' = 0,$$
$$y = A'' + B''c + C''\varphi + D''\frac{d\varphi}{dx} + E''\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \alpha'' = 0,$$
etc.,

A, B, C, A', etc., désignant des fonctions données en x.

1260. Les transformations indiquées dans le numéro précédent peuvent s'enchaîner dans un ordre inverse, en commençant par poser

$$\frac{dy}{dx} + Q_{-1}y = y' \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

d'où il résulte

$$\frac{dy}{dx} = y' - Q_{-1}y \quad \text{et} \quad \frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = y'_1,$$

ce qui change l'équation (1) en

$$y'_1 + Py' = M + (PQ_{-1} - N)y;$$

et si l'on avait

$$PQ_{-1} - N = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

il resterait seulement l'équation aux différences

$$y'_1 + Py' = M \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

qui est du premier degré et du premier ordre, et qui, étant intégrée, donnerait la valeur de y', au moyen de laquelle on obtiendrait y par l'équation (2).

Quand l'équation (c) n'a pas lieu, on fait

$$PQ_{-1} - N = \alpha,$$

ce qui donne l'équation

$$y'_1 + Py' = M + \alpha y \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

d'où l'on tire les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$, pour les substituer dans (2), et on arrive ainsi à la transformée

$$\frac{dy'_1}{dx} + P\frac{dy'}{dx} + Q'y'_1 + N'y' = M' \ldots\ldots\ldots (1'),$$

encore semblable à la proposée, et susceptible par conséquent des opérations précédentes.

Posant donc

$$\frac{dy'}{dx} + Q'_{-1}y' = y'' \ldots\ldots\ldots (2'),$$
$$PQ'_{-1} - N' = \alpha',$$

on aura

$$y''_1 + Py'' = M' + \alpha' y' \ldots (4'),$$

équation qui deviendra semblable à (3), si $\alpha' = 0$; et dans ce cas, l'intégration successive des équations (4') et (2') faisant connaître y'' et y', on aura y par l'équation (4).

Ici la fonction périodique à différences nulles se présentant la première, passera sous le signe $\int$ dans l'intégrale de (2'), et en poussant plus loin ces considérations, on s'assurera sans peine que les valeurs seront de la forme

$$y = A + Bc + C\int R\varphi dx, \qquad \text{quand } \alpha = 0,$$
$$y = A' + B'c + C'\int R'\varphi dx + D'\int R'_1\varphi dx, \qquad \alpha' = 0,$$
$$y = A'' + B''c + C''\int R''\varphi dx + D''\int R''_1\varphi dx + E''\int R''_2\varphi dx, \qquad \alpha'' = 0,$$

etc.,

A, B, C, R, A', etc., désignant des fonctions données en x, c une constante arbitraire, et φ la fonction périodique à différences nulles.

1261. Pour appliquer cette méthode, M. Poisson prend d'abord l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + a\frac{dy}{dx} + by_1 + aby = 0,$$

dans laquelle a et b désignent des constantes. En suivant l'ordre établi dans le n° 1259, on fait

$$y_1 + ay = y', \quad \text{et il vient} \quad \frac{dy'}{dx} + by' = 0,$$

d'où

$$y' = ce^{-bx}, \quad y = ce^{-bx} + (-a)^x\varphi \ (1066).$$

Par le n° 1260, on a les équations

$$\frac{dy}{dx}+by=y',\qquad y'_1+ay'=0,$$

qui conduisent à

$$y'=(-a)^x\varphi,\qquad y=ce^{-bx}+e^{-bx}\int e^{bx}(-a)^x\varphi dx.$$

Quoique cette seconde intégrale paraisse différer de la première, M. Poisson la transforme dans celle-ci, en substituant à φ une suite infinie de termes de la forme $Ae^{2n\pi x\sqrt{-1}}$, A désignant un coefficient constant et arbitraire, n un nombre entier quelconque, et π le rapport de la circonférence au diamètre. Il est en effet bien évident qu'une pareille fonction a ses différences nulles, lorsque x varie de l'unité, puisque

$$A[e^{2n\pi(x+1)\sqrt{-1}}-e^{2n\pi x\sqrt{-1}}]=Ae^{2n\pi x\sqrt{-1}}(e^{2n\pi\sqrt{-1}}-1)$$
$$=Ae^{2n\pi x\sqrt{-1}}(\cos 2n\pi+\sqrt{-1}\sin 2n\pi-1)=0$$

Par cette substitution, le développement de $\int e^{bx}(-a)^x\varphi dx$ sera composé de termes de la forme

$$A\int e^{bx}(-a)^x e^{2n\pi x\sqrt{-1}}dx=A\int e^{[2n\pi\sqrt{-1}+b+l(-a)]x}dx$$
$$=\frac{A}{2n\pi\sqrt{-1}+b+l(-a)}e^{[2n\pi\sqrt{-1}+b+l(-a)]x}$$
$$=A'e^{bx}(-a)^x e^{2n\pi x\sqrt{-1}};$$

le résultat final sera donc égal au produit de $e^{bx}(-a)^x$, par une suite de termes de la forme $A'e^{2n\pi x\sqrt{-1}}$, ce qui revient à $e^{bx}(-a)^x\varphi$, et change la seconde valeur de y dans la première.

M. Poisson passe ensuite à d'autres exemples, où il faut opérer plusieurs transformations successives, et pour lesquels je renvoie à son Mémoire, en me bornant à indiquer l'équation plus générale qu'il en a conclue, savoir,

$$\frac{dy_1}{dx}-a\frac{dy}{dx}+(x\mp n)y-axy=0,$$

où n est un nombre entier positif quelconque, et qui s'intégrera après $n+1$ transformations, qu'il faudra effectuer dans l'ordre du n° 1259, ou dans celui du n° 1260, selon qu'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur.

1262. La détermination de l'étendue des intégrales des diverses espèces d'équations aux différences mêlées, est susceptible de discussions

très-épineuses, comme celle de l'étendue des intégrales des équations différentielles partielles, par rapport aux fonctions arbitraires qui peuvent y entrer (791); et l'on y appliquerait les considérations employées dans les nos 78, 79, 792.

On prouverait, par les considérations développées dans les nos 1073 et suivans, que les équations aux différences mêlées ont aussi leurs *intégrales indirectes*, qui se déduisent également de l'intégrale *directe*, par la variation des constantes arbitraires qu'elle contient, en assujétissant la fonction donnée par cette intégrale à satisfaire encore, dans ce nouvel état, à l'équation aux différences mêlées. Cette condition établit entre les arbitraires des relations qui sont exprimées par une nouvelle équation aux différences mêlées. Lorsqu'on détermine les arbitraires par son moyen, on obtient une seconde équation primitive qui, satisfaisant à l'équation proposée, représente des courbes ayant à chaque point même tangente que quelqu'une de celles qui sont comprises dans l'intégrale proposée, et même sécante pour deux points dont les ordonnées sont éloignées d'une quantité égale à la différence de l'abscisse. Voilà ce qui arrive lorsque l'équation proposée ne renferme point les caractéristiques Δ et d appliquées l'une sur l'autre : si le contraire avait lieu, l'intégrale directe et l'intégrale indirecte devraient s'accorder non-seulement dans les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, Δy, mais encore dans celles de $\Delta\frac{dy}{dx}$; et alors, en déterminant convenablement la constante arbitraire, on pourrait faire passer par deux points dont les ordonnées seraient éloignées d'une quantité égale à la différence de l'abscisse, deux courbes données, l'une par l'intégrale directe, l'autre par l'intégrale indirecte, qui auraient à chacun des points dont il s'agit, même tangente, et entre ces deux points, même sécante. Ces résultats étant très-analogues à ceux qu'on trouve dans les numéros cités, il n'a pas paru nécessaire de les exposer en détail.

1263. C'est principalement par la nature des questions géométriques qu'elles peuvent exprimer, que les équations aux différences mêlées doivent intéresser ceux qui cultivent les Mathématiques. La première de ces questions est le problème des *trajectoires réciproques*, qui a beaucoup occupé Jean Bernoulli et Euler, et qu'ils ont résolu par des moyens fort ingénieux et fort élégans, mais indirects, quand on les com-

Application des équations aux différences mêlées, à des questions géométriques.

parce à celui qui résulte de l'emploi des différences mêlées. Voici l'énoncé de ce problème.

FIG. 12. *Trouver une courbe* M'CM, *fig.* 12, *telle qu'en la faisant tourner sur un de ses points, autour d'un axe donné* AC, *pour la placer dans une situation contraire à la première, comme on le voit en* N'CN, *et la faisant mouvoir ensuite parallèlement à elle-même le long de cet axe, elle coupe partout la première* M'CM *sous un angle donné.*

Si le point C désigne celui sur lequel la courbe $M'CM$ a tourné autour de l'axe AC, pour passer à une situation inverse $N'CN$, l'angle $M'CN$ sera double de l'angle $M'CA$, et sera d'ailleurs égal par l'hypothèse à l'angle $M'MO$ (*). Maintenant, menons par le point M l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AB; l'angle OMP sera égal à QNP, à cause du parallélisme supposé dans le mouvement de la courbe $N'CN$; et parce que cette courbe est placée dans une situation contraire à celle de $M'CM$, l'angle QNP doit être le même que l'angle $Q'M'P'$, formé par cette dernière et l'ordonnée $P'M'$, prise de l'autre côté de AC, à une distance AP' égale à AP. Il suit de là que l'angle $M'MO$, composé de CMP et de OMP ou de QNP, est égal à $CMP+Q'M'P'$: telle est, en dernière analyse, la condition du problème, et c'est ainsi que l'envisageoit Jean Bernoulli.

En faisant $AP=x$, $PM=y$, $AP'=x'$, $P'M'=y'$, l'angle $M'CN=2c$, on aura

$$\text{tang}\, CMP=\frac{dx}{dy},\quad \text{tang}\, Q'M'P'=\frac{dx'}{dy'};$$

et posant, pour abréger,

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dy'}{dx'}=p',$$

il viendra

$$\text{angl.}\left(\text{tang}=\frac{1}{p}\right)+\text{angl.}\left(\text{tang}=\frac{1}{p'}\right)=2c,$$
$$x'+x=0.$$

Voilà les équations de la question écrites en différences mêlées. Il faut bien remarquer que la dernière exprime la loi de la variation de x, et que chacune de ces équations ne doit pas avoir lieu par elle-même, mais seulement que l'une étant posée, l'autre en est une suite nécessaire.

(*) Il faut se rappeler que les angles formés par les courbes, sont les mêmes que ceux de leurs tangentes.

Ces équations sont faciles à intégrer : en effectuant d'abord, suivant le procédé du n° 1056, l'intégration relative aux différences, on trouvera

$$\text{angl.}\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + B(-1)^z,$$
$$x = b(-1)^z,$$

B et b étant des fonctions arbitraires de $\sin 2\pi z$ et de $\cos 2\pi z$. La variable z s'élimine facilement ; en faisant $\frac{B}{b} = C$, il vient

$$\text{angle}\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + Cx, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p} = \text{tang}\,\{c + Cx\},$$

d'où l'on conclut

$$p = \frac{1}{\text{tang}\,(c + Cx)} = \frac{1 - \text{tang}\,c\,\text{tang}\,Cx}{\text{tang}\,c + \text{tang}\,Cx}.$$

On peut mettre cette valeur sous la forme

$$p = \frac{1 + \cos 2c - \sin 2c\,\text{tang}\,Cx}{\sin 2c + (1 + \cos 2c)\,\text{tang}\,Cx}$$
$$= \frac{\cos 2c}{\sin 2c} + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 - \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}\,Cx}{1 + \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}\,Cx}\right\};$$

et en observant que la constante C doit être regardée comme une fonction arbitraire, qui ne change point lorsque l'on y met $-x$ au lieu de x, on fera $-\frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}\,Cx = Xx$, en désignant par X une fonction quelconque de x assujétie seulement à demeurer constante quand on passe de $+x$ à $-x$: on aura ainsi

$$p = \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right\},$$

résultat semblable à celui qu'a trouvé Euler, par une voie très-différente.

Si l'on y remet $\frac{dy}{dx}$, au lieu de p, on en tirera

$$y = x\cot 2c + \frac{1}{\sin 2c}\int dx\left\{\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right\};$$

Lorsqu'on prend $X = 0$ on trouve d'abord la ligne droite, qui doit

en effet satisfaire à la question proposée; posant ensuite $X = x^m$, il vient

$$y = x\cot 2c - \frac{1}{\sin 2c}\left\{x + 2\int\frac{dx}{x^{m+1}-1}\right\},$$

expression qui ne dépend que de l'intégration de la fraction rationnelle $\frac{dx}{x^{m+1}-1}$.

Bernoulli et Euler ne se sont pas bornés à résoudre généralement le problème des trajectoires réciproques; ils ont eu spécialement pour but de chercher parmi ces courbes celles qui pouvaient être algébriques, et sous ce point de vue tous leurs travaux rentrent dans le Calcul intégral *indéterminé* (534 et suiv.).

1264. Parmi le nombre assez grand de questions qu'Euler a résolues sur ce sujet, nous choisirons encore la suivante, qui est peu connue.

FIG. 13. *Trouver toutes les courbes telles qu'en menant par chacun de leurs points deux droites* AM, MM', fig. 13, *faisant le même angle avec la tangente* TM, *la première étant dirigée à un point fixe* A, *la seconde terminée à la courbe en* M', *la ligne* M'A *fasse avec la tangente* M't *le même angle que* MM' (*).

Les conditions de ce problème sont contenues dans les deux équations

$$\text{angle}\,AMT = \text{angle}\,M'Mt,\qquad \text{angle}\,AM't' = \text{angle}\,MM'T',$$

dont une doit donner la loi des variations de x. Soit

$$AP=x,\ PM=y,\ AP'=x',\ P'M'=y',\ \frac{dy}{dx}=p,\ \frac{dy'}{dx'}=p',\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=P;$$

en menant $M'Q$, parallèle à l'axe AB des x, et prolongeant MP jusqu'au point Q, on aura

$$\begin{aligned}\tang MM'Q = \frac{MQ}{M'Q} = \frac{MP+PQ}{M'Q} = \frac{MP+P'M'}{M'Q} = \frac{y-y'}{x'-x}\\ = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -P,\end{aligned}$$

en n'ayant point égard au signe de y', qu'on peut supposer négatif dans

(*) Suivant les loix de la réflexion de la lumière, le rayon parti du point A, dans la direction AM, serait réfléchi deux fois par la courbe cherchée, la première de M en M', la seconde de M' en A, et retournerait par conséquent au point d'où il est émané. Ce problème a été proposé dans les *Acta Eruditorum*, septembre 1745.

la figure citée. Cela posé, si l'on observe que les angles $MM'Q$, MOT, $M'OT'$, sont égaux, et que l'on considère les angles extérieurs des triangles OMT, AMT, on trouvera

$$\tang M'Mt = \tang(PTM + MM'Q) = \frac{p-P}{1+pP},$$

$$\tang AMT = \tang(PAM - PTM) = \frac{\frac{y}{x}-p}{1+\frac{y}{x}p} = \frac{y-px}{x+py};$$

ainsi la première condition à remplir donnera l'équation

$$\frac{y-px}{x+py} = \frac{p-P}{1+pP} \dots\dots\dots\dots (1).$$

La relation des angles des triangles $OM'T'$ et $AM'T'$ conduit de même à

$$\tang MM'T' = -\tang(P'T'M' + MM'Q) = -\frac{p'-P}{1+p'P},$$

$$\tang AM't' = \tang(P'AM' + P'T'M') = \frac{-\frac{y'}{x'}+p'}{1+\frac{y'}{x'}p'} = -\frac{y'-p'x'}{x'+p'y'},$$

d'où l'on conclut, pour la seconde condition,

$$\frac{y'-p'x'}{x'+p'y'} = \frac{p'-P}{1+p'P} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Tirons maintenant des équations (1) et (2), les valeurs de P; nous obtiendrons

$$P = \frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x} \dots\dots\dots\dots (3),$$

$$P = \frac{y'-2p'x'-p'^2y'}{p'^2x'-2p'y'-x'} \dots\dots\dots\dots (4),$$

ce qui nous donnera l'équation

$$\frac{y'-2p'x'-p'^2y'}{p'^2x'-2p'y'-x'} - \frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x} = 0 \dots\dots\dots\dots (5),$$

de laquelle il résulte que la fonction $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$ ne change point lorsque x devient x'. Telle est l'hypothèse dans laquelle il faut intégrer l'équation (3), qui répond alors à $\frac{\Delta y}{\Delta x} = const.$, et donne

$$y = x \times const. + \varphi\,(const.)\,;$$

nous aurons donc

$$y = x\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\} + \varphi\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\}.$$

La caractéristique φ désignant une fonction arbitraire, donne à ce résultat une très-grande généralité; mais aussi on ne saurait, dans cet état, l'intégrer par rapport aux différentielles.

Il est intéressant de connaître ce qu'exprime la fonction .... $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$; c'est à quoi on parvient en la mettant sous la forme

$$-\frac{\frac{y-px}{x+py}-p}{1+p\left(\frac{y-px}{x+py}\right)},$$

et en observant que

$$p = \operatorname{tang} PTM,\quad \frac{y-px}{x+py} = \operatorname{tang} AMT.$$

Elle se change alors en $-\operatorname{tang}(AMT-PTM)$, et montre que la différence des angles AMT et PTM ne doit pas varier dans le passage du point M au point M', ce dont il est encore facile de s'assurer immédiatement par les considérations géométriques.

M. Biot, dont nous suivons ici le Mémoire, donne à la fonction φ plusieurs formes, desquelles il résulte successivement un cercle, limite d'une infinité d'ellipses, et l'assemblage de deux droites, limite d'une infinité d'hyperboles : nous ne rapporterons point les calculs qui mènent à ces résultats, et dans lesquels il ne s'agit que d'intégrer une équation différentielle du premier ordre ; nous dirons seulement qu'on a le cercle, quand $\varphi\left(\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right)=0$, l'ellipse ou l'hyperbole, quand $\varphi = -2C\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\}$.

Si l'on prend les limites des équations (3) et (5) dans la supposition où x devient infini, y, p et P, demeurant finis, ce qui place le point A à une distance infinie de la courbe (*), on obtiendra

(*) Dans ce cas du problème, le rayon lumineux vient parallèlement à l'axe AB.

$$P = -\frac{2p}{p^2-1}, \quad \frac{2p'}{p'^2-1} - \frac{2p}{p^2-1} = 0,$$

d'où l'on conclura

$$y = -\frac{2px}{p^2-1} + \varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right).$$

En faisant $\varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right) = 0$, on aura seulement

$$y = -\frac{2px}{p^2-1}; \quad \text{d'où} \quad x + py = \sqrt{x^2+y^2},$$

ce qui revient à

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx, \quad \text{et donne} \quad \sqrt{x^2+y^2} = x + C.$$

Cette dernière équation appartient à une parabole.

L'équation $\frac{p'}{p'^2-1} - \frac{p}{p^2-1} = 0$ nous apprend que toutes les courbes qui résolvent ce cas de la question proposée, ont, aux points M et M', des tangentes parallèles ou perpendiculaires. En effet, en réduisant ses deux membres au même dénominateur, et passant tous les termes dans un seul, on lui donnera la forme

$$(pp'+1)(p'-p) = 0,$$

et l'on en tirera par conséquent

$$pp'+1 = 0, \quad p'-p = 0.$$

1265. Voici encore un problème traité d'abord par Euler, considéré ensuite par M. Biot comme appartenant aux différences mêlées, sur l'équation duquel il n'a effectué, comme dans le précédent, que l'intégration aux différences, mais dont M. Poisson a donné une solution plus complète, que je vais exposer.

Il s'agit de trouver une courbe DE, fig. 14, telle que si, par le pied R d'une normale quelconque MR, on élève une ordonnée NR, le quarré de cette normale surpasse celui de l'ordonnée d'une quantité constante a; c'est-à-dire que FIG. 14.

$$\overline{MR}^2 = \overline{NR}^2 + a.$$

En représentant AP par x, PM par y, et posant $y=f(x)$, on a

$$NR = f(AP+PR) = f\left(x+\frac{ydy}{dx}\right) \text{ (212)},$$

et par conséquent

$$y^2\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right] = \left[f\left(x+\frac{ydy}{dx}\right)\right]^2 + a \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

La différence de x est égale à $PR=\frac{ydy}{dx}$: pour la ramener à l'unité, on prendra

$$x=\varphi(z) \quad \text{et} \quad x+\frac{ydy}{dx}=\varphi(z+1) \text{ (1056)} \ldots\ldots(2);$$

faisant ensuite

$$f(x)=f[\varphi(z)]=\psi(z), \quad \text{d'où} \quad f\left(x+\frac{ydy}{dx}\right)=\psi(z+1),$$

et n'écrivant que les caractéristiques des fonctions, afin d'abréger, on changera les équations (1) et (2) en

$$\psi^2+\frac{\psi^2 d\psi^2}{d\varphi^2} = \psi_1^2 + a \ldots\ldots\ldots\ldots(1'),$$

$$\varphi+\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2').$$

Ces équations renfermant implicitement trois variables, savoir, z, φ et ψ, il faut tâcher d'en éliminer une, ce qui peut se faire de la manière suivante.

L'équation (2′) donne

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 - \varphi,$$

valeur qui change (1′) en

$$\psi^2+(\varphi_1-\varphi)^2 = \psi_1^2 + a, \quad \text{ou} \quad (\varphi_1-\varphi)^2 = \psi_1^2 - \psi^2 + a,$$

dont la différentielle

$$(\varphi_1-\varphi)(d\varphi_1-d\varphi) = \psi_1 d\psi_1 - \psi d\psi,$$

se réduit à

$$(\varphi_1-\varphi)d\varphi_1 = (\varphi_2-\varphi_1)d\varphi_1,$$

lorsqu'on y met pour $\psi d\psi$ et $\psi_1 d\psi_1$ leurs valeurs, tirées de (2′), et

se décompose dans les facteurs

$$d\varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta^2\varphi = 0.$$

Le premier conduit à φ_1 ou $\varphi = const.$, valeur comprise dans le second; celui-ci est le seul dont il faille s'occuper. Son intégrale est

$$\varphi = Az + B,$$

A et B désignant des fonctions de $\cos 2\pi z$ et de $\sin 2\pi z$ (1066). Il suit de là que

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 - \varphi = A,$$

au moyen de quoi l'équation (1') donne

$$\psi^2_1 - \psi^2 = A^2 - a, \quad \text{ou} \quad \Delta.\psi^2 = A^2 - a \quad \text{et} \quad \psi^2 = (A^2 - a)z + C,$$

C étant encore une fonction périodique, mais qui n'est pas indépendante des deux autres, puisque les expressions de φ et de ψ doivent en outre satisfaire à l'équation (2'). Or, en différentiant ψ^2 et φ, on obtient

$$2\psi\frac{d\psi}{dz} = A^2 - a + 2Az\frac{dA}{dz} + \frac{dC}{dz},$$
$$\frac{d\varphi}{dz} = A + z\frac{dA}{dz} + \frac{dB}{dz}, \quad \varphi_1 - \varphi = A,$$

valeurs dont la substitution dans (2') conduit à

$$-a + \frac{dC}{dz} = A^2 + 2A\frac{dB}{dz},$$

d'où l'on tire

$$A = -B' \pm \sqrt{B'^2 + C' - a},$$

en représentant par B' et C' les coefficiens différentiels des fonctions B et C. Mettant enfin cette valeur dans celles de φ et de ψ^2, et remplaçant ces fonctions par les variables x et y qu'elles représentent, on aura

$$x = B + z(-B' + \sqrt{B'^2 + C' - a}) \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$
$$y^2 = C + z(2B'^2 + C' - 2a - 2B'\sqrt{B'^2 + C' - a}) \ldots\ldots (4),$$

où il ne restera plus qu'à éliminer z, ce qui ne pourra se faire qu'autant qu'on aura assigné des formes particulières aux fonctions B et C.

En les supposant constantes, il vient

$$B' = 0,\quad C' = 0,\quad x = B + z\sqrt{-a},\quad y^2 = C - 2az,$$

et par conséquent

$$y^2 = C - 2B\sqrt{-a} + 2x\sqrt{-a},$$

équation à la parabole, qui n'est réelle qu'en faisant a négatif.

1266. M. Poisson ajoute à ce qui précède les remarques suivantes.

1°. La sounormale de la courbe cherchée est une fonction périodique à différences nulles, puisque, d'après la valeur trouvée pour φ, on a

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(z+1) - \varphi(z) = -B' + \sqrt{B'^2 + C' - a};$$

mais il ne s'ensuit pas que cette sounormale puisse être une constante absolue; car si on la représentait par b, on formerait l'équation

$$b = -B' + \sqrt{B'^2 + C' - a},$$

de laquelle, en y faisant disparaître le radical, on déduirait

$$2b\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} + b^2 = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} - a,\quad \text{et}\quad 2bB + (b^2 + a)z + const. = C:$$

le premier membre de la dernière n'étant pas une fonction périodique, tant que $b^2 + a$ n'est pas nul, ne saurait alors être égal au second. Ainsi la sounormale ne peut être constante que lorsqu'elle est égale à $\sqrt{-a}$.

2°. Le système des valeurs de x et de y^2 peut être remplacé par un système d'équations dont l'une soit la différentielle de l'autre, par rapport à z seul; il suffit pour cela de multiplier l'équation (3) par $2B'$, et d'ajouter le résultat à l'équation (4), ce qui donnera

$$y^2 + 2B'x = C + 2BB' + z(C' - 2a) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha);$$

faisant disparaître ensuite le radical dans l'équation (3), on aura

$$x^2 - 2Bx + 2B'zx - 2BB'z + B^2 = z^2(C' - a),$$

qui, retranchée de la précédente multipliée par z, donnera

$$y^2z - x^2 + 2Bx = Cz + B^2 - az^2 \ldots\ldots\ldots (\beta);$$

et maintenant il est facile de voir que

$$\alpha = \frac{d\beta}{dz}.$$

L'équation (β) appartient à une suite d'ellipses ou d'hyperboles qui ont leur axe sur celui des abscisses et forment, par leurs intersections consécutives, la courbe demandée.

3°. La solution précédente devient incomplète lorsque $a=0$, auquel cas il est visible que le cercle remplit la condition demandée, puisque toutes les normales, passant par son centre, sont égales au rayon, et cependant il ne résulte pas des équations (β) et (α). Cela tient à ce que la supposition de

$$x=\varphi(z)=AP, \quad \text{et de} \quad x+\frac{ydy}{dx}=\varphi(z+1)=AR,$$

exige que les lignes AP et AR ne soient pas indépendantes; mais si la seconde est constante, on a

$$x+y\frac{dy}{dx}=b, \quad \text{d'où} \quad x^2+y^2=2bx+c,$$

c étant la constante arbitraire.

Or, d'après cette équation, qui donne

$$MR=\sqrt{b^2+c}=NR,$$

la condition du problème ne peut plus être remplie qu'en supposant $a=0$; le cercle trouvé est donc une nouvelle solution qu'il faut joindre à celles que donnent, pour ce cas, les équations (α) et (β).

En terminant cet article, nous observerons que le dernier cas de la question, celui où l'on pose $a=0$, a été résolu par M. Charles Babbage, dans la seconde partie des *Transactions philosophiques* pour 1816 (p. 253), par un procédé qu'il nomme *calcul des fonctions*, sur lequel il a déjà donné trois Mémoires. Ce calcul ayant pour but de déterminer les fonctions par les relations que donnent, entre leurs valeurs, les relations établies entre les valeurs des variables dont elles dépendent, doit rentrer souvent dans celui des différences, lorsqu'on y considère toutes les différences comme variables, et aussi quelquefois dans ceux des différentielles partielles et des différences mêlées.

1267. Les deux questions que nous venons de résoudre se rapportent aux différences successives; en voici une très-simple, qui mène à une équation aux différences mêlées proprement dites.

FIG. 5. *Trouver les courbes dans lesquelles la soutangente* AT, fig. 5, *soit à la sousécante* AS, *dans un rapport constant, en supposant que la seconde ordonnée* A'B' *soit éloignée de la première* AB *d'une quantité* AA' *égale à* h.

Il est facile de voir que ce problème conduit à une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{\Delta y}{h}.$$

Si l'on met dans cette équation, à la place de Δy, son développement en série, on aura l'équation différentielle d'un ordre infini

$$(a-1)\frac{dy}{dx} + a\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2} + a\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{2.3} + \text{etc.} = 0,$$

à laquelle on satisfait en prenant $y = Ae^{mx}$, pourvu que m soit déterminé par l'équation

$$(a-1)m + a\frac{m^2h}{2} + a\frac{m^3h^2}{2.3} + \text{etc.} = 0,$$

d'où l'on conclut d'abord $m = 0$, puis

$$\frac{a-1}{a} + \frac{mh}{2} + \frac{m^2h^2}{2.3} + \frac{m^3h^3}{2.3.4} + \text{etc.} = 0.$$

Si l'on désigne par m', m'', m''', etc., les valeurs données par cette dernière, il viendra

$$y = A + A'e^{m'x} + A''e^{m''x} + \text{etc.},$$

expression dans laquelle on pourra faire entrer autant de termes qu'on aura trouvé de valeurs distinctes pour m. On s'assurera, par le retour des suites, qu'il en existe au moins une réelle, dont on peut obtenir le développement ordonné suivant les puissances de $\frac{a-1}{a}$, et l'on aura, pour résoudre la question proposée, l'équation

$$y = A + A'e^{m'x},$$

renfermant deux constantes arbitraires.

Feu Charles (de l'Académie des Sciences) a transformé l'équation aux différences mêlées qui nous occupe, en une autre où la variable entre comme exposant de différentiation ou d'intégration. Pour y par-

venir, nous ferons $\frac{h}{a}=b$, ce qui changera l'équation proposée en

$$\Delta y = b\frac{dy}{dx};$$

nous en tirerons successivement

$$y_1 = y + b\frac{dy}{dx},$$
$$y_2 = y_1 + b\frac{dy_1}{dx} = y + 2b\frac{dy}{dx} + b^2\frac{d^2y}{dx^2},$$
$$y_3 = y_2 + b\frac{dy_2}{dx} = y + 3b\frac{dy}{dx} + 3b^2\frac{d^2y}{dx^2} + b^3\frac{d^3y}{dx^3},$$
etc.

Il est facile de conclure de là, et même de s'assurer, *à priori*, que

$$y_n = y + [n]^{1}[\overline{0}]^{-1} b\frac{dy}{dx} + [n]^{2}[\overline{0}]^{-2} b^2\frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\ldots + [n]^{n}[\overline{0}]^{-n} b^n\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Le second membre de cette équation étant multiplié et divisé par $e^{\frac{x}{b}}$, son numérateur deviendra le développement de $\frac{b^n d^n(e^{\frac{x}{b}}y)}{dx^n}$, et l'on aura par conséquent

$$y_n = \frac{b^n}{e^{\frac{x}{b}}}\frac{d^n(e^{\frac{x}{b}}y)}{dx^n}.$$

Si l'on avait cherché les valeurs antécédentes à y, ou correspondantes à des indices négatifs, on aurait eu

$$y_{-n} = \frac{1}{b^n e^{\frac{x}{b}}}\int^n e^{\frac{x}{b}} y\,dx^n.$$

Ces résultats ne paraissent pas propres à faire connaître l'équation primitive de la courbe cherchée, mais ils conduisent à une construction discontinue, analogue à celle que nous avons donnée dans le n° 1071, pour les équations aux différences. En effet, on y peut supposer $y = \varphi(x)$, φ désignant une fonction arbitraire, et déduire de cette fonction, d'après la loi établie, les valeurs des ordonnées y_1, y_2, y_3, etc., correspondantes aux abscisses $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, etc.

Il est évident que cela revient à prendre sur la courbe représentée par l'équation $y=\varphi(x)$, une portion BB', dans laquelle le rapport de AT avec AS soit conforme aux données de la question, et à se servir des points intermédiaires pour obtenir des portions de courbe antérieures et postérieures à la partie BB', en calculant les ordonnées de ces portions par le moyen de leurs différences avec celles de la portion BB', ainsi qu'on l'a indiqué dans le numéro cité. Si l'on voulait rapporter les ordonnées y_n et y_{-n} à leurs abscisses, il faudrait prendre pour première abscisse $x-nh$ et $x+nh$; on aurait alors

$$y_n = \frac{b^n}{e^{-\frac{x-nh}{b}}} \frac{d^n\varphi(x-nh)}{dx^n}, \quad y_{-n} = \frac{1}{b^n e^{\frac{x+nh}{b}}} \int^n dx^n \varphi(x+nh).$$

Des équations aux différences mêlées et partielles.

1268. Le Calcul aux différences mêlées trouve aussi son application dans des recherches purement analytiques ; la détermination des fonctions arbitraires qui entrent d'une manière transcendante dans les intégrales des équations différentielles partielles, dépend d'une équation aux différences mêlées (1061) ; et Français de Colmar a montré, dès l'an 5 (1797), l'usage qu'on peut en faire, pour arriver à l'expression immédiate d'une transformée quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2z}{dudv} + P\frac{dz}{du} + Q\frac{dz}{dv} + Nz = 0,$$

traitée par la méthode du n° 767 (*). En effet, il doit entrer dans l'expression des coefficiens P_n, Q_n, M_n, des différences ou des valeurs successives par rapport à l'indice n, avec des différentielles prises relativement aux variables x et y ; mais les équations qu'il faut traiter renferment plus de deux variables, et les différences y sont partielles aussi bien que les différentielles.

Ne voulant que faire connaître ce genre d'équations, dont M. Paoli s'est spécialement occupé dans le troisième volume de ses *Elementi d'Algebra, opusculo III*, je me bornerai à l'exemple qu'il en a donné à la page 199, sur une équation qui revient à

$$z_{x+1,y} - \frac{dz_{x,y}}{dy} = P_{x,y},$$

(*) Le Mémoire où se trouvent ces recherches m'a été envoyé le 15 nivose an VI (1798), et il était connu d'Arbogast avant ce temps. Il en avait eu des essais que j'ai vus entre ses mains en l'an II (1794). M. Parseval a fait de son côté des recherches semblables, qui sont imprimées dans le tome I des *Mémoires présentés à l'Institut, par divers Savans*, pag. 478.

$P_{x,y}$ étant une fonction donnée de x et y. Si l'on y pose

$$z_{x,y} = \frac{d^x Z_{x,y}}{dy^x}, \text{ d'où } z_{x+1,y} = \frac{d^{x+1} Z_{x+1,y}}{dy^{x+1}},$$

on trouve

$$\frac{d^{x+1} Z_{x+1,y}}{dy^{x+1}} - \frac{d^{x+1} Z_{x,y}}{dy^{x+1}} = \frac{d^{x+1} \Delta_x Z_{x,y}}{dy^{x+1}} = P_{x,y},$$

et

$$\Delta_x Z_{x,y} = \int^{x+1} P_{x,y} dy^{x+1}:$$

intégrant ensuite, par rapport aux différences, en ajoutant une fonction arbitraire $\varphi(y)$, on arrive à

$$Z_{x,y} = \varphi(y) + \Sigma \int^{x+1} P_{x,y} dy^{x+1},$$

$$z_{x,y} = \frac{d^x \varphi(y)}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma \int^{x+1} P_{x,y} dy^{x+1}}{dy^x}.$$

Le second terme de $z_{x,y}$, où les caractéristiques d, Σ et $\int$, sont combinées, équivaut à une intégrale définie aux différences; car

$$\Sigma \int^{x+1} P_{x,y} dy^{x+1} = \int P_{0,y} dy + \int^2 P_{1,y} dy^2 + \int^3 P_{2,y} dy^3 \ldots + \int^x P_{x-1,y} dy^x,$$

et par conséquent

$$\frac{d^x \Sigma \int^{x+1} P_{x,y} dy^{x+1}}{dy^x} = \frac{d^{x-1} P_{0,y}}{dy^{x-1}} + \frac{d^{x-2} P_{1,y}}{dy^{x-2}} + \frac{d^{x-3} P_{2,y}}{dy^{x-3}} \ldots\ldots + P_{x-1,y},$$

ce qui revient à $\frac{\Sigma d^r P_{x-r-1,y}}{dy^r}$, pourvu qu'on renferme cette intégrale entre les limites $r=0$ et $r=x-1$.

M. Paoli traite aussi l'équation du premier degré,

$$\frac{d^n z_{x,y}}{dy^n} + A \frac{d^{n-1} z_{x+1,y}}{dy^{n-1}} \ldots\ldots + M \frac{d z_{x+n-1,y}}{dy} + N z_{x+n} = P_{x,y},$$

et M. Laplace avait intégré la suivante

$$\frac{d^n z_{x,y}}{dy^n} + A \frac{d^{n-1} \Delta_x z_{x,y}}{dy^{n-1}} + B \frac{d^{n-2} \Delta^2{}_x z_{x,y}}{dy^{n-2}} \ldots + N \Delta^n{}_x z_{x,y} = 0,$$

dans son Mémoire de 1779, sur les fonctions génératrices (Voy. aussi la *Théorie analytique des Probabilités*, p. 65). Je ferai observer que pour satisfaire à la première de ces équations, quand $P_{x,y}=0$, et à la seconde, il suffit de poser $z_{x,y} = \alpha^x e^{\beta y}$, et qu'alors une des deux quantités α, β reste indéterminée, ce qui donne lieu à des considérations analogues à celles du n° 1085.

1269. Je terminerai ici la longue tâche que je me suis imposée, en observant que la durée de l'impression a été assez considérable pour que la science ait fait pendant cet intervalle des progrès que j'ignore, et que même l'abondance des matières m'a forcé de laisser de côté des recherches très-estimables, sur des intégrations particulières et sur les séries, dont je n'aurais pu présenter l'extrait sans donner à cet Ouvrage une étendue démesurée. De ce nombre sont celles que M. Pfaff a publiées dans la première partie de ses *Disquisitiones analyticæ*, sur l'équation différentielle

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dydx+(f+gx^n)ydx^2=Xdx^2,$$

sur la sommation des suites d'arcs de cercle dont les tangentes forment des progressions données et sur le retour des suites; mais la table des sommaires suppléera en partie à ces omissions, en indiquant avec exactitude le titre et la place des écrits qui contiennent ces recherches. J'avais eu aussi le dessein de traiter à part la Théorie algébrique des *séries récurrentes*; mais ayant publié, depuis, les principes de cette même théorie, dans le *Complément des Élémens d'Algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, j'ai cru pouvoir la supprimer ici, puisqu'on y suppléera parfaitement, en ajoutant à ce que j'ai dit dans l'ouvrage cité, ce qu'on trouve dans celui-ci, sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, n°s 372 — 381, et ce que contiennent les n°s 1118 — 1121.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

Observation. *Les simples fautes d'impression sont relevées dans un Supplément à l'*Errata *de chaque volume, et le Supplément à la* Table *des sommaires et des citations des deux premiers volumes, est placé à la suite de celle du présent volume.*

PREMIER VOLUME.

PRÉFACE.

Page viij, *ligne* 4 *en remontant, après le mot* différentiel, *ajoutez en note :*

C'est le n° LXVI du *Commercium epistolicum*, cité à la page ix. Newton, en 1722, a fait réimprimer ce livre avec des additions, sous le titre de *Commercium epistolicum de varia re Mathematica, inter celeberrimos præsentis sæculi Mathematicos.* Cette édition ayant été la seule mise dans le commerce, est celle qu'on rencontre le plus fréquemment; elle est du format in-8°. La première, qui ne fut distribuée qu'en présent, est in-4°.

Ibid., *ligne dernière, ajoutez en note :*

Voyez aussi le tom. III de ses Œuvres, p. 167.

Page ix, *ligne dernière, ajoutez en note :*

On trouve dans la Préface du *Recueil de diverses pièces sur la Philosophie, par MM. Leibnitz, Clarke, Newton, etc.*, publié par Desmaizeaux, 3e édition, un exposé très-complet de la dispute sur la propriété de la découverte du Calcul différentiel, et où les passages des écrits originaux sont bien classés; mais l'auteur a laissé d'ailleurs la question indécise. Il rapporte, dans son second volume, des pièces très-intéressantes, qu'on peut voir aussi dans le tome III des Œuvres de Leibnitz. D'Alembert a donné son avis sur ce sujet, à la fin de l'article DIFFÉRENTIEL de l'*Encyclopédie.*

Page x, *ligne* 15, *après le mot* différentiel, *ajoutez en note :*

Jacques Bernoulli, en 1691, disait, en parlant de l'un et de l'autre.... *nisi fortè in differentialium notatione, et operationis aliquo compendio, ab eo non differt* (*Opera*, tom. I, p. 431—432).

C'était d'abord bien peu de chose en apparence, que cette différence de notation des différentielles et cette abréviation de calcul, mais les conséquences ont prouvé que c'était beaucoup ; car on n'y serait point arrivé en laissant aux accroissemens les dénominations indépendantes que leur appliquait Barrow. En se fondant sur de pareilles analogies, on a voulu, de nos jours, faire remonter jusqu'à Fermat, l'origine du Calcul différentiel.

Sans doute que Fermat, par le mécanisme du calcul qu'il emploie pour la détermination des maximums et des minimums (sans en donner d'ailleurs aucun principe) et que Barrow, par la considération du triangle formé par les accroissemens de l'ordonnée et de l'abscisse, touchèrent de bien près au Calcul différentiel; mais quoiqu'on soit frappé aujourd'hui de la ressemblance de ces diverses méthodes, il ne faut pas croire que les contemporains jugeassent comme nous de cette ressemblance. Nous lisons dans leurs formules ce qu'ils n'y voyaient pas eux-mêmes, parce que nous les rapportons à un ensemble qui nous est familier et dont ils n'avaient aucune idée. Tant que des notions conservent l'espèce d'étrangeté qui les accompagne presque toujours lorsqu'elles se présentent pour la première fois, elles tiennent pour ainsi dire trop de place dans l'esprit, pour qu'il puisse apercevoir d'abord leurs conséquences, on leur associer des notions accessoires; c'est ainsi que de simples rapprochemens, de légères modifications, qui nous paraissent aujourd'hui implicitement comprises dans les ouvrages de nos devanciers, leur ont entièrement échappé. On en voit un exemple frappant dans la combinaison faite par Charpit, de deux méthodes trouvées par Lagrange (740). Aussi la stricte justice demande qu'on n'attribue les inventions, surtout lorsqu'il s'agit de théories naissantes, qu'à celui qui les a complètement énoncées.

Page x, *ligne* 4 *de la note, après le mot* scholie, *ajoutez :*

De la proposition VII du second livre.

Page xij, *ligne* 6 *en remontant, à la fin de l'alinéa, ajoutez en note :*

Le premier essai de Calcul intégral, suivant la notation actuelle, paraît avoir été donné par Leibnitz, dans les *Actes de Leipsick*, en 1686. (Voyez dans ses *OEuvres*, tom. III, p. 188).

Page xvj, *ligne* 26, *à la fin de l'alinéa, ajoutez en note :*

Voici ce que pensait d'Alembert sur la considération des fluxions. « Introduire ici » le mouvement, c'est y introduire une idée étrangère, et qui n'est point nécessaire » à la démonstration : d'ailleurs on n'a pas d'idée bien nette de ce que c'est que la » vitesse d'un corps à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable.... » C'est un « rapport dont on ne peut donner d'idée nette que par celle des limites. » (*Encyclopédie*, art. FLUXION).

Ibid., *ligne* 3 *en remontant, après le mot* limites, *ajoutez en note :*

Newton lui-même avait senti l'objection, et pour la lever, il avait eu recours au mot *limite;* car il suffit de donner un nom à ce qui n'en a pas, pour éclaircir les difficultés qui viennent des changemens d'acception qu'éprouvent les mots, et celle qui nous occupe est entièrement de ce genre. Voici comme Newton s'exprime à ce sujet, dans le scholie qui termine la première section du livre I des *Principes : Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nun-*

quam verò transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligitur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo, dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio.

Ce passage explique très-bien ce qu'on doit entendre par les limites, qui ne sont pas les rapports des quantités lorsqu'elles s'évanouissent, mais d'autres quantités dont ces rapports peuvent approcher d'aussi près qu'on voudra. D'Alembert n'a rien ajouté à ces notions, et le second volume des *Mathematical Tracts of Benjamin Robins*, contient un écrit publié en 1735, où se trouvent (p. 55, 57) les deux propositions sur lesquelles le géomètre français appuie sa théorie des limites. Mais quand il perdrait le mérite de la priorité, il lui resterait toujours celui d'avoir propagé et accrédité des idées saines, qui seraient demeurées infructueuses, sans le soin qu'il a mis à les développer et à les rappeler à propos.

Page xvij, *ligne* 21, *à la fin de l'alinéa, ajoutez-en note :*

Lagrange paraît n'avoir d'abord conçu l'exactitude du Calcul différentiel que comme le résultat de la compensation de deux erreurs, dont l'une consiste dans les termes qu'on néglige, l'autre dans l'application à la courbe des déterminations calculées pour le polygone (Voy. *Miscellanea Taurinensia*, tom. II, partie II, p. 172).

Page xxiij, *ligne* 12, *après le mot* indéterminé, *ajoutez en note :*

M. Laplace a depuis présenté les mêmes idées, dans sa *Théorie analytique du Calcul des Probabilités*, p. 72.

Page xl, *ligne* 3, *à la fin de l'alinéa.*

Voyez, dans les Avertissemens placés à la tête du second et du troisième volume, les modifications apportées à cette distribution de l'Ouvrage.

INTRODUCTION.

N° 3, *à la fin, page* 4, *ajoutez :*

On nomme *fonctions entières*, celles dont les variables ne paraissent point en diviseur, ou ne portent point d'exposant négatif; les autres sont des *fonctions fractionnaires*.

Les *fonctions rationnelles* sont celles où les variables n'entrent sous aucun radical, ou ne portent point d'exposant fractionnaire; les autres sont des *fonctions irrationnelles*.

On donne encore aux fonctions des qualifications diverses, qui sont expliquées lorsqu'on en fait usage, et qui sont rappelées dans la Table des matières, au mot *fonction*.

N° 9, à la fin, page 13, ajoutez en note :

On doit rapprocher de cet article la note mise au bas de la page 362 du même volume, et observer que le germe de ces considérations se trouve dans la Ire proposition du X° livre des *Élémens* d'Euclide, où il prouve que *si l'on retranche à une grandeur sa moitié, puis à celle-ci sa moitié, et ainsi de suite, on parviendra à un reste moindre que telle grandeur qu'on voudra :* c'est, en d'autres termes, montrer que la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ etc., poussée à l'infini, a pour limite l'unité.

Note de la page 32, ajoutez :

Dès 1624, Henri Briggs, dans son *Arithmetica logarithmica*, avait donné la loi de la dérivation successive des coefficiens d'une puissance entière et positive du binome; mais il n'en avait point écrit l'expression en signes algébriques. (Voy. *Scriptores logarithmici*, tom. II, p. 165).

Page 50, ligne 14.

L'ouvrage de Muller a pour titre *Traité analytique des Sections coniques, Fluxions et Fluentes,* et c'est à la page 112 de la traduction française, que se trouve le passage cité.

Ibid., *ligne 21.*

Le Mémoire de M. Lavernède est inséré dans le tom. Ier des *Annales de Mathématiques pures et appliquées,* aux pages 18 et 78.

N° 33, page 52.

La série qui termine cet article se trouve dans les *Mathematical Memoirs,* de Landen, tom. I, p. 69.

N° 35, page 55, ajoutez :

Si l'on se demandait ici ce que c'est qu'une puissance à exposant imaginaire, il faudrait passer au n° 42, p. 68, où l'on en trouverait une explication.

N° 42, page 68, à la fin, ajoutez :

Les expressions du sinus et du cosinus en exponentielles imaginaires, qui reviennent si souvent dans la haute Analyse, sont toujours attribuées par Euler à Jean Bernoulli; cependant, on ne les trouve point dans les *Œuvres* de ce dernier; mais elles sont une conséquence très-prochaine de ce qu'on lit à la page 400 du tome Ier. Il se peut aussi qu'Euler les ait connues par son commerce avec Jean Bernoulli, dont il était

le disciple. Il en parle pour la première fois dans le tome VII des *Miscellanea Berolinensia*, p. 177.

N° 43, à la fin, page 70.

Voyez à ce sujet le tome IX des *Nova Acta Acad. Petrop.*, p. 41 de l'*Histoire*, où l'on cite en note une formule d'Euler, qui se trouve dans le tome X de la même collection.

N° 48, à la fin, page 78, ajoutez :

Ces équations forment le lemme I[er] des *Miscellanea analytica*, de Moivre.

N° 54, page 87.

I. Le procédé indiqué dans cet article, comme n'étant sujet à aucune restriction, et qui consiste à regarder comme égaux les développemens de $(u+v)^n$ et de $(v+u)^n$, quel que soit l'exposant n, a été donné par Euler, en 1755 (*Novi Commentarii Acad. Petrop.*, t. V, p. 164), et reproduit, depuis cette époque, dans un grand nombre d'ouvrages, sans qu'on se fût aperçu de son inexactitude. Lagrange croyait encore, en 1806 (*Leçons sur le Calcul des Fonctions*), que l'expression de $\cos x^n$ convenait à toutes les valeurs qu'on peut donner à n; mais en 1811, dans le 2ᵉ volume de la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (p. 212), M. Poisson fit connaître l'erreur qui avait affecté si long-temps ce point de la théorie des fonctions circulaires.

Lorsque l'exposant n est entier et positif, les développemens de $(u+v)^n$ et de $(v+u)^n$ sont en effet composés des mêmes termes, dont le nombre est fini, rangés seulement dans un ordre inverse; mais si n est fractionnaire, les quantités $(u+v)^n$ et $(v+u)^n$ répondent à deux racines différentes, et leur somme ne saurait par conséquent donner le double de la valeur de la quantité cherchée. C'est ce qu'on va voir par le calcul suivant.

II. Ayant posé, comme dans le texte,

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x=u,\qquad \cos x-\sqrt{-1}\sin x=v,$$

d'où

$$2\cos x=u+v,\qquad 2^n\cos x^n=(u+v)^n,$$

M. Poisson donne au développement de la dernière équation la forme

$$2^n\cos x^n=u^n+\frac{m}{1}u^{n-2}.uv+\frac{m(m-1)}{1.2}u^{n-4}.u^2v^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u^{n-6}.u^3v^3+\text{etc.};$$

et à cause que

$$uv = 1, \quad u^n = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx,$$

il trouve

$$\left.\begin{array}{ll} 2^m\cos x^m = & \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \text{etc.} \\ & + \sqrt{-1}[\sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \text{etc.}] \end{array}\right\},$$

expression qui ne peut être réelle, à moins que la fonction de sinus comprise dans la seconde ligne ne s'anéantisse, ce qu'elle fait lorsque l'exposant m est entier et positif.

En effet, le nombre des termes de cette fonction étant égal à $m+1$, le dernier terme

$$\sin(m-2m)x = \sin(-mx) = -\sin mx$$

détruit le premier.

L'avant-dernier terme, affecté de

$$\sin(m-2m+2)x = \sin[-(m-2)x] = -\sin(m-2)x,$$

ayant aussi pour coefficient $\frac{m}{1}$, détruit le second, et ainsi de suite, si le nombre $m+1$ est pair.

Dans le cas opposé, l'exposant m étant pair, il se trouve, au milieu de la formule, un terme affecté de

$$\sin(m-m)x = \sin 0x = 0,$$

et par conséquent nul par lui-même, tandis que les autres se détruisent, comme ci-dessus, par couples, pris à égale distance des extrêmes : il ne reste donc plus que la première ligne, qui est alors susceptible elle-même de la réduction exposée dans le dernier alinéa de la page 88.

III. Prenons maintenant les lettres u et v dans un ordre inverse; développons l'équation

$$2^m\cos x^m = (v+u)^m,$$

dans la forme

$$2^m\cos x^m = v^m + \frac{m}{1}v^{m-2}.uv + \frac{m(m-1)}{1.2}v^{m-4}.u^2v^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}v^{m-6}.u^3v^3 + \text{etc.};$$

et comme

$$v^n = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}2^m\cos x^m = &\cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \text{etc.}\\ &-\sqrt{-1}\left[\sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \text{etc.}\right]\end{aligned}\right\}$$

valeur qui diffère de la précédente par le signe de la partie imaginaire, et qui, par conséquent, doit être, en général, une racine distincte de l'autre : ce n'est donc que dans le cas où cette partie sera nulle, qu'on pourra poser, comme l'a fait Euler,

$$2^m \cos x^m = \frac{(u+v)^m + (v+u)^m}{2}:$$

dans tout autre cas, où ces deux valeurs conservent la forme

$$2^m \cos x^m = A + B\sqrt{-1}, \qquad 2^m \cos x^m = A - B\sqrt{-1},$$

leur demi-somme ne donne que la valeur de la partie réelle qui leur est commune.

IV. M. Poisson vérifie ses conclusions sur un exemple particulier, qu'il forme en prenant $m = \frac{1}{3}$, $x = \pi$, d'où il résulte

$$\left.\begin{aligned}2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = &\cos\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{1}{3}-2)\pi \ldots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ldots(\frac{1}{3}-n+1)}{1.2\ldots n}\cos(\tfrac{1}{3}-2n)\pi + \text{etc.}\\ &\pm\sqrt{-1}\left[\sin\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\sin(\tfrac{1}{3}-2)\pi \ldots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ldots(\frac{1}{3}-n+1)}{1.2\ldots n}\sin(\tfrac{1}{3}-2n)\pi + \text{etc.}\right.\end{aligned}\right\};$$

or, n désignant un nombre entier positif quelconque, π la demi-circonférence, on a

$$\cos\left(\frac{1}{3} - 2n\right)\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2n\pi\right) = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2},$$
$$\sin\left(\frac{1}{3} - 2n\right)\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2n\pi\right) = \sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

et par conséquent

$$2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2} + \text{etc.}\right] = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2}.$$

Ceci donne bien les deux racines imaginaires de l'expression

$$2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-1}\,.\,\sqrt[3]{2};$$

mais la partie réelle qui répond à la série d'Euler, se réduisant à $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, ne donne point la racine réelle, qui est $-\sqrt[3]{2}$; elle donne seulement la moitié de la somme des parties réelles des racines imaginaires, ainsi qu'on l'a annoncé dans l'article II.

Les trois valeurs de l'expression proposée peuvent se tirer d'une seule formule, en y remplaçant l'arc π par 3π, 5π, 7π, etc., dont le cosinus est encore égal à -1; mais il faut s'arrêter à 5π, parce que pour l'arc 7π, il vient $\cos\frac{1}{3}7\pi = \cos(\frac{1}{3}\pi + 2\pi) = \cos\frac{1}{3}\pi$, et ainsi des autres multiples impairs de la demi-circonférence π. Par ce moyen, et en se bornant à l'expression où $\sqrt{-1}$ est affecté du signe $+$, on trouve

$$2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}\,.\,\sqrt[3]{2} = (\cos\tfrac{1}{3}\pi + \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}\pi)\sqrt[3]{2} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2},$$

$$2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = (\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi)\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2},$$

$$2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{3}\right)\sqrt[3]{2} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2},$$

ce qui est exact, et se conclurait aussi de la seconde formule du n° 67, qui, donnant les racines de l'équation $y^n + 1 = 0$, fait trouver celles de $y^3 + 1 = 0$, ou les valeurs de $\sqrt[3]{-1}$. Le tableau ci-dessus fait voir que la racine réelle s'est présentée lorsqu'on a employé le multiple 3π.

En généralisant ce qui précède, on en conclut que, si $m = \frac{p}{q}$, toutes les valeurs de

$$2^{\frac{p}{q}}\cos x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{2^p\cos x^p},$$

s'obtiendront en mettant à la place de x, les arcs

$$x,\quad x+2\pi,\quad x+2.2\pi,\quad x+(q-1)2\pi,$$

dont le nombre est q, et qui, ayant tous le même cosinus que x, donnent la même valeur pour $\cos x^p$. Lorsque $x = \pi$, les résultats se vérifient comme ci-dessus.

V. Ce qu'on vient de lire, quoique très-satisfaisant, laisse encore à desirer quelques éclaircissemens, ce semble; car on n'apperçoit pas toujours, à la simple inspection, comme dans l'exemple de l'article précédent, que la partie imaginaire de l'expression de $2^m\cos x^m$ se détruit en effet. En posant $m = -1$, on tombe sur

$$\frac{1}{2\cos x} = \left.\begin{array}{l}\cos(-x)-\cos(-3x)+\cos(-5x)-\cos(-7x)+\text{etc.}\\ \pm\sqrt{-1}\,[\sin(-x)-\sin(-3x)+\sin(-5x)-\sin(-7x)+\text{etc.}]\end{array}\right\},$$

équation dont le premier membre est toujours réel; il faut donc que la seconde série disparaisse, quel que soit x, ou, ce qui est la même chose, soit le développement d'une fonction identiquement nulle. Cette conséquence se vérifie encore assez aisément dans le cas actuel, en décomposant la série qui multiplie $\sqrt{-1}$, en deux parties,

$$-(\sin x + \sin 5x + \sin 9x + \text{etc.})$$
$$+(\sin 3x + \sin 7x + \sin 11x + \text{etc.}),$$

qu'on peut exprimer au moyen de la formule du n° 1014, qui donne la limite d'une série de sinus d'arcs en progression par différences, ayant p au premier terme et q pour différence. Si l'on fait $q=4x$, et successivement $p=x$, $p=3x$, on trouvera

$$-\frac{\cos(x-2x)}{2\sin 2x}+\frac{\cos(3x-2x)}{2\sin 2x}=0,$$

puisque $\cos -x = \cos x$.

Le cas où $m=\frac{1}{2}$, pour lequel l'expression

$$2^{\frac{1}{2}}\cos x^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{3}{2}x\right)-\frac{1.1}{2.4}\cos\left(-\frac{7}{2}x\right)+\frac{1.1.3}{2.4.6}\cos\left(-\frac{11}{2}x\right)-\text{etc.}$$
$$\pm\sqrt{-1}\left[\sin\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3}{2}x\right)-\frac{1.1}{2.4}\sin\left(-\frac{7}{2}x\right)+\frac{1.1.3}{2.4.6}\sin\left(-\frac{11}{2}x\right)-\text{etc.}\right]$$

doit donner des valeurs toujours réelles, tant que $x<\frac{\pi}{2}$, ou $>\frac{3\pi}{2}$, ne me parait pas aussi facile à traiter en général; et cependant une plus ample connaissance du sujet ne serait pas inutile, car il présente encore d'autres difficultés, lorsqu'on y introduit la considération des équations différentielles, ainsi qu'on le verra dans l'addition au n° 102, (2[e] chapitre, p. 274 du I[er] volume).

VI. En attendant, je ferai remarquer que si l'on développe, par la formule du binome, le second membre de l'équation

$$\cos x^m = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^m,$$

on trouvera

$$\cos x^m = \frac{1}{2^m}\left\{e^{mx\sqrt{-1}}+\frac{m}{1}e^{(m-2)x\sqrt{-1}}+\frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-4)x\sqrt{-1}}+\text{etc.}\right\},$$

expression qui conduit sur-le-champ à celle de l'article II, si l'on y remplace les exponentielles $e^{mx\sqrt{-1}}$, $e^{(m-2)x\sqrt{-1}}$, etc., par leurs valeurs

$\cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$, $\cos(m-2)x+\sqrt{-1}\sin(m-2)x$, etc.

On obtiendrait la seconde expression de $2^m \cos x^m$ (p. 607), si on changeait l'ordre des termes, en développant $(e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})^m$, au lieu de $(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m$, parce que les exponentielles étant alors de la forme $e^{-(m-2n)x\sqrt{-1}}$, répondraient à $\cos(m-2n)x - \sqrt{-1}\sin(m-2n)x$.

N° 55, page 90.

I. Tout ce qui a été dit sur le n° 54, trouve encore son application dans celui-ci. En développant le second membre de l'équation

$$(2\sqrt{-1})^m \sin x^m = (u - v)^m,$$

et supprimant dans chaque terme les facteurs uv, u^2v^2, etc., égaux à l'unité, on parvient à une expression composée de deux parties, l'une réelle et l'autre imaginaire : celle-ci se détruit lorsque l'exposant m est un nombre pair ; mais, dans le cas contraire, elle subsiste, et c'est alors la première qui s'évanouit, en sorte que pour l'un et l'autre de ces cas, on trouve un résultat réel semblable à celui que j'ai donné, d'après Euler, dans l'article cité. La formule générale peut se tirer aussi de celle de l'article II de l'addition précédente, par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$, au moyen duquel $\cos x$ devient $\sin x$; on trouve ensuite aisément, par les formules qui expriment $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$, que

$$\cos(m-2n)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm\left[\cos\frac{m\pi}{2}\cos(m-2n)x + \sin\frac{m\pi}{2}\sin(m-2n)x\right],$$

$$\sin(m-2n)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm\left[\sin\frac{m\pi}{2}\cos(m-2n)x - \cos\frac{m\pi}{2}\sin(m-2n)x\right],$$

et avec ces valeurs on obtient

$$\left.\begin{aligned} 2^m \sin x^m = {} & \left(\cos\frac{m\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{2}\right) \times \\ & \left[\cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x - \text{etc.}\right] \\ & + \left(\sin\frac{m\pi}{2} - \sqrt{-1}\cos\frac{m\pi}{2}\right) \times \\ & \left[\sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\}.$$

II. On arrive peut-être encore plus facilement au résultat, en développant, par la formule du binome, le second membre de l'équation

$$\sin x^m = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^m,$$

ce qui donne

$$(2\sqrt{-1})^m \sin x^m = e^{mx\sqrt{-1}} - \frac{m}{1} e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)x\sqrt{-1}} - \text{etc.},$$

et mettant pour les exponentielles leur expression en cosinus et sinus. Si l'on changeait l'ordre des termes du binome à élever à la puissance m, on aurait un résultat qui ne différerait du précédent que par le signe de $\sqrt{-1}$ dans le second membre.

N° 66, à la fin, page 114, ajoutez :

Les fractions convergentes qu'on déduit d'une fraction continue, formant une série de valeurs de plus en plus approchées de la quantité qu'exprime la fraction continue, donnent un développement de cette quantité en série. En effet, si on la désigne par a, et les fractions convergentes par

$$\frac{A}{A'}, \quad \frac{B}{B'}, \quad \frac{C}{C'}, \quad \frac{D}{D'}, \quad \text{etc.},$$

on aura évidemment

$$a = \frac{A}{A'} + \left(\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'}\right) + \left(\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'}\right) + \left(\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'}\right) + \text{etc.},$$

et la suite des relations

$$\frac{A}{A'} > a, \quad \frac{B}{B'} < a, \quad \frac{C}{C'} > a, \quad \frac{D}{D'} < a, \quad \text{etc.},$$

fait voir que les quantités comprises entre les parenthèses seront alternativement négatives et positives. La fraction continue

$$a = \cfrac{\alpha}{1 + \cfrac{\beta}{1 + \cfrac{\gamma}{1 + \cfrac{\delta}{1 + \text{etc.}}}}}$$

conduit ainsi à la série

$$a = \alpha - \frac{\alpha\beta}{1+\beta} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\beta+\gamma)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(1+\beta+\gamma)(1+\beta+\gamma+\delta+\beta\delta)} + \text{etc.}$$

Euler a aussi remarqué qu'une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, se convertissait très-aisément en fraction continue; j'en ai donné, d'après lui, sur la série

$$x - 1x^2 + 1.2x^3 - 1.2.3x^4 + 1.2.3.4x^5 - \text{etc.},$$

dans une note à la page 591 du troisième volume, un exemple qui pourrait être mieux placé à l'endroit cité de l'Introduction.

Le Journal allemand cité à la page 525 du présent volume, contient la transformation d'une série ascendante, d'ailleurs quelconque, en fraction continue. En posant l'équation

$$C + C'x + C''x^2 + C'''x^3 + \text{etc.} = \cfrac{\alpha}{1 + \cfrac{\alpha' x}{1 + \cfrac{\alpha'' x}{1 + \cfrac{\alpha''' x}{1 + \text{etc.}}}}},$$

M. Soldner a trouvé

$$\begin{aligned}
\alpha &= C,\\
-\alpha\alpha' &= C',\\
\alpha\alpha'\alpha'' &= C'' + C'\alpha',\\
-\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' &= C''' + C''(\alpha' + \alpha''),\\
\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{iv}} &= C^{\text{iv}} + C'''(\alpha' + \alpha'' + \alpha''') + C''\alpha'\alpha''',\\
-\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{iv}}\alpha^{\text{v}} &= C^{\text{v}} + C^{\text{iv}}(\alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{\text{iv}}) + C'''(\alpha''\alpha' + \alpha^{\text{iv}}\alpha' + \alpha^{\text{v}}\alpha''),\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

On peut parvenir à ces formules, par la réduction des fractions convergentes en séries ordinaires, suivant les puissances de x, et leur comparaison avec la série proposée, en ne prenant dans celle-ci qu'un nombre de termes égal au rang de la valeur fractionnaire employée. Par exemple, si l'on s'arrête à la fraction $\frac{\alpha(1 + \alpha'' x)}{1 + (\alpha' + \alpha'')x}$, qui forme la troisième valeur approchée, les trois premiers termes de son développement donneront l'équation

$$\alpha - \alpha\alpha' x + (\alpha'^2\alpha + \alpha\alpha'\alpha'')x^2 = C + C'x + C''x^2,$$

de laquelle on tirera

$$\alpha = C, \quad -\alpha\alpha' = C', \quad \alpha'^2\alpha + \alpha\alpha'\alpha'' = C'', \quad \text{ou} \quad \alpha\alpha'\alpha'' = C'' + C'\alpha'.$$

Le procédé employé par Lagrange pour reconnaître si une série est récurrente, et que j'ai rapporté dans le *Complément des Élémens d'Algèbre*, n'est autre chose que la conversion de cette série en fraction continue, sous la forme

$$S = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{x^2}{p_1 + q_1 x + \cfrac{x^2}{p_2 + q_2 x + \text{etc.}}}},$$

S désignant une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et p, p_1, etc., q, q_1, etc., des quantités constantes.

Je terminerai cette addition en observant, d'après M. Legendre,

Exercices de Calcul intégral, tom. II, p. 223, que « les fractions continues ne doivent être employées qu'avec de grandes précautions, » pour représenter les valeurs des quantités qui sont susceptibles d'être » exprimées par leur moyen, et qu'il faut s'assurer, dans chaque cas, » que la quantité nécessairement omise dans le terme auquel on s'arrête, n'influera pas sensiblement sur la valeur de la fraction. » Cette remarque, amenée par le redressement de quelques erreurs échappées à Euler, rentre, au fond, dans ce qu'on doit faire à l'égard de toute valeur approchée; seulement il pourrait arriver, comme M. Legendre paraît le penser, que la forme des fractions continues fût souvent moins commode que le simple développement en série.

N° 82, page 134, ligne 15, après positifs, *ajoutez en note :*

Lorsqu'on s'en tient aux notions arithmétiques et algébriques exprimées par l'équation $y = a^x$, il n'y a pas lieu à supposer des logarithmes aux nombres négatifs; car en considérant la base comme positive, jamais l'expression de y ne peut changer de signe; et si l'on donnait le signe — à cette base, une partie des nombres n'aurait point de logarithmes, parce qu'une partie des logarithmes réels correspondrait à des expressions imaginaires. En effet, toutes les fois que x serait de la forme $\frac{2p+1}{2q}$, on aurait....... $y = \sqrt[2q]{-a^{2p+1}}$, résultat imaginaire, et la valeur réelle $y = \sqrt[2q]{a^{2p+1}}$, ne se trouverait point dans la série de celles de y, déduites de l'équation $y = (-a)^x$.

D'un autre côté, si l'on fait attention que les racines des degrés pairs sont susceptibles du double signe $\pm$, on sera porté à croire qu'il y a des nombres négatifs dont les logarithmes sont réels, puisque si l'on prend $y = a^{2m}$, on en conclura $\sqrt{y} = \pm a^m$; mais il faut faire attention qu'on ne doit mettre $\pm$ devant la racine quarrée que quand on ignore si a^{2m} vient de $(+a)^{2m}$, ou de $(-a)^{2m}$, ambiguité qui n'a pas lieu maintenant, puisqu'on suppose que a est toujours positif. (Voyez les *Mélanges de la Société de Turin*, tom. II, p. 339.)

PREMIER CHAPITRE DU PREMIER VOLUME.

N° 8, à la fin, page 149, ajoutez :

C'est-à-dire que

$$d(au) = a(u + du) - au = adu.$$

Au n° 42, page 191, à la fin, ajoutez en note :

Condorcet, dans l'ouvrage dont il est fait mention à la page xxij de la Préface, présente d'abord la formation successive des équations différentielles, comme on l'indique ici, et prouve ensuite que par leur moyen on rend identiquement nuls les coef-

ficiens des puissances de h, dans le développement de l'équation

$$f(x+h,\ y+k)=0,$$

lorsqu'on a mis pour k, comme au n° 41, la série qu'il représente. Mais cette marche mène à des calculs assez compliqués.

N° 69, à la fin, page 217, ajoutez :

Donnons pour exemple de ce dernier changement le cas où la différentielle de la fonction qu'on prend pour variable indépendante est

$$dt=\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad \text{d'où il suit} \quad 0=dxd^2x+dyd^2y.$$

En tirant de cette dernière équation la valeur de d^2x, pour la substituer dans la fonction différentielle proposée, on trouve

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}=\frac{dx(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2y}=\frac{dxdt}{d^2y}.$$

N° 71, à la fin, page 222, ajoutez :

Il faudra qu'après la substitution de ces valeurs, dx et ses différentielles de tous les ordres disparaissent de l'expression proposée.

On peut aussi, par le moyen de ces formules, ramener à dépendre immédiatement de x les différentielles d'une fonction y, formées en prenant pour variable indépendante une fonction donnée de x et de y, et faisant sa différentielle constante. On y parvient en combinant avec ces mêmes formules les équations formées par les différentielles 2e, 3e, etc., de la fonction donnée, égalées à zéro.

Si, par exemple, on avait pris pour différentielle constante,

$$dt=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+p^2},$$

on égalerait à zéro ses différentielles, pour former les équations

$$0=d^2x\sqrt{1+p^2}+\frac{pdpdx}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{ou} \quad d^2x(1+p^2)+pqdx^3=0,$$

etc.,

dont on tirerait les valeurs de d^2x, d^3x, etc., qui serviraient à chasser ces différentielles des expressions de d^2y, d^3y, etc.

Soit la fonction proposée

$$\frac{dxdt}{d^2y}=\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y},$$

obtenue précédemment en prenant dt pour constante; en y mettant

la valeur de d^2x, on trouve

$$d^2y = qdx^2 + pd^2x = qdx^2 - \frac{p^2qdx^2}{1+p^2} = \frac{qdx^2}{1+p^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y} = \frac{dx^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{qdx^2} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

formule qui revient à

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

quand on suppose dx constant (69).

N° 79, à la fin, page 237, ajoutez :

On trouvera, vers la fin du Ve chapitre, à partir du n° 330, des exemples d'élimination de fonctions arbitraires, et au n° 343, un procédé spécial pour faciliter cette opération.

N° 83, page 247, ligne dernière, ajoutez :

Aux huit notations indiquées en commençant cette page, il faut joindre celle qu'Euler a proposée en 1786, dans les *Nova Acta Acad. Petrop.* (p. 17), pour abréger l'expression des différentielles partielles. Il veut qu'on écrive

$$\frac{d}{x}V \text{ au lieu de } \frac{dV}{dx}, \qquad \frac{d^m}{x}.\frac{d^n}{\ }V \text{ au lieu de } \frac{d^{m+n}V}{dx^m dy^n},$$

et $\int_x V$ pour l'intégrale $\int V dx$, prise en regardant x comme seule variable.

Cette notation a été employée par M. Servois, dans une intéressante exposition qu'il a faite des principes du Calcul aux différences et du Calcul différentiel, sur laquelle je reviendrai dans la suite, et qui est insérée dans les *Annales de Mathématiques*, tom. V, p. 93.

DEUXIÈME CHAPITRE DU PREMIER VOLUME.

N° 84, à la fin, page 249, ajoutez :

Cette série est nommée très-souvent le *théorème de Maclaurin.* (Voy. le n° 103.)

N° 102, page 275, à la fin, ajoutez :

I. L'addition qui a été faite au n° 54 de l'Introduction, p. 605 de ce volume, a des conséquences qui s'étendent sur le n° 102; car il faut voir comment un développement de $\cos x^n$, formé d'après la remarque de M. Poisson, satisferait à l'équation

$$ny \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

qui, d'après son origine, doit subsister, quel que soit l'exposant n.

En représentant, pour abréger, par X et par X' les deux séries qui entrent dans la valeur de $\cos x^n$, composée sur celle de la page 606, et faisant, en conséquence,

$$y = \cos x^n = \frac{1}{2^n}(X \pm X'\sqrt{-1}), \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{dX}{dx} \pm \frac{dX'}{dx}\sqrt{-1}\right),$$

l'équation (1) deviendra

$$nX \sin x + \frac{dX}{dx} \cos x \pm \left(nX' \sin x + \frac{dX'}{dx} \cos x\right)\sqrt{-1} = 0;$$

dont il faut égaler séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, qui ne peuvent se détruire l'une l'autre : ainsi on aura deux équations

$$nX \sin x + \frac{dX}{dx} \cos x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$nX' \sin x + \frac{dX'}{dx} \cos x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

semblables à (1) et montrant que les séries représentées par X et par X', savoir,

$$X = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.},$$

$$X' = \sin nx + \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(n-6)x + \text{etc.};$$

peuvent être prises pour des valeurs de y.

Les calculs du n° 102 font déjà voir que l'expression de X remplit cette condition, puisque c'est la série qui multiplie le coefficient indéterminé A, dans la valeur de $\cos x^n$, rapportée sur la page 275. Les mêmes calculs, faits en posant

$$y = A' \sin mx + B' \sin(m-1)x + C' \sin(m-2)x + D' \sin(m-3)x + \text{etc.},$$

conduiraient au développement

$$\cos x^n = A'\left\{\sin nx + \tfrac{n}{1}\sin(n-2)x + \tfrac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x + \text{etc.}\right\},$$

ainsi $y = A'X'$ vérifie l'équation (1) aussi bien que $y = AX$, quel que soit d'ailleurs le coefficient constant A' : la valeur

$$\cos x^n = \tfrac{1}{2^n}(X \pm X'\sqrt{-1}),$$

satisfait donc à l'équation (1), et jusqu'ici les deux méthodes suivies pour le développement de la fonction $\cos x^n$, paraissent s'accorder; on est seulement induit à regarder comme incomplète la valeur obtenue dans le n° 102; car d'après ce qu'on vient de voir, on croirait pouvoir supposer

$$y = \cos x^n = AX + A'X',$$

sauf à déterminer les coefficiens A et A' par des valeurs particulières de y.

II. C'est alors que se présentent de nouvelles difficultés. C'est une loi du Calcul intégral (591), que la valeur la plus générale qui satisfait à une équation différentielle, ne doit pas contenir un nombre de constantes arbitraires plus grand que l'exposant de l'ordre de cette équation; et cependant il s'en trouve deux dans la valeur précédente de y, quoiqu'elle ne réponde qu'à une équation différentielle du premier ordre. C'est là une contradiction très-forte, qui se manifeste aussi par les équations (2) et (3), qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + nX\tang x = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x} + nX'\tang x = 0;$$

car en éliminant alors $\tang x$, il en résulte

$$X\mathrm{d}X' - X'\mathrm{d}X = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}X'}{X} - \frac{\mathrm{d}X}{X} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}\,\mathrm{l}X' - \mathrm{d}\,\mathrm{l}X = 0,$$

équation qui est la différentielle de $\mathrm{l}X' - \mathrm{l}X = \mathrm{l}A''$, $\mathrm{l}A''$ désignant une quantité constante quelconque; et en passant aux nombres, on a par conséquent

$$\frac{X'}{X} = A'', \quad \text{et} \quad X' = A''X.$$

Cette relation, nécessaire et incontestable, entre les deux valeurs qui doivent satisfaire à l'équation (1), étant introduite dans

$$y = AX + A'X', \quad \text{donne} \quad y = (A + A'A'')X,$$

valeur qui rentre dans celle que Lagrange a trouvée, savoir, $y=AX$, puisque le coefficient $A+A'A''$ peut être considéré comme une seule constante. Voilà l'expression $\cos x^n$ ramenée à la forme que lui supposait Euler.

On en aurait une autre de la forme $y=A'X'$, si l'on mettait pour X sa valeur $\frac{X'}{A''}$, et qu'on remplaçât par la simple constante A' la quantité complexe $\frac{A}{A''}+A'$.

Cela posé, pour déterminer les constantes A et A', dans les expressions

$$\cos x^n = AX, \quad \cos x^n = A'X',$$

il faudrait encore, comme dans le n° 102, faire $x=0$; il viendrait $A=\frac{1}{2^n}$, ainsi qu'on l'a trouvé d'abord; mais comme la série X' s'évanouit lorsque $x=0$, on aurait $A'=\frac{1}{0}=$ infini, ce qui fait voir que la seconde valeur ne satisfait pas à la question proposée, mais seulement à l'équation différentielle qui est plus générale.

Si l'exposant n était fractionnaire, il semble qu'on introduirait aisément les racines imaginaires dans la formule générale $\cos x^n=AX$, car si l'on posait $n=\frac{1}{p}$, la constante A se déterminerait par l'équation..... $\sqrt[p]{1}=A\sqrt[p]{2}$, dans le premier membre de laquelle on pourrait mettre successivement pour $\sqrt[p]{1}$, les p valeurs dont cette expression est susceptible; et de cette manière l'équation $\cos x^n=AX$ paraîtrait convenir à tous les cas.

III. Cependant l'exemple numérique donné par M. Poisson, sur $(\cos\pi)^{\frac{1}{3}}$ (p. 607), ne laissant aucun doute sur l'inexactitude de cette équation dans ce cas particulier, ne permet pas de supposer que la fonction X' soit toujours nulle, ou exclue du développement de $\cos x^n$; comment donc concilier les deux méthodes employées pour parvenir à ce développement? à moins de dire que les séries X et X' ne vérifient pas l'équation (1) quand n est un nombre fractionnaire, ce qu'on pourrait peut-être inférer de la marche même des calculs du n° 102, ou de la substitution immédiate des séries X et X' dans l'équation (1). Quel que soit le terme où l'on arrête ces séries, elles introduisent dans l'équation un dernier terme qui n'est détruit par aucun autre,

mais qui disparaît par son coefficient, lorsque n est un nombre entier, auquel cas l'équation (1) est complètement vérifiée.

En effet, si, conformément à ce qui a été trouvé sur la page 275 (du premier volume) on fait $m=n$, $B=0$, $D=0$, etc., dans l'équation qui termine la page 274, elle devient

$$[2C-2nA]\sin(n-1)x+[4E-2(n-1)C]\sin(n-3)x+[6G-2(n-2)E]\sin(n-5)x+\text{etc.}=0\ ;$$

et si l'on borne l'expression de $\cos x^n$ aux termes

$$A\cos nx + C\cos(n-2)x + E\cos(n-4)x\ ;$$

en négligeant le terme $G\cos(n-6)x$ et les suivans, il restera dans l'équation précédente le terme $-2(n-2)E\sin(n-5)x$, dont le coefficient $2(n-2)E=n(n-1)(n-2)A$ ne disparaîtra de lui-même que pour les exposans 1 et 2. On trouverait un résultat analogue pour la série

$$A'\sin nx + C'\sin(n-2)x + E'\sin(n-4)x + \text{etc.}$$

Si les séries X et X' procédaient suivant les puissances ascendantes de x, la supposition de x très-petit les rendrait convergentes; le terme restant, qui serait affecté d'une puissance x^r, devenant d'autant moindre que r serait plus grand, laisserait aussi d'autant moins d'erreur dans l'équation, qui approcherait ainsi de plus en plus d'être vérifiée, à mesure qu'on pousserait le calcul plus loin. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le second membre de l'équation

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.},$$

par rapport au premier; mais peut-on dire la même chose de l'équation (1), où le terme qu'on néglige est composé d'une fonction $\cos rx$, ou $\sin rx$, qui ne tend point à diminuer, multipliée par des coefficiens qui ne forment pas une série décroissante?

Si cette réflexion était bien fondée, il ne serait permis d'employer, même comme développemens, que des séries dont la forme serait telle qu'elles eussent été convergentes au moins dans un cas, ainsi que l'est, par exemple, la série $\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+$ etc. du n° 25 de l'Introduction, lorsque a est peu différent de l'unité, quoiqu'elle devienne ensuite très-divergente.

Les développemens de $\cos x^n$ et de $\sin x^n$ n'ayant jamais été employés que pour un exposant entier positif, cas où les divers moyens d'y

parvenir s'accordent, il est tout simple que les difficultés que je viens d'exposer n'aient pas encore été remarquées; elles ne méritent même de l'être que comme une de ces circonstances où les résultats du calcul offrent des paradoxes qui demandent une interprétation particulière. On en a rencontré souvent de telles, qui ont été très-heureusement expliquées; celle-ci le sera peut-être bientôt; mais, en attendant, la nature de mon Ouvrage me faisait un devoir de ne pas la passer sous silence, et c'est aussi dans cette intention que j'y ajouterai encore quelques observations qui m'ont été communiquées par M. Deflers, maître de conférences à l'École Normale.

IV. On a, quel que soit x,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

série qui finit toujours par être convergente; on conclut de là nécessairement

$$\begin{aligned}\cos x^n &= \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right)^n, \\ &= 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \text{etc. } (*).\end{aligned}$$

Cette série, dans laquelle A, B, C, etc., désignent des coefficiens constans et réels, ne saurait renfermer que des puissances paires de x, quand même le nombre n serait fractionnaire, et l'on en déduirait toutes les valeurs dont $\cos x^n$ est alors susceptible, en la multipliant par celles que prend, dans ce cas, la puissance n de l'unité. Comment concilier cette

(*) Je ferai remarquer ici que les séries qui expriment $\sin x$ et $\cos x$ par l'arc, sont plus générales que leurs inverses, qui expriment l'arc par le sinus ou le cosinus: les dernières ne conduisent qu'au plus petit des arcs qui ont le même sinus ou le même cosinus, tandis que les premières donnent le sinus ou le cosinus, quel que soit celui de ces arcs qu'on prenne pour x; c'est ce que prouve leur tendance à converger, quelque grande que soit la valeur de x (*Int.* 22), et leur décomposition en facteurs (1180).

Il ne faudrait pas néanmoins étendre cette affirmation, au développement de $\cos x^n$; car il demeure réel pour toutes les valeurs de x, quoiqu'il soit prouvé que cette fonction doit, lorsque n est une fraction de dénominateur pair, devenir imaginaire pour toutes les valeurs de x qui rendent $\cos x$ négatif; et cela tient sans doute à ce que, n'étant pas de la même forme que celui de $\cos x$, il cesse d'être convergent quand x atteint une certaine grandeur. Pareille chose arrive au développement de $\sqrt{1-x^2}$, toujours réel; mais qui n'est plus convergent quand $x > 1$. Ces remarques, et celles du texte, montrent avec quelle circonspection il faut employer les suites infinies.

forme avec l'expression

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\Big\{\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \text{etc.}$$
$$+\sqrt{-1}\,[\,\sin nx + \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x + \text{etc.}]\Big\},$$

dans laquelle la seconde ligne, développée suivant les puissances de x, n'en contiendrait que d'impaires, et qui n'a pas, comme la précédente, la propriété de demeurer la même quand on change x en $-x$? Il semble encore qu'on ne peut sortir de cet embarras qu'en admettant que la fonction

$$\sin nx + \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x + \text{etc.},$$

soit nulle, quelque valeur qu'on donne à x, ce qui n'empêcherait pas qu'elle satisfît à l'équation (1), puisque cette équation est vérifiée lorsqu'on y fait en même temps $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$.

V. Un moyen bien simple s'offre pour examiner cette conséquence, c'est de substituer aux sinus leurs développemens, et de chercher si le coefficient qui multiplie chaque puissance de x s'évanouit indépendamment de toute valeur de n.

On trouve d'abord

$$X = \left.\begin{aligned} &\frac{x}{1}\Big[n + \frac{n}{1}(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6) + \text{etc.}\Big] \\ -&\frac{x^3}{1.2.3}\Big[n^3 + \frac{n}{1}(n-2)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^3 + \text{etc.}\Big] \\ +&\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\Big[n^5 + \frac{n}{1}(n-2)^5 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^5 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^5 + \text{etc.}\Big] \\ -&\text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

dont le terme général est affecté de la série

$$n^i + \frac{n}{1}(n-2)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^i + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^i + \text{etc.},$$

i désignant un nombre impair. Pour parvenir à évaluer cette série, M. Deflers considère la fonction

$$T_i = n^i t^n + \frac{n}{1}(n-2)^i t^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^i t^{n-4} + \text{etc.},$$

dont elle dérive quand on suppose $t=1$; il détermine la relation des

valeurs consécutives T_i, T_{i+1}, en observant que

$$\frac{dT_i}{dt} = n^{i+1}t^{n-1} + \frac{n}{1}(n-2)^{i+1}t^{n-3} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{i+1}t^{n-5} + \text{etc.}$$

revient à

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{T_{i+1}}{t}, \quad \text{d'où il suit} \quad T_{i+1} = \frac{tdT_i}{dt}.$$

En faisant successivement $i=0$, $=1$, $=2$, etc., dans cette équation, on en déduira

$$T_1 = \frac{tdT_0}{dt}, \quad T_2 = \frac{td.tdT_0}{dt^2}, \quad T_3 = \frac{t.d.td.\ tdT_0}{dt^3},$$
$$\ldots\ldots . T_i = \frac{td.t.d.t\ldots dtdT_0}{dt^i},$$

où

$$T_0 = t^n + \frac{n}{1}t^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}t^{n-4} + \text{etc.} = t^n + \frac{n}{1}t^{n-1}t^{-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}t^{n-2}.t^{-2} + \text{etc.}$$
$$= (t+t^{-1})^n;$$

et on facilitera la formation de T_1, T_2, etc., en posant

$$t + t^{-1} = z, \quad t\frac{dz}{dt} = t(1-t^{-2}) = t - t^{-1} = z'.$$

Il en résultera d'abord

$$T_1 = \frac{td.z^n}{dt} = nz^{n-1}t\frac{dz}{dt} = nz^{n-1}z',$$

expression qui s'évanouit quand $t=1$, à cause que $z'=0$; et il en sera de même pour tous les cas où l'indice i est impair.

En effet, chacune des valeurs T_2, T_3, etc., s'obtiendra en multipliant par t la différentielle de la précédente, avec l'attention de faire

$$\frac{tdz}{dt} = z' \quad \text{et} \quad \frac{tdz'}{dt} = z, \quad \text{parce que} \quad \frac{tdz'}{dt} = t(1+t^{-2}) = t + t^{-1}.$$

On trouve ainsi

$$T_2 = n(n-1)z^{n-2}z'^2 + nz^n,$$
$$T_3 = n(n-1)(n-2)z^{n-3}z'^3 + \{2n(n-1)+n^2\}z^{n-1}z',$$
etc.,

expressions dans lesquelles la somme des exposans de z et de z' est

toujours égale à n, le plus haut exposant de z' est égal à l'indice que porte la lettre T, et ces exposans varient de deux unités, d'un terme à l'autre, en sorte que tous leurs termes sont affectés de z' quand i est impair, et s'évanouissent par conséquent lorsque $t=1$; mais quand i est pair, le dernier terme subsiste. La continuation indéfinie de cette loi se prouve en considérant que si $Az^{n-k}z'^{k}$ représente un terme quelconque de T_i, la différentielle de ce terme, multipliée par t, donnera dans T_{i+1} les deux termes

$$A(n-k)z^{n-k-1}z'^{k+1} + kAz^{n-k+1}z'^{k-1},$$

où la somme des exposans est toujours n, et où celui de z' variant aussi de 2 unités, sera pair ou impair, selon que k sera impair ou pair. De plus, si k était nul, on n'aurait pas le terme affecté de z'^{k-1}, puisqu'il est multiplié par k. Il suit de là que la loi ayant été observée pour les premières valeurs T_1, T_2, T_3, continuera de l'être indéfiniment, et par conséquent tous les coefficiens du développement de X' qui répondent à des valeurs impaires de i s'évanouiront.

Suivant ce procédé, la fonction X' est donc le développement d'une fonction toujours nulle, quel que soit x, ce qui s'accorde bien avec la remarque de l'article IV; mais alors comment se fait-il qu'elle prenne une valeur assignable lorsqu'on fait $x=\pi$, n étant un nombre fractionnaire, ainsi qu'on l'a vu à la page 607?

N° 113, à la fin, page 299, ajoutez :

I. Dans ces derniers temps, le développement des fonctions en séries a beaucoup occupé les géomètres; on ferait un ouvrage considérable, si l'on se proposait de rassembler tout ce qu'ils ont écrit sur ce sujet, et j'ai dû me borner aux formules les plus connues et les plus employées: celles de Lagrange et de M. Laplace remplissent bien ces conditions, et offrent de nombreuses conséquences, parmi lesquelles se trouve le théorème présenté à l'Institut en l'an 4 (1796), par Burmann; mais ce théorème, fort général, pouvant aussi conduire à celui de Lagrange, et à beaucoup d'autres, je vais l'exposer ici, d'après M. Legendre, qui en a fait le rapport à l'Institut. (Voy. les *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques*, tom. II, p. 14, et les *Exercices de Calcul intégral*, tom. II, p. 230).

Si l'on désigne par X une fonction de x, cette dernière étant fonc-

tion de la variable u, il s'agit de développer la première de ces quantités suivant les puissances de la troisième. Si l'on commençait par éliminer x de X, qui deviendrait alors une fonction de u, le théorème de Maclaurin (103) donnerait tout de suite

$$X = T + T'\frac{u}{1} + T''\frac{u^2}{1.2} + T'''\frac{u^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

formule dans laquelle $T^{(n)} = \frac{d^n X}{du^n}$, lorsqu'on a fait $u=0$, après les différentiations.

Le théorème de Burmann consiste à transformer la formule ci-dessus en

$$\frac{d^n X}{du^n} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right]}{dz^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

u et z étant deux fonctions de x qui s'évanouissent en même temps, mais dont le rapport demeure fini. Pour le démontrer, il s'appuie sur les deux propositions suivantes.

II. Premièrement, quand on fait $z=0$, après des différentiations, effectuées en regardant u comme une fonction implicite de z, on a

$$\frac{d^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\frac{d^{n-r}\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{dz^{n-r}}\ldots\ldots(2);$$

car si l'on pose $\frac{z}{u} = p$, qu'on y remplace u par son expression en z, puis qu'on développe p^{n-r} en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z, il viendra

$$u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n = z^r\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r} = z^r(A + A'z + A''z^2 \ldots + A^{(m)}z^m + \text{etc.});$$

et prenant le n^e coefficient différentiel du terme général, on obtiendra

$$(r+m)(r+m-1)\ldots(r+m-n+1)A^{(m)}z^{r+m-n},$$

expression qui, lorsque $z=0$, s'évanouit toujours, excepté quand .... $r+m-n=0$, cas où l'on a

$$\frac{d^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1A^{(n-r)};$$

or, $A^{(n-r)} = \frac{d^{n-r}.p^{n-r}}{1.2.3\ldots(n-r)}$: donc

$$\frac{d^n.u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ \frac{d^{n-r}\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{dz^{n-r}}.$$

Secondement, sous la même condition,

$$\frac{d^{n-1}.u'd.p^n}{dz^n} = \frac{d^n.u^rp^n}{dz^n}\ldots\ldots\ldots(3);$$

car

$$\frac{u'd.p^n}{dz} = nu^rp^{n-1}\frac{dp}{dz} = nu^r\left(\frac{z}{u}\right)^{n-1}\frac{dp}{dz} = nz^r\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r-1}\frac{dp}{dz}$$
$$= nz^rp^{n-r-1}\frac{dp}{dz} = \frac{n}{n-r}z^r\frac{d.p^{n-r}}{dz};$$

mettant pour p^{n-r} son développement, et effectuant la différentiation indiquée, on trouve

$$\frac{u'd.p^n}{dz} = \frac{n}{n-r}z^r(A'+2A''z+3A'''z^2\ldots\ldots+mA^{(m)}z^{m-1}+\text{etc.});$$

différentiant $n-1$ fois cette équation, on aura, d'après le terme général $d^{n-1}.\frac{mn}{n-r}A^{(m)}z^{r+m-1}$, un résultat nul tant que $r+m-1>n-1$, nul aussi lorsque $r+m-1<n-1$; ainsi, on a seulement

$$\frac{d^{n-1}.u'd.p^n}{dz^n} = n(n-1)(n-2)\ldots.1A^{(n-r)} = \frac{d^n.u^rp^n}{dz^n},$$

d'après la première proposition.

Cela suppose $r<n$; car lorsque $r=n$, on a

$$\frac{u'd.p^n}{dz} = nu^np^{n-1}\frac{dp}{dz} = nuz^{n-1}\frac{dp}{dz};$$

et quand on aura différentié $n-1$ fois ce produit, il restera encore dans tous les termes au moins l'un des facteurs z ou u (91) : il s'évanouira donc lorsque $z=0$. Il en sera de même pour $r>n$, à cause du facteur u qui restera dans tous les termes.

III. Cela posé, considérons la fonction Xp^n, et mettons-y pour X le développement indiqué dans l'article I, puis prenons-en le coefficient différentiel de l'ordre n, par rapport à z; nous obtiendrons

$$\frac{d^n.Xp^n}{dz^n} = T\frac{d^n.p^n}{dz^n} + \frac{T'}{1}\frac{d^n.up^n}{dz^n} + \frac{T''}{1.2}\frac{d^n.u^2p^n}{dz^n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{T^{(r)}}{1.2.3\ldots r}\frac{d^n.u^rp^n}{dz^n} + \text{etc.};$$

et substituant pour

$$\frac{d^n.up^n}{dz^n},\quad \frac{d^n.u^2p^n}{dz^n},\ldots\ldots\frac{d^n.u^rp^n}{dz^n},\quad \text{etc.},$$

leurs valeurs tirées de l'équation (2), nous aurons

$$\frac{d^n.Xp^n}{dz^n} = T\frac{d^n.p^n}{dz^n} + \frac{n}{1}T'\frac{d^{n-1}.p^{n-1}}{dz^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}.p^{n-2}}{dz^{n-2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nT^{(n-1)}\frac{dp}{dz} + T^{(n)},$$

expression dont les coefficiens numériques sont ceux de la formule du binome, et qui se termine de même, parce que l'exposant n est entier.

Traitant de même l'équation

$$\frac{d^{n-1}.Xd.p^n}{dz^n} = T\frac{d^n.p^n}{dz^n} + \frac{T'}{1}\frac{d^{n-1}.ud.p^n}{dz^n} + \frac{T''}{1.2}\frac{d^{n-1}.u^2d.p^n}{dz^n} + \text{etc.};$$

en observant que, par l'équation (5) et par l'équation (2),

$$\frac{d^{n-1}.u^rd.p^n}{dz^n} = \frac{d^n.u^rp^n}{dz^n} = n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{d^{n-r}.p^{n-r}}{dz^{n-r}},$$

nous arriverons à

$$\frac{d^{n-1}.Xd.p^n}{dz^n} = T\frac{d^n.p^n}{dz^n} + \frac{n}{1}T'\frac{d^{n-1}.p^{n-1}}{dz^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}T''\frac{d^{n-2}.p^{n-2}}{dz^{n-2}}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{1}T^{(n-1)}\frac{dp}{dz},$$

expression qui finit un terme avant la précédente, à cause que

$$\frac{d^{n-1}.u^nd.p^n}{dz^{n-1}} = 0.$$

Maintenant, si nous prenons la différence de ces deux expressions, nous aurons

$$\frac{d^n.Xp^n}{dz^n} - \frac{d^{n-1}.Xd.p^n}{dz^n} = T^{(n)} = \frac{dX}{du^n};$$

et en réduisant en un seul les deux termes du premier membre, nous trouverons

$$\frac{d^{n-1}\left(\frac{d.Xp^n}{dz} - X\frac{d.p^n}{dz}\right)}{dz^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{dX}{dz}p^n\right)}{dz^{n-1}} = \frac{d^nX}{du^n},$$

ce qui est l'équation (1), ou le théorème de Burmann.

IV. Par ce théorème, on obtient d'abord celui de Lagrange, en posant

$$z=x-a,\quad \text{et}\quad u=\frac{x-a}{\varphi(x)},\quad \text{d'où}\quad p=\varphi(x),\quad dz=dx,$$

et

$$\frac{d^nX}{du^n}=\frac{d^{n-1}\left(\varphi^n\frac{dX}{dz}\right)}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-1}(\varphi^n\psi')}{da^{n-1}},$$

en changeant X en $\psi(x)$, puis faisant $z=0$ et $x=a$, après les différentiations ; on remarquera ensuite que l'équation $u=\frac{x-a}{\varphi(x)}$ donne $x=a+u\varphi(x)$; et si l'on fait $u=1$, qu'on écrive y au lieu de x, on tombera sur la formule du n° 109.

En posant

$$X=\psi(x),\quad u=\varphi(x)-\varphi(a),\quad z=x-a,$$

on obtiendra

$$\psi(x)=\psi(a)+\frac{T'}{1}[\varphi(x)-\varphi(a)]+\frac{T''}{1.2}[\varphi(x)-\varphi(a)]^2+\text{etc.},$$

où

$$T^{(n)}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\right)^{-n}\psi'(x)\right\}.$$

V. En posant $\varphi(a)=0$, les formules précédentes se simplifient, et devenant

$$\psi(x)=\psi(a)+\frac{T'}{1}\varphi(x)+\frac{T''}{1.2}\varphi(x)^2+\frac{T'''}{1.2.3}\varphi(x)^3+\text{etc.},$$
$$T^{(n)}=\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}\left[\left(\frac{\varphi(x)}{x-a}\right)^{-n}\psi'(x)\right],$$

donnent le développement de la fonction $\psi(x)$, ordonné suivant les puissances de $\varphi(x)$, formule très-remarquable ; et comme a désigne une valeur de x qui fait évanouir la dernière de ces fonctions, il y aura par conséquent un nombre de développemens égal à celui de ces valeurs.

M. Legendre prend pour exemple

$$\psi(x)=b^x,\qquad \varphi(x)=xc^x,$$

d'où l'on déduit

$$a=0,\quad \psi'(x)=b^x\mathrm{l}b,$$
$$T^{(n)}=\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}[c^{-nx}b^x\mathrm{l}b]=\mathrm{l}b(\mathrm{l}b-n\,\mathrm{l}c)^{n-1}c^{-nx}b^x;$$

et faisant $x=0$, après les différentiations, on trouve

$$b^x = 1 + 1b\frac{xc^x}{1} + 1b(1b - 21c)\frac{x^2c^{2x}}{1.2} + 1b(1b - 31c)^2\frac{x^3c^{3x}}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Depuis l'impression de l'article auquel se rapporte cette addition, M. Servois a publié, dans le tom. V des *Annales de Mathématiques* (p. 93), un Mémoire déjà cité (p. 615), contenant un grand nombre de formules de développemens, très-générales, et qui comprennent, comme cas particuliers, toutes celles que j'ai exposées; j'y renvoie donc le lecteur, ainsi qu'au dernier chapitre des *Disquisitiones analyticæ*, où M. Pfaff entre dans un grand détail sur le retour des suites.

N° 116, *page* 301, *et* 118, *page* 306.

Il est à propos de remarquer que la première série du n° 116, reprise au n° 118, en faisant connaître l'accroissement h de la variable x, est, au fond, l'inverse du théorème de Taylor. Pour la présenter explicitement sous ce point de vue, il faut partir de l'équation

$$u' - u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ce qui introduira la quantité $u'-u$ à la place de $-u$, hors des coefficiens différentiels seulement; alors la formule sera ordonnée suivant les puissances de l'accroissement de la fonction.

M. Pfaff, en employant la notation des différences (881), c'est-à-dire en faisant $h = \Delta x$, lui a donné la forme

$$\Delta x = \Delta u \frac{1}{\frac{du}{dx}} - \Delta u^2 \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{1}{\frac{du^3}{dx^3}} + \text{etc.},$$

et en a fait plusieurs applications, dans le tome III des nouveaux *Mémoires de l'Acad. de Pétersbourg* (années 1809—1810, p. 109).

N° 129, *page* 325.

La question énoncée au commencement de cette page revient évidemment à celle-ci : développer $\varphi(y)$ suivant les puissances de $\psi(y)$, puisque y étant une fonction de x, cette dernière variable est une fonction de y. La formule de l'article V de l'addition au n° 113, p. 623, trouverait donc ici son application.

Au bas de la page.

Par la formule (N) de la page 316, on aurait

$$\frac{d^n\varphi(y)}{dx^n}=\frac{d^n\varphi(y)}{dy^n}T'^n_0+n\frac{d^{n-1}\varphi(y)}{dy^{n-1}}T'^{n-1}_1+n(n-1)\frac{d^{n-2}\varphi(y)}{dy^{n-2}}T'^{n-2}_2\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+n(n-1)(n-2)\ldots 2\frac{d\varphi(y)}{dy}T'_{n-1},$$

les fonctions T'^n_0, T'^{n-1}_1, etc., ne contenant que des coefficiens différentiels relatifs à x. En partant de

$$T'_0=\frac{dy}{dx},\quad T'_1=\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2},\quad T'_2=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3},\quad \text{etc.},$$

la fonction T'^r_s, qui représenterait alors le coefficient de dx^s, dans le développement de

$$\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^2}{1.2.3}+\text{etc.}\right)^r,$$

aurait pour expression

$$\frac{1.2.3\ldots r}{1.2\ldots a.1.2\ldots b.1.2\ldots c\times\text{etc.}}\times\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^b\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^c\text{ etc.}}{(1)^a(1.2)^b(1.2.3)^c\text{ etc.}},$$

sous la condition que

$$a+b+c+\text{etc.}=r,$$
$$b+2c+\text{etc.}=s\quad (\textit{Int. }24).$$

CHAP. III DU PREMIER VOLUME.

N° 137, page 339.

En rapportant ici le raisonnement sur lequel s'appuie Lagrange, pour prouver que le développement général de l'accroissement d'une fonction ordonnée suivant les puissances de celui de la variable indépendante, ne doit point contenir de puissances fractionnaires de ce dernier, c'est à dessein que je me suis servi du mot « paraît » (ligne 11 en remontant), parce qu'en effet ce n'est là qu'un apperçu qui aurait besoin d'être justifié par des preuves que l'auteur de la *Théorie des Fonctions* n'a point données. Le principe qu'il emploie est très-admissible, comme explication de la circonstance qui rend la série de Taylor

inapplicable, mais non pas comme un principe évident par lui-même dans l'état général des choses.

Ce défaut était trop frappant pour n'être pas saisi tout de suite par la grande majorité des lecteurs en état d'entendre le sujet; mais qui pouvait penser à faire d'une remarque aussi facile, l'objet d'une critique sérieuse, pour un ouvrage sorti d'une main à laquelle la science avait tant d'obligations?

N° 138, page 340, ligne 13, après négatives de h, *ajoutez :*

La fonction proposée devenant infinie, lorsque $x=a$, ne peut rentrer dans les quantités finies, lorsque $x=a+h$, que par une différence infinie.

N° 157, à la fin, page 364, ajoutez :

Si toutefois la fonction u est réelle avant et après la valeur $x=a$. Soit, pour exemple

$$u=x^2\pm x^{\frac{5}{2}},\quad \frac{du}{dx}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=2\pm\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}};$$

ici la différentiation a fait disparaître le facteur x^2; doit-on cependant regarder comme un minimum la valeur $u=0$ correspondante à $x=0$? C'est ce qui n'a pas lieu ordinairement, parce qu'on se règle à cet égard sur la marche des courbes (181); mais il me semble qu'à ne considérer les choses que par rapport aux grandeurs abstraites seulement, la fonction u, ne passant point du positif au négatif, trouve ici le terme de ses décroissemens, et c'est tout ce qu'il faut pour constituer un véritable minimum, ainsi que je l'ai dit vers la fin du n° 159.

N° 162, à la fin, page 370.

Il n'est pas nécessaire de faire ici $M=1$, pour obtenir $x=e$, puisque $M=\mathrm{l}e$, dans un système quelconque.

N° 166, page 376, ligne 13, après imaginaires, *ajoutez :*

ou des racines égales en nombre pair.

Ligne 19, après naires, *ajoutez :*

ou des racines égales.

A la fin du même numéro, page 578.

La considération des racines égales avait d'abord échappé aux géomètres; c'est M. Français qui en fit sentir la nécessité, dans le tome III des *Annales de Mathématiques* (p. 132 et 197).

En se bornant aux fonctions de deux variables x, y, la fonction qui ne doit pas changer de signe, par les diverses valeurs des accroissemens h et k, est

$$Fh^2 + 2Ghk + Hk^2,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$h^2\left\{F + 2G\frac{k}{h} + H\frac{k^2}{h^2}\right\} = h^2\{F + 2G\alpha + H\alpha^2\}$$
$$= Hh^2\left\{\left(\frac{G}{H}+\alpha\right)^2 + \frac{FH-G^2}{H^2}\right\},$$

en posant $\frac{k}{h}=\alpha$. Elle demeure de même signe que H, non-seulement lorsque $FH > G^2$, mais encore lorsque $FH = G^2$, parce qu'elle devient alors

$$Hh^2\left(\frac{G}{H}+\alpha\right)^2.$$

La condition $FH = G^2$ est observée lorsque les équations

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0,$$

ont lieu par un facteur commun, ce qui laisse la question indéterminée, puisqu'on n'a qu'une seule équation entre les variables x et y. En effet, si l'on pose

$$\frac{du}{dx} = PV, \quad \frac{du}{dy} = QV,$$

il suffira de faire $V=0$, pour obtenir les deux conditions du maximum et du minimum, et l'on aura en outre

$$\frac{d^2u}{dx^2} = V\frac{dP}{dx} + P\frac{dV}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = V\frac{dP}{dy} + P\frac{dV}{dy},$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = V\frac{dQ}{dy} + Q\frac{dV}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = V\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dV}{dx}.$$

Si l'on fait dans ces valeurs, $V=0$, elles se réduiront à

$$\left.\begin{array}{ll} F = P\frac{dV}{dx}, & G = P\frac{dV}{dy} \\ H = Q\frac{dV}{dy}, & G = Q\frac{dV}{dx}\end{array}\right\}, \text{ d'où il suit } FH = G^2.$$

Il faut remarquer que lorsque l'équation $FH = G^2$ a lieu en même temps que $V = 0$, les différentielles totales d^2u, d^3u, etc. à l'infini, s'évanouissent dès qu'on y introduit la relation que donne l'équation $dV = 0$. En effet, quand on regarde y comme une fonction de x, on a

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dy}d^2y,$$

qui, dans le cas présent où $\frac{du}{dy} = 0$, et avec les dénominations employées plus haut, se réduit d'abord à

$$\begin{aligned} d^2u &= Fdx^2 + 2Gdxdy + Hdy^2 \\ &= Hdx^2\left[\left(\frac{G}{H} + \frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{FH - G^2}{H^2}\right], \end{aligned}$$

et à cause que $FH = G^2$,

$$d^2u = Hdx^2\left(\frac{G}{H} + \frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{H}(Gdx + Hdy)^2;$$

mais prenant les valeurs de G et de H, dans la supposition de $V = 0$, pour les substituer dans la parenthèse, on trouve

$$d^2u = \frac{Q^2}{H}\left(\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy\right)^2 = \frac{Q^2}{H}dV^2,$$

expression nulle quand $dV = 0$.

Il suit de là que l'équation $V = 0$ rend constantes les valeurs de la fonction u; mais hors de cette relation, d^2u n'est pas nulle, et son signe dépend seulement de celui de H : ainsi pour toutes les valeurs des variables x et y autres que celles qui satisfont à $V = 0$, il y aura diminution de u si H est négatif, et augmentation s'il est positif; donc u sera un véritable maximum dans le premier cas, et un minimum dans le second.

Il existera donc, dans ce cas, une infinité de systèmes de valeurs des variables x et y, qui rendront en même temps la fonction u, ou un maximum, ou un minimum; c'est ce qui sera éclairci par la considération des surfaces courbes, dans l'addition au n° 329.

CHAP. IV DU PREMIER VOLUME.

N° 190, à la fin, page 408, ajoutez :

Voici des exemples très-simples de ces circonstances,

L'équation $y = x^5 - (b^2 + c^2)x^3 + b^2c^2x$, qui répond d'abord à la figure 15, où A désigne l'origine des coordonnées, devenant $y = x^5$, FIG. 15 et 16.
lorsque b et c sont nuls, prend, par la réunion des points B, C, A, E, G en un seul, au point A, la figure 16, et les trois inflexions C, A, E, n'en font plus qu'une seule.

L'équation $y = x^4 - (b^2 + c^2)x^2 + b^2c^2$, appartient à la courbe FG de la figure 17, qui ne présente que deux inflexions, savoir, en FIG. 17 et 18.
C et D; et quand on fait b et c nuls, les quatre points B, C, D, E, se réunissant en un seul, au point A, *fig.* 18, les deux inflexions C et D s'effacent.

Ces exemples sont tirés de l'*Introduction à l'analyse des Lignes courbes*, par Cramer (p. 406 et 407), où l'on trouve une grande variété de courbes très-singulières et d'équations très-remarquables.

N° 202, page 420, après la ligne 11 en remontant, ajoutez :

La courbe correspondante à l'équation

$$x^4 - ax^2y - ay^3 + \tfrac{1}{4}a^2y^2 = 0$$

offre un point de cette espèce, à l'origine des coordonnées, parce qu'en résolvant, par rapport à y, l'équation ci-dessus, et développant le radical en série ascendante, suivant les puissances de x, il vient

$$y = \frac{2x^2}{a} \pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{a^2} - \frac{24x^4}{a^3} + \text{etc.},$$

d'où il résulte la figure 19, où A désigne l'origine des coordonnées FIG. 19.
(Cramer, p. 590.).

N° 207, à la fin, page 425, ajoutez :

En construisant sur les mêmes abscisses une seconde courbe dont l'ordonnée soit $y' = my$, on aura alors

$$\frac{y'dx}{dy'} = \frac{ydx}{dy},$$

la soutangente sera indépendante de m; d'où l'on voit qu'il y a une infinité de courbes qui ne sont pas semblables et qui ont les mêmes soutangentes, comme cela arrive pour le cercle et les ellipses construites sur son diamètre pris pour axe.

Page 433, note.

Le fond de la proposition contenue dans cette note appartient à Fermat, qui en a fait la base d'un écrit intitulé : *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione.* (*Opera varia*, p. 89.)

N° 219, à la fin, page 439, ajoutez :

Dans les points où la tangente est parallèle à la ligne des abscisses, on a $P=0$, et seulement $k''=Qh^2$; le point de contact est alors le sommet de la parabole, et son axe est dirigé suivant la normale.

On parvient assez simplement aux paraboles osculatrices qui, pour chaque point de la courbe touchée, remplissent cette dernière condition. Si l'on change les coordonnées x et y, par les formules

$$x=t\cos\varphi-u\sin\varphi,\qquad y=t\sin\varphi+u\cos\varphi\ (182),$$

l'équation $dy=pdx$, tirée de celle de la courbe touchée, deviendra

$$dt\sin\varphi+du\cos\varphi=p(dt\cos\varphi-du\sin\varphi)\ldots\ldots.(a),$$

et donnera

$$\frac{du}{dt}=\frac{p\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+p\sin\varphi}.$$

Posant alors

$$\frac{du}{dt}=0,\quad \text{d'où}\quad p\cos\varphi-\sin\varphi=0,\quad \operatorname{tang}\varphi=p,$$

on aura la condition qui détermine l'angle φ que le nouvel axe des abscisses t, parallèle à la tangente, fait avec l'axe des x. Supposant ensuite que les accroissemens h et k sont relatifs aux t et aux u, la parabole osculatrice, dont l'axe coïncide avec la normale, sera encore $k''=Qh^2$, $\frac{1}{Q}$ étant alors $\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dt^2}}$.

La valeur de $\frac{d^2u}{dt^2}$ se conclut de la transformation de l'équation.... $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=q$, en observant que $\frac{du}{dt}=0$, ou bien de l'équation (a), différentiée en regardant dt comme constant et x comme fonction de t. On obtient

$$\frac{d^2u}{dt^2}\cos\varphi=-p\frac{d^2u}{dt^2}\sin\varphi+\left(\cos\varphi-\frac{du}{dt}\sin\varphi\right)\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt},$$

et

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{q\cos\varphi^3}{\cos\varphi + p\sin\varphi};$$

d'où l'on déduit pour le paramètre de la parabole osculatrice cherchée,

$$\frac{1}{Q} = \frac{2(\cos\varphi + p\sin\varphi)}{q\cos\varphi^3} = \frac{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

N° 224, page 445, ajoutez à cet article les développemens qui suivent.

I. Le cercle osculateur est aussi celui qui sépare les cercles qui touchent intérieurement la courbe donnée, de ceux qui la touchent extérieurement, ou l'embrassent. Cela se voit en observant que pour les cercles simplement tangens, la distance des deux courbes, mesurée dans le sens de l'ordonnée, est exprimée par

$$\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y'}{dx'^3} - \frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ (222),$$

et qu'elle passe du positif au négatif, lorsque, par le changement des constantes α, β et γ, on passe de

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} > \frac{d^2y}{dx^2} \text{ à } \frac{d^2y'}{dx'^2} < \frac{d^2y}{dx^2};$$

or, dans l'intervalle, il doit arriver que

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui donne le cercle osculateur.

Cette manière de le déterminer, rend pour ainsi dire sensible à l'œil la relation de sa courbure avec celle de la courbe donnée, puisque la courbure de celle-ci est évidemment moindre que celle des cercles qui la touchent en dedans, et plus grande que celle des cercles qui la touchent en dehors.

II. Si, dans une courbe quelconque, l'on prend pour la courbure de l'arc *AEB*, *fig.* 20, l'angle *DCB*, formé par les deux tangentes menées à l'extrémité de cet arc, ce qui est assez naturel, cet angle, dans le cercle, sera égal à l'angle *AOB* formé par les rayons *AO* et *OB*, menés aux extrémités de l'arc, et le même pour tous les arcs de même longueur, pris dans le même cercle. C'est ainsi qu'il faut entendre que la courbure du cercle est uniforme. Cela posé, si l'on FIG. 20.

compare deux arcs de même longueur, dans des cercles différens, en nommant a cette longueur, r et r' les rayons des cercles, les angles produits par la courbure, exprimés en degrés centésimaux, seront respectivement $\frac{400^\circ.a}{2\pi r}$, $\frac{400^\circ.a}{2\pi r'}$ (*Int.* 45); leur rapport sera celui de

$$\frac{1}{r} \text{ à } \frac{1}{r'}, \text{ ou } :: r' : r,$$

c'est-à-dire en raison inverse des rayons des cercles dont l'arc proposé fait partie.

Quant aux différens arcs du même cercle, leur courbure est évidemment en raison de leur longueur; et si l'on prenait pour unité de courbure celle de l'arc égal au rayon, dans le cercle dont le rayon est un, la courbure de l'arc a, dans le cercle dont le rayon $= r$, serait mesurée par $\frac{a}{r}$. On trouvera, dans l'addition au n° 258, les conséquences ultérieures des notions précédentes.

N° 226, page 447, ligne 16, après elle-même, *ajoutez:*

On peut considérer aussi que chaque point de la courbe donnée dérive de l'un de ceux de la courbe des centres, en conséquence, regarder non-seulement β, mais aussi x et y, comme des fonctions de α, et différentier en prenant α pour variable indépendante; ce point de vue est peut-être plus approprié que l'autre à l'état présent de la question.

N° 227, page 450, ligne 4, après la valeur de $\mathrm{d}y$, *ajoutez:*

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \frac{4y^2 + (m + 2nx)^2}{4y^2}.$$

Ligne 5, au bout, ajoutez :

$$= -\frac{m^2\mathrm{d}x^2}{4y^3}.$$

Ligne 7, lisez :

$$\gamma = \frac{\{4y^2 + (m + 2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

N° 228, à la fin, page 453, ajoutez :

Comme on fait un fréquent usage de l'équation de l'ellipse rappor-

tée à ses axes, je vais indiquer ici, relativement à cette équation, le calcul du rayon de courbure et des coordonnées de la développée.

L'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

donne

$$a^2y\,dy+b^2x\,dx=0, \quad a^2y\,d^2y+a^2dy^2+b^2dx^2=0,$$

d'où l'on tire

$$dy=-\frac{b^2x}{a^2y}dx, \quad dx^2+dy^2=\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}dx^2, \quad d^2y=-\frac{b^4}{a^2y^3}dx^2,$$

$$\gamma=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \qquad x-\alpha=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)x}{a^4b^2}, \quad y-\beta=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4};$$

puis en éliminant y^2 de l'expression de $x-\alpha$, et x^2 de celle de $y-\beta$, on trouvera

$$x-\alpha=\frac{(b^4x^2-a^2b^2x^2+a^4b^2)x}{a^4b^2}, \quad \text{d'où} \quad -\alpha=\frac{x^3(b^2-a^2)}{a^4}; \quad x^3=\frac{\alpha a^4}{a^2-b^2},$$

$$y-\beta=\frac{(a^4y^2-a^2b^2y^2+a^2b^4)y}{a^2b^4}, \quad \text{d'où} \quad -\beta=\frac{y^3(a^2-b^2)}{b^4}, \quad y^3=-\frac{\beta b^4}{a^2-b^2}:$$

prenant enfin les valeurs de x et de y, pour les substituer dans l'équation de l'ellipse, après avoir fait, pour abréger, $a^2-b^2=c^2$, on aura

$$\sqrt[3]{\frac{a^2\alpha^2}{c^4}}+\sqrt[3]{\frac{b^2\beta^2}{c^4}}=1,$$

équation d'une forme assez remarquable.

Si, pour abréger, on y fait $\frac{a\alpha}{c^2}=\alpha'$, $\frac{b\beta}{c^2}=\beta'$, et qu'on élève les deux membres au cube, on obtient

$$\alpha'^2+\beta'^2+3\sqrt[3]{\alpha'^2\beta'^2}\left(\sqrt[3]{\alpha'^2}+\sqrt[3]{\beta'^2}\right)=1, \quad \text{ou} \quad 3\sqrt[3]{\alpha'^2\beta'^2}=1-\alpha'^2-\beta'^2,$$

ce qui montre comment on y ferait disparaître les radicaux.

Pour passer à l'équation de la dévelopée de l'hyperbole, il suffit de changer b en $b\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$\sqrt[3]{\frac{a^2\alpha^2}{c^4}}-\sqrt[3]{\frac{b^2\beta^2}{c^4}}=1, \quad \text{et} \quad c^2=a^2+b^2.$$

Il n'est pas difficile maintenant de s'assurer que la forme de la développée de l'ellipse est telle que la représente la figure 37 du tome premier. FIG. 37. du T. Ier.

En changeant $\frac{c^4}{a^2}$ en a^2, $\frac{c^4}{b^2}$ en b^2, α en x et β en y, son équation, qui devient alors

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=1,$$

prend, comme l'a remarqué M. Lamé (*Examen des différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, p. 106), une forme analogue à celle de l'ellipse, et comprise dans l'équation générale

$$\frac{x^{\alpha}}{a^{\alpha}}+\frac{y^{\beta}}{b^{\beta}}=1,$$

dont on tire aussi la parabole, l'hyperbole et la ligne droite, en posant

$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{2},\quad =-1 \quad \text{et} \quad =1.$$

N° 229, page 455, après la ligne 16, ajoutez :

On ne complique pas beaucoup les calculs, en ne supposant pas que les ordonnées soient équidistantes. Les trois abscisses consécutives étant x, $x+h$, $x+k$, il vient

$$y'=y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$
$$y'+P'h+Q'h^2+R'h^3+\text{etc.}=y+Ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.},$$
$$y'+P'k+Q'k^2+R'k^3+\text{etc.}=y+Pk+Qk^2+Rk^3+\text{etc.},$$

d'où, par la soustraction de l'équation (1), on déduit

$$P'+Q'h+R'h^2+\text{etc.}=P+Qh+Rh^2+\text{etc.}\ldots\ldots(2),$$
$$P'+Q'k+R'k^2+\text{etc.}=P+Qk+Rk^2+\text{etc.};$$

puis retranchant l'équation (2) de celle qui la suit, on obtient

$$Q'(k-h)+R'(k^2-h^2)+\text{etc.}=Q(k-h)+R(k^2-h^2)+\text{etc.},$$

dont les deux membres ont $k-h$ pour facteur commun, et qui se réduit à

$$Q'+R'(k+h)+\text{etc.}=Q+R(k+h)+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots(3);$$

et par conséquent, à la coïncidence des trois points, il reste encore les équations

$$y'=y,\quad P'=P,\quad Q'=Q.$$

La singularité et l'importance du fait analytique et géométrique dont il s'agit ici, ne rendent peut-être pas inutile le soin d'éviter toute restriction dans la manière de l'établir.

N° 235, à la fin, page 463.

Pour compléter cette discussion sur les points singuliers, il faut examiner celui qui répond à $x=a$ dans l'équation

$$y = b + (x-a)\sqrt{x-c} \quad (134),$$

et qui est de l'espèce des *points multiples* formés par l'intersection de plusieurs branches, puisque si le radical $\sqrt{x-c}$ demeure réel, soit qu'on ait $x<a$ ou $x>a$, il y aura de part et d'autre du point où $x=a$, deux branches distinctes qui passeront par ce point.

Comme l'expression de $\frac{dy}{dx}$ ne prend pas la forme $\frac{0}{0}$, quand on la déduit de l'équation rapportée ci-dessus, on ne s'aperçoit du point singulier correspondant à $x=a$, que parce que cette valeur fait évanouir le radical dans celle de y.

La courbe correspondante à l'équation

$$y = b + (x-a)\sqrt[m]{x-c},$$

aura un point double, si m est paire, mais ce point sera simple si m est impaire; et dans les deux cas, cependant, l'équation

$$(y-b)^m = (x-a)^m(x-c)$$

donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, lorsqu'on fait $x=a$. La figure 21 représente, en M, le premier, et la figure 22 le second (*). FIG. 21 et 22.

Soit encore l'équation

$$ay + bx = xy,$$

qui appartient à une hyperbole, et dans laquelle $x=0$, donne $y=0$. Elle conduit pour ce cas à $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$; mais si on la mettait sous la forme

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1,$$

on en tirerait

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ay^2}{bx^2}:$$

cependant cette origine n'est pas un point multiple.

(*) En faisant $a=1$, $b=0$ et $c=0$, dans cet exemple, on aura celui qu'a donné M. Poisson, dans le 14[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 131).

Il suit de ce qui précède que, pour ne manquer aucun point singulier, en cherchant les cas où les coefficiens différentiels deviennent $\frac{0}{0}$, il faut faire disparaître les radicaux de l'équation proposée, et qu'il n'y a que la discussion de la courbe aux environs du lieu indiqué, qui puisse constater que c'est en effet un point singulier.

N° 242, page 470, ligne 22, après en x, *ajoutez :*

En prenant pour abscisses les logarithmes, d'après l'équation $y=a^x$, on peut, par des moyennes proportionnelles tirées du cercle, trouver autant de points qu'on voudra de la logarithmique, puisqu'aux abscisses

$$x=\tfrac{1}{2},\quad x=\tfrac{3}{2},\quad \text{etc.},\quad x=\tfrac{1}{4},\quad \text{etc.},$$

répondent les ordonnées

$$y=\sqrt{a.1},\quad y=\frac{a.\sqrt{a.1}}{1},\quad \text{etc.},\quad y=\sqrt{1.\sqrt{a.1}},\quad \text{etc.}$$

Joignant à ces valeurs de y celles qui se présentent d'elles-mêmes, lorsque x est un nombre entier, on aura un procédé graphique très-simple pour tracer par points une logarithmique, sans le secours des tables. A la fin de son *Discours sur la cause de la pesanteur,* Huyghens a démontré plusieurs propriétés curieuses de la logarithmique, dont Jacques Gregori paraît s'être occupé le premier (*Geometriæ pars universalis*).

N° 244, à la fin, page 473, ajoutez :

L'équation primitive de la cycloïde est souvent rapportée au sommet. Pour l'obtenir sous cette forme, il suffit de mettre une lettre sur
FIG. 53 du T. Ier. la figure 53 du tome Ier, au point où la ligne MN rencontre la ligne IK. Soit R cette lettre; l'abscisse est alors KR, et l'ordonnée

$$RM=IP=IQ+QP=\text{arc } GM+MN;$$

désignant par u l'arc GM, qui est le supplément de MQ, faisant.... $KR=x'$, $RM=y'$, il vient

$$y'=u+\sqrt{2ax'-x'^2}=a.\text{arc}\left(\text{sin verse}=\frac{x'}{a}\right)+\sqrt{2ax'-x'^2}.$$

C'est la même chose que si l'on changeait

$$y \text{ en } 2a-x',\qquad x \text{ en } 2a\pi-y',$$

dans l'équation du texte; l'équation différentielle deviendrait

$$dy' = \frac{(2a - x')dx'}{\sqrt{2ax' - x'^2}}.$$

La construction de la cycloïde, par points, s'opère facilement dès qu'on a porté sur l'axe des abscisses une ligne AL égale à la circonférence du cercle générateur, circonférence que la Géométrie élémentaire fait trouver avec une grande approximation, de plusieurs manières. On divise alors le cercle générateur gmq, à partir du point g, et la ligne AL, à partir du point I, dans un même nombre de parties égales; et si m et Q désignent deux points de division correspondans, la somme des lignes mn et IQ sera l'ordonnée RM, qu'on portera de chaque côté de IK : on aura le point M de la partie AK, et celui qui est semblablement placé sur KL.

Si, au lieu de porter sur l'abscisse KR, égale au sinus-verse de l'arc gm, l'arc IQ, augmenté de son sinus mn, on ne portait que l'arc seul, on formerait une courbe intérieure à la cycloïde, et qui a été nommée sa *compagne.*

N° 248, à la fin de la page 477, ajoutez :

Le cours de la spirale hyperbolique offre des circonstances trop remarquables pour omettre d'en parler.

D'abord, à mesure que t augmente, elle fait autour du pôle A, *fig.* 23, des révolutions qui se resserrent de plus en plus, en sorte que ce point peut être regardé comme une sorte d'asymptote de cette courbe. FIG. 23.

Puis, si l'on fait

$$t = 1, \quad = \tfrac{1}{2}, \quad = \tfrac{1}{3}, \quad = \tfrac{1}{4}, \quad \text{etc.},$$

les valeurs correspondantes

$$u = a, \quad = 2a, \quad = 3a, \quad = 4a, \quad \text{etc.},$$

montrent que la spirale s'éloigne de plus en plus du même point A; et on trouve qu'elle s'approche alors sans cesse de la droite DE, menée parallèlement à l'axe AO, à une distance $AD = a$. En effet, la perpendiculaire PM abaissée d'un point quelconque M sur AO, étant exprimée par $u \sin MAP = u \sin t$, devient $\frac{a \sin t}{t}$, quand on y met la valeur de u en t; d'où l'on voit que la limite correspondante à $t = 0$, est a.

Je n'ai encore considéré que les valeurs positives de t; en les prenant, comme je l'indique, dans le sens $OGHO$, il faudra porter les négatives en sens contraire, $OHGO$, et prendre celles de u dans la partie opposée du rayon vecteur. On produirait de cette manière une autre spirale hyperbolique placée sur le prolongement AB' du rayon AO, et ayant pour asymptote DE', prolongement de DE. Enfin, si l'on donnait à la constante a le signe $-$, on répéterait aussi au-dessous de BB' les deux courbes que je viens d'indiquer au-dessus. C'est de la même manière qu'il faut avoir égard au changement de signe, pour toutes les courbes rapportées à des coordonnées polaires.

Dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1740 (p. 148), Clairaut a donné un moyen de décrire la spirale d'Archimède et quelques autres courbes du même genre, par un mouvement continu pareil à celui qui produit la cycloïde.

N° 255, page 484, à la fin, ajoutez :

On n'obtiendrait, en général, qu'une équation différentielle; car, par le moyen de l'équation $y=\varphi(x)$, on n'aurait que $ds=\psi(x)dx$, et pour éliminer x et dx, il faudrait employer les équations

$$y=\pi(x) \quad \text{et} \quad dy=\pi'(x)dx.$$

Fontaine, dans ses *Mémoires*, a indiqué une équation entre l'arc d'une courbe et sa courbure, c'est-à-dire l'angle formé par les tangentes menées aux extrémités de cet arc (voy. ci-dessus, p. 635). Voici comment on en peut déterminer les variables.

Soit a la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui touche la courbe à un point donné, pris pour origine, et z la tangente de l'angle compris entre cette droite et celle qui touche la courbe au point dont les coordonnées sont x et y; on aura, par une des formules de la Trigonométrie,

$$z=\frac{a-\frac{dy}{dx}}{1+a\frac{dy}{dx}}=\frac{adx-dy}{dx+ady}.$$

La constante a, qui entre dans cette expression et l'assujétit à l'origine, disparaîtra, si l'on passe à la valeur de la différentielle de l'angle dont la tangente est z, et qui est exprimée par $\frac{dz}{1+z^2}$. En effectuant le calcul, sans prendre aucune différentielle pour constante, on trouve,

après des réductions qui s'offrent d'elles-mêmes,

$$dz = \frac{(1+a^2)(dyd^2x - dxd^2y)}{(dx + ady)^2}, \quad 1 + z^2 = \frac{(1+a^2)(dx^2 + dy^2)}{(dx + ady)^2},$$

d'où

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx^2 + dy^2}.$$

Si donc on nomme s l'arc, et ε sa courbure, les formules

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad d\varepsilon = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^2}$$

conduiront à une relation différentielle entre s et ε, lorsqu'on aura éliminé les coordonnées primitives x et y.

En multipliant l'expression de $d\varepsilon$ par celle de

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = \frac{ds^3}{dyd^2x - dxd^2y},$$

on en déduirait

$$\gamma d\varepsilon = ds, \quad \text{d'où} \quad d\varepsilon = \frac{ds}{\gamma},$$

relation très-simple, qui montre que la différentielle de la courbure revient à la mesure de celle de l'arc ds, considéré comme appartenant à un cercle dont le rayon serait celui de courbure; c'est aussi ce qu'on trouve immédiatement par la considération des infiniment petits, ainsi qu'on le verra bientôt.

Note de la page 486, à la fin, ajoutez :

C'était à peu près la même chose qu'entendait Lagrange, lorsqu'il présentait l'exactitude du Calcul différentiel comme la compensation de deux erreurs (voy. ci dessus, p. 603). En effet, pour une sécante $M'S$, *fig.* 24, on a rigoureusement .... FIG. 25.

$PS = \dfrac{\overline{MP} \times \overline{MQ}}{M'Q}$; mais

$$M'Q = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}:$$

on peut donc dire qu'en écrivant $PT = \dfrac{ydx}{dy}$, on commet deux erreurs, savoir, en mettant PT à la place de PS, et dy à celle de $M'Q$.

Cependant, quelqu'ingénieuse que puisse paraître cette manière d'envisager les choses, je crois que la considération des limites offre à la fois plus de clarté et plus de précision.

N° 258, page 489, ligne 5 du texte, en remontant, après abscisses, *ajoutez :*

Il faut bien distinguer la ligne $M''N$, dont il est ici question, et que
FIG. 25. j'ai reproduite dans la figure 25, de la ligne $M'n$, mesurant, dans le sens de l'ordonnée, la distance comprise entre la courbe et la tangente, et dont l'expression est $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$ + etc. (215). La première, appartenant au polygone inscrit $MM'M''$, suppose que le passage du point M aux points M' et M'' s'est fait par deux lignes droites consécutives MM', $M'M''$.

Le rapport

$$\frac{M'n}{M''N}=\frac{\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2+\text{etc.}}{\frac{d^2y}{dx^2}h^2+\text{etc.}},$$

qui varie sans cesse avec la grandeur de h, ayant pour limite la constante $\frac{1}{2}$, devient alors indépendant de la nature du polygone et de la courbe; ainsi quand on passe aux limites, ou dans l'infiniment petit, on peut employer l'une ou l'autre de ces lignes pour mesurer des effets, lorsqu'on a soin de ne comparer ensemble que les valeurs fournies par la même ligne. C'est de là qu'est venue, en Mécanique, la *distinction entre la courbe rigoureuse et la courbe polygone,* nécessaire quand on employait des considérations géométriques, et superflue aujourd'hui, qu'on ne se sert que d'équations différentielles réduites à une forme très-simple et généralement convenue.

Newton a été accusé d'erreur, par Jean Bernoulli, pour avoir pris la ligne $M'n$ comme la fluxion seconde ou la différentielle seconde de l'ordonnée MP, et par là de n'avoir pas entendu la théorie des différentielles. Dans le passage dont il s'agit (*Philosophiæ naturalis Principia mathematica,* lib. II, sect. II, prop. X), Newton, qui tire les fluxions ou différentielles, d'un développement en série, ainsi que l'a fait depuis Lagrange, néglige de dire qu'il faut supprimer les diviseurs 1, 1.2, 1.2.3, etc.; et en s'en tenant à la lettre de ses expressions, il est bien difficile de le trouver exempt d'erreur. Son résultat aurait pu cependant être exact, parce qu'il ne fait que substituer aux vraies différentielles des quantités qui ont avec elles des rapports constans; mais son énonciation n'en est pas moins vicieuse, et semble fonder assez bien la conséquence que Bernoulli en tirait, que la méthode des fluxions, dépendante des séries, n'était pas encore tout-à-fait le Calcul différentiel (voy. la Préface du présent Ou-

vrage, p. xiv). Lagrange a discuté de nouveau le passage de Newton, pour prouver que la faute n'était pas où Bernoulli croyait la voir (*Théorie des Fonctions*, 2ᵉ édition, p. 133.); mais dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1798, p. 60, Trembley a soutenu l'opinion émise et développée par Jean Bernoulli (*Joh. Bernoulli, opera*, tom. I, p. 481.)

Page 490, *ligne* 14, *après* suivant, *ajoutez :*

La détermination de la courbure des courbes en offre déjà une preuve; car la différentielle de cette courbure étant l'angle $M'M'N$, *fig.* 57 et 58 du tom. Iᵉʳ, ou la différence des angles $M'M'Q'$ et $M'MQ$, formés par les côtés consécutifs du polygone $MM'M''$ avec l'axe des x, a pour expression FIG. 57 et 58 du T. Iᵉʳ.

$$\frac{\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}=\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2+dy^2},$$

en ne prenant aucune différentielle pour constante, négligeant dans le dénominateur les infiniment petits vis-à-vis des quantités finies, et observant que la tangente d'un arc infiniment petit se confond avec cet arc.

Par cette expression de $d\varepsilon$, on trouve sur-le-champ celle du rayon de courbure γ, en le regardant comme celui d'un cercle qui se confond avec la courbe, dans un arc dont l'amplitude est mesurée par la courbure ci-dessus; car on a la proportion

$$1 : \gamma :: d\varepsilon : ds \text{ (p. 636).}$$

N° 264, *page* 499, *ligne* 3, *ajoutez :*

La supposition de c infini change le cercle immobile en une ligne droite; et en faisant de plus $b=a$, on met le point décrivant sur la circonférence du cercle mobile : on doit donc alors retrouver la cycloïde. C'est ce qui arrive en effet, en observant que, d'après l'hypothèse établie,

$$\cos\frac{s}{c}=1,\quad \cos\left(\frac{s}{c}+\frac{s}{a}\right)=\cos\frac{s}{a},\quad c\sin\frac{s}{c}=s,\quad \sin\left(\frac{s}{c}+\frac{s}{a}\right)=\sin\frac{s}{a},$$

d'où
$$x=-a\left(1-\cos\frac{s}{a}\right),\quad y=s-a\sin\frac{s}{a},$$

résultats qui deviennent ceux de la page 497, lorsqu'on y change x en $-y$, et y en x.

CHAP. V DU PREMIER VOLUME.

N° 269, à la fin, page 505, ajoutez :

Il est facile de voir que

$$\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = 2,$$

ce qui montre que

$$\overline{PM}^2 + \overline{QM}^2 + \overline{RM}^2 = 2\overline{AM}^2,$$

ou que la somme des quarrés des diagonales des trois faces contiguës d'un parallélépipède rectangle est double de la diagonale intérieure ; et comme on a

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2a,$$

et ainsi des autres, il vient

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1.$$

N° 270, page 506.

La forme que j'ai donnée dans cet article à l'équation du plan, n'est pas encore assez symétrique ; M. Lamé, dans l'Ouvrage cité à la page 638, l'écrit ainsi

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1,$$

ce qui la rend homogène et l'assimile à celle des surfaces du second degré (307). En la comparant alors avec

$$x\frac{\cos a}{\delta} + y\frac{\cos b}{\delta} + z\frac{\cos c}{\delta} = 1,$$

on trouve

$$A = \frac{\delta}{\cos a}, \quad B = \frac{\delta}{\cos b}, \quad C = \frac{\delta}{\cos c},$$

d'où il suit

$$\delta^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad \cos a = \frac{\delta}{A}, \quad \cos b = \frac{\delta}{B}, \quad \cos c = \frac{\delta}{C},$$

relations où la loi de l'homogénéité est observée.

N° 275, à la fin, page 512, ajoutez :

Cette équation peut aussi s'écrire comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} [z'(y''-y''') + z''(y'''-y') + z'''(y'-y'')](x'-x) \\ + [x'(z''-z''') + x''(z'''-z') + x'''(z'-z'')](y'-y) \\ + [y'(x''-x''') + y''(x'''-x') + y'''(x'-x'')](z'-z) \end{array}\right\} = 0,$$

en se bornant à prendre pour A, B et C, les valeurs obtenues dans le n° 274. Elle est moins symétrique que celle du n° 275; mais elle le devient lorsqu'on place l'origine des coordonnées au premier des points donnés, ce qui rend nuls x', y' et z', et l'on a

$$(z''y'''-z'''y'')x + (x''z'''-x'''z'')y + (y''x'''-y'''x'')z = 0.$$

N° 279, page 515, ligne 7 en remontant, ajoutez :

Le n° 277 cité ici, ne rappellant que le parallélisme des projections des droites qui sont parallèles, n'établit pas assez complètement l'égalité des angles que ces droites font avec les axes; mais on y parvient en combinant les équations

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos a'}{\cos c'}, \qquad \frac{\cos b}{\cos c} = \frac{\cos b'}{\cos c'},$$

fournies par l'égalité des coefficiens de z dans les projections, avec les équations

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1, \quad \cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 = 1,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\cos a^2}{\cos c^2} + \frac{\cos b^2}{\cos c^2} = \frac{1}{\cos c^2} - 1, \quad \frac{\cos a'^2}{\cos c'^2} + \frac{\cos b'^2}{\cos c'^2} = \frac{1}{\cos c'^2} - 1,$$

d'où, en vertu des premières, on a

$$\frac{1}{\cos c^2} = \frac{1}{\cos c'^2} \quad \text{et} \quad \cos c' = \cos c.$$

N° 282, page 518, après la ligne 2 en remontant, ajoutez :

Comme dans les numéros précédens, les propriétés du plan et de la ligne droite ont été déduites immédiatement de l'Analyse, il faudrait ici, pour suivre la même marche, considérer les plans parallèles comme ne pouvant pas se rencontrer; il en résulterait que les deux équations

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + 1 &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + 1 &= 0, \end{aligned}$$

doivent être contradictoires quand elles appartiennent à des plans parallèles. Or, en éliminant z, il vient

$$\left(\frac{A'}{C'} - \frac{A}{C}\right)x + \left(\frac{B'}{C'} - \frac{B}{C}\right)y + \frac{1}{C'} - \frac{1}{C} = 0,$$

équation qui serait absurde si

$$\frac{A'}{C'}-\frac{A}{C}=0,\quad \frac{B'}{C'}-\frac{B}{C}=0,\quad \text{sans que}\quad \frac{1}{C'}-\frac{1}{C}=0:$$

ainsi, pour deux plans parallèles,

$$\frac{A'}{C'}=\frac{A}{C},\qquad \frac{B'}{C'}=\frac{B}{C}.$$

On montrera ensuite que ces plans sont perpendiculaires à une même droite, par le rapprochement des relations précédentes avec celles du n° 280.

En dégageant z, dans les équations des plans indiqués ci-dessus, on obtient

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{1}{C},$$
$$z=-\frac{A'}{C'}x-\frac{B}{C'}y-\frac{1}{C'},$$

ce qui met bien en évidence les conditions du parallélisme.

N° 284, à la fin, page 521, ajoutez:

Cette expression est à la fois simple et élégante; celle du sinus est plus compliquée, mais comme on peut quelquefois en avoir besoin, je vais la rapporter. On déduit aisément de ce qui précède,

$$\sin V=\sqrt{(\cos a'\cos b-\cos a\cos b')^2+(\cos a'\cos c-\cos a\cos c')^2+(\cos b'\cos c-\cos b\cos c')^2}.$$

N° 285, à la fin, page 522, ajoutez:

On a aussi l'expression générale

$$\sin V=\frac{\sqrt{(AB'-A'B)^2+(AC'-A'C)^2+(BC'-B'C)^2}}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

N° 293, page 533, ligne 17.

Cette citation de la *Mécanique analytique* se rapporte à la page 355 de la première édition; le passage a été supprimé dans la seconde. Lagrange, frappé de l'élégance des valeurs obtenues par Monge, et ne faisant d'ailleurs aucun usage des siennes, les a retranchées comme tout-à-fait inutiles. Depuis l'impression de mon Ouvrage, M. J. Binet ayant bien voulu me communiquer la démonstration que Monge avait envoyée à Lagrange, j'ai vu qu'elle ne différait presque pas de celle que j'avais

donnée d'abord à la page 73 du tome II de la première édition de mon Ouvrage, comme addition au premier volume, et que, dans la seconde édition, j'ai remise à sa place.

N° 294, page 536, ligne 23, après AE, ajoutez :

intersection de ces plans.

Page 537, ligne première en remontant, après figure, *ajoutez :*

savoir, le signe supérieur quand l'angle est aigu, et l'inférieur quand il est obtus.

Page 539, après la ligne 19, ajoutez :

Ces formules sont précisément les mêmes que les expressions de ξ, η, ζ en a, b, c, qu'on trouve dans la *Mécanique analytique*, à la page 340 de la première édition, et 213 du tome II de la seconde, d'apr s celles qui sont à la page 369 de la première édition, et 220 du tome II de la seconde : il faut seulement changer ω en θ.

Les formules de la page 59 du tome I[er] de la *Mécanique céleste*, présentent dans les signes des différences qui supposent que ψ est changé en $-\psi$, v en $-v$, z en $-z$; car d'ailleurs t répond à x_{m}, u à y_{m}, v à z_{m}.

N° 295, page 540, ligne 5, après AE, ajoutez :

En effet, Av, perpendiculaire au plan Atu, est perpendiculaire à AE, qui est dans ce plan; Az est aussi perpendiculaire à AE, qui est dans le plan xAy : donc AE est perpendiculaire au plan zAv et à toutes les lignes menées par son pied dans ce plan : telles sont AF et AG.

N° 299, page 545, après la ligne dernière, ajoutez :

Par cette transformation, la surface est rapportée à un centre; car si l'équation (a') est vérifiée par les valeurs

$$x'=m,\quad y'=n,\quad z'=p,$$

elle le sera aussi par les valeurs de signe contraire,

$$x'=-m,\quad y'=-n,\quad z'=-p;$$

d'où il suit que les distances à l'origine, exprimées dans les deux cas

par $\sqrt{m^2+n^2+p^2}$, seront égales, ce qui est le caractère du *centre* (183) (*).

N° 305, page 555, ligne dernière.

Il faut remarquer ici que cette section est la vraie base du cône, parce que le sommet répond perpendiculairement sur le centre de l'ellipse, et qu'en menant un plan par l'axe des v, la section angulaire qu'il forme dans le cône est divisée en deux parties égales par l'axe.

N° 307, à la fin, page 557, ajoutez :

I. La détermination des quantités $\frac{A'}{L'}$, $\frac{B'}{L'}$, $\frac{C'}{L'}$, et par suite celle des axes, a été ramenée par M. Petit à une équation très-remarquable, tirée de la considération du maximum et du minimum qui ont lieu dans les distances entre les points d'une surface du second degré, et son centre, considération que M. Bérard appliquait aussi, dans le même temps, à la discussion et à la construction des lignes et des surfaces du second degré. (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, tom. II, p. 324; *Annales de Mathématiques*, tom. III, p. 105.) Voici à peu près comment a procédé M. Petit.

L'équation des surfaces du second degré rapportées à leur centre par des coordonnées rectangles, étant représentée par

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=1\ldots\ldots(a),$$

(Voy. l'addition au n° 299.) si l'on y fait $x=\alpha z$, $y=\beta z$, on en tire

$$z^2=\frac{1}{A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta};$$

(*) M. Bérard établit la discussion des surfaces du second ordre, sur une transformée où elles sont rapportées à ces distances, et qui s'obtient en posant $x'=pz'$, $y'=qz'$, ce qui change l'équation (a') en

$$z'^2(Ap^2+Bq^2+C+2Dpq+2Ep+2Fq)+M=0,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$G\alpha+H\beta+K\gamma+L=M;$$

posant ensuite $r=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=z'\sqrt{1+p^2+q^2}$, il en résulte

$$r^2(Ap^2+Bq^2+C+2Dpq+2Ep+2Fq)+M(1+p^2+q^2)=0,$$

équation où p et q désignent des fonctions d'angles, et qui est une équation polaire des surfaces du second degré. (Voyez *Annales de Mathématiques*, tom. III, p. 105.)

mettant cette valeur dans $x^2+y^2+z^2$, que je désignerai par r^2, il vient

$$r^2=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta}.$$

Considérant ensuite que la fonction $\frac{1}{r^2}$ est un maximum quand r est un minimum, et réciproquement; si on la représente par s, on forme l'équation

$$(1+\alpha^2+\beta^2)s=A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta\ldots.(b),$$

qui, par les conditions $\frac{ds}{d\alpha}=0$, $\frac{ds}{d\beta}=0$ (165), conduit à

$$\alpha s=A\alpha+B'+B''\beta,\quad \beta s=A'\beta+B+B''\alpha\ldots\ldots(c).$$

En multipliant la première de celles-ci par α, la seconde par β, et retranchant leur somme de l'équation (b), on obtiendra

$$s-A''=B\beta+B'\alpha,$$

où il faut mettre pour α et β leurs valeurs tirées des équations (c), calcul dont le résultat est

$$(s-A)(s-A')(s-A'')-B^2(s-A)-B'^2(s-A')-B''^2(s-A'')-2BB'B''=0\ (e).$$

Cette équation, très-symétrique, montant au troisième degré, a toujours une racine réelle, de laquelle on déduirait la valeur de r, et celles des coefficiens α et β, qui sont les tangentes des angles que les projections de la ligne r, sur les plans des xz et des yz, font avec l'axe des z. Mais pour déterminer plus particulièrement ce que sont les racines de l'équation (e), concevons qu'on transforme les coordonnées de manière que l'équation (a) soit réduite à la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1\ldots\ldots(a'),$$

ce qui a été démontré possible (301); l'équation (e) deviendra

$$(s-A)(s-A')(s-A'')=0\ldots\ldots(e');$$

et l'origine des coordonnées n'ayant pas changé, les distances r seront demeurées les mêmes, et par conséquent aussi les valeurs maximums et minimums de s. On voit donc que ces valeurs sont ce que représentent maintenant les lettres A, A', A'', dans l'équation (e'), c'est-à-dire les quantités $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$.

On connaîtra la situation respective des trois distances correspondantes à ces valeurs, en faisant B, B', B'', nuls dans les équations (c), qui deviennent alors

$$s\alpha = A\alpha, \quad s\beta = A'\beta \ldots\ldots (c'),$$

et qui doivent s'accorder avec

$$(1+\alpha^2+\beta^2)s = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' \ldots\ldots (b'),$$

résultante de (b), ce qui a lieu de trois manières.

1°. En posant $\alpha=0$, $\beta=0$, l'équation (b') donne $s=A''$;

2°. En posant $\alpha=0$, $s=A'$, l'équation (b') qui devient .... $(1+\beta^2)s = A'\beta^2 + A''$, ne peut être vérifiée qu'en considérant β comme infini;

3°. En posant $s=A$, $\beta=0$, on trouve de même α infini : la ligne r coïncide donc avec l'axe des z, dans le premier cas; avec celui des y, dans le second, et avec celui des x, dans le troisième.

II. M. Yvory, dans ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques (*Philosophical Transactions*, 1809, 2e part.), a reconnu que si l'on posait

$$t = a\cos\varphi\cos\psi, \quad u = b\cos\varphi\sin\psi, \quad v = c\sin\varphi,$$

l'équation

$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{v^2}{c^2}=1,$$

devenant

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 + \cos\varphi^2\sin\psi^2 + \sin\varphi^2 = 1,$$

était rendue identique sans aucune détermination des angles φ et ψ, qui sont ceux dont on s'est servi au n° 297. Cette transformation jouit de plusieurs belles propriétés; et en attendant que nous fassions connaître celle qui se rapporte à la cubature de l'ellipsoïde, nous en donnerons l'interprétation géométrique.

Si l'on considère une sphère ayant pour équation

$$t^2+u^2+v^2=r^2, \quad \text{ou} \quad \frac{t^2}{r^2}+\frac{u^2}{r^2}+\frac{v^2}{r^2}=1,$$

et qu'on fasse, d'après le n° 297,

$$t = r\cos\varphi\cos\psi, \quad u = r\cos\varphi\sin\psi, \quad v = r\sin\varphi,$$

t, u et v, seront les coordonnées du point où le rayon vecteur r perce

cette sphère. Il suit de là que si l'on conçoit trois sphères décrites du centre de l'ellipsoïde, avec des rayons a, b, c, et qu'on mène de ce centre un rayon quelconque, le t du point où il percera la première sphère, l'u du point où il percera la seconde, et le v du point où il percera la troisième, seront les trois coordonnées du point correspondant de l'ellipsoïde.

Ceci revient à une construction de l'ellipse par points, connue des architectes sous le nom de la *queue de paon*, que j'ai rapportée dans mon *Traité élémentaire de Trigonométrie* etc., et qui se déduirait de même de l'équation

$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}=1,$$

en y faisant $t=a\cos\varphi$, $u=b\sin\varphi$.

N° 311, à la fin, page 561, ajoutez :

I. En partant de l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2=L,$$

et mettant pour x, y et z, les valeurs du n° 296, on trouvera que la transformée

$$A't^2+B'u^2+2D'ut=L$$

donne un cercle, sous les conditions,

$$A'=B',\quad D'=0,$$

qui répondent à

$$A\cos\psi^2+B\sin\psi^2=A\cos\theta^2\sin\psi^2+B\cos\theta^2\cos\psi^2+C\sin\theta^2,$$
$$(A-B)\cos\theta\sin\psi\cos\psi=0.$$

La seconde équation est vérifiée en posant

$$\sin\psi=0,\quad \text{ou}\quad \cos\psi=0;$$

la première devient, par l'une de ces hypothèses,

$$A=B\cos\theta^2+C\sin\theta^2,\quad \text{d'où}\quad \cos\theta^2=\frac{A-C}{B-C},$$

et par l'autre

$$B=A\cos\theta^2+C\sin\theta^2,\quad \text{d'où}\quad \cos\theta^2=\frac{B-C}{A-C}.$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'on peut, par l'arrangement des

termes de l'équation primitive, faire en sorte que l'une des deux valeurs de $\cos\theta^2$ soit positive et <1; ainsi il y aura toujours deux valeurs pour l'angle θ, et deux sections qui seront circulaires. Le changement d'origine n'introduisant que des termes où les variables x, y, z ne passent pas le premier degré, et qui sont rejetés dans L, n'apportera aucune modification aux équations $A' = B'$, $D' = 0$: il existera donc toujours, sous les mêmes conditions, deux sections circulaires, à quelque point qu'on place l'origine.

Cette propriété des surfaces du second ordre, comprend celle du cône, par rapport aux sections parallèles et antiparallèles à sa base, sections dont l'angle est divisé en deux parties égales, par le plan qui est perpendiculaire à la droite qui divise en deux parties égales chacune des sections angulaires du cône.

N° 316, page 569, ligne 16, après du plan, *ajoutez :*

Toutes les droites menées du point extérieur à ceux de cette courbe, composeront une surface conique qui touchera par conséquent la surface du second degré, suivant une courbe plane; et cette surface conique ne sera elle-même que du second degré.

N° 319, page 572, ligne 17, après intégral, ajoutez :

En prenant pour exemple l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de la sphère qui a son centre à l'origine, et de laquelle on tire

$$x + pz = 0, \quad y + qz = 0;$$

on obtiendra l'équation différentielle

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0, \quad \text{qui revient à} \quad \mathrm{d}\frac{y}{x} = 0,$$

et nous apprend que

$$\frac{y}{x} = const.,$$

c'est-à-dire que la projection des lignes de plus grande pente est une droite passant par l'origine, d'où il suit que la ligne de plus grande pente est dans un plan passant par l'axe des z, qu'elle est par conséquent un grand cercle, ou un méridien de la sphère, si l'on prend cet axe pour celui de rotation.

N° 320, à la fin, page 575, ligne 8, après osculatrice, *ajoutez :*

Il suit de là que toutes les sections faites dans la surface proposée, par un plan mené suivant cette tangente, ont leur cercle osculateur sur la même sphère.

N° 325, à la fin, page 581, ajoutez :

Tout cela découle de l'équation du second degré, de laquelle dépend M (321). On en tirerait pour $z-\gamma$ deux valeurs contenant un radical, en sorte qu'on peut écrire

$$\gamma = \mathrm{F}(x, y) \pm \sqrt{\mathrm{f}(x, y)};$$

et les équations

$$y-\beta = -q(z-\gamma), \quad x-\alpha = -p(z-\gamma),$$

combinées avec celle de la surface proposée, donnant des expressions de la forme

$$y = \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad x = \mathrm{F}_2(\alpha, \beta, \gamma),$$

conduiront à un résultat de la forme

$$\gamma = \mathrm{F}'(\alpha, \beta, \gamma) \pm \sqrt{\mathrm{f}'(\alpha, \beta, \gamma)},$$

où le signe $+$ répond à l'une des courbures de la surface, et le signe $-$ à l'autre; et si ce résultat devenait rationnel, il n'indiquerait plus deux nappes d'une même surface, mais deux surfaces distinctes.

N° 327, page 586, après la ligne 12, ajoutez :

I. Il peut être curieux de chercher si cette propriété n'appartient pas à d'autres surfaces que celle de la sphère. Pour cela, il faut revenir à l'équation (8) du n° 322, qui ne peut être vérifiée indépendamment de m, à moins que

$$(1+q^2)s - pqt = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$
$$(1+q^2)r - (1+p^2)t = 0 \ldots\ldots\ldots (b),$$
$$(1+p^2)s - pqr = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

équations qui se réduisent à deux, puisqu'en éliminant s entre la première et la dernière, on retrouve la seconde. La question proposée est donc réduite à remonter, des équations différentielles partielles ci-dessus, à l'équation primitive qui leur correspond. On ne trouve que celle de la sphère; mais c'est là un problème de calcul intégral qui sera résolu, dans les additions au second volume.

En attendant, je ferai remarquer que, sur les surfaces cherchées, les deux rayons de courbure sont égaux et tombent dans le même sens. En effet, par l'équation

$$sm^2+(r-t)m-s=0,$$

à laquelle se réduit l'équation (8), quand on prend le plan tangent pour celui des abscisses, on a seulement les conditions

$$s=0 \quad \text{et} \quad r-t=0;$$

mais le même choix de coordonnées réduit aussi l'expression des rayons de courbure à

$$\delta=-\frac{(r+t)\pm\sqrt{(r+t)^2-4(rt-s^2)}}{2(rt-s^2)},$$

$$=-\frac{(r+t)\pm\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2(rt-s^2)},$$

qui, par les conditions précédentes, donne seulement $\delta=-\frac{1}{r}$.

Réciproquement, les deux rayons de courbure ne pouvant devenir égaux que sous les mêmes conditions, alors la transformée de l'équation (8) a lieu indépendamment de m.

Si l'on fait attention que la quantité soumise au radical est la somme de deux quarrés, on en conclura que la quantité f^2-4eg^2, qui n'est que la première rapportée à d'autres variables, doit avoir la même forme, et qu'ainsi l'équation $f^2-4eg^2=0$, ou

$$\{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\}^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)=0\ldots\ldots(A),$$

doit nécessairement se partager en deux autres et exprimer par conséquent deux conditions au lieu d'une. Cette remarque est due à Meusnier, qui l'a faite dans le tome X des *Mémoires des Savans étrangers*, p. 501.

Si l'on tire des équations (*a*) et (*c*) les valeurs de $1+q^2$ et de $1+p^2$, pour les substituer dans (*A*), on l'amènera aisément à la forme

$$\frac{p^2q^2}{s^2}(rt-s^2)-(1+p^2+q^2)=0,$$

d'où l'on déduira

$$p^2q^2rt-s^2(1+p^2)(1+q^2)=0, \quad \text{ou} \quad pqr.pqt-s(1+p^2).s(1+q^2)=0;$$

équation que vérifient (*a*) et (*c*) conjointement.

N° 329, page 588, ligne 3, après des xy, *ajoutez :*

I. Il arrive, dans certains cas, que ce plan touche la surface suivant une ligne droite ou courbe, dont tous les points sont alors des maxi-

mums ou des minimums par rapport au reste de la surface. Sur un cylindre droit, dont l'axe est parallèle au plan des xy, l'arête supérieure est une de ces lignes. Les surfaces annulaires décrites par un cercle dont le centre se meut sur une courbe plane, de manière que le plan du cercle soit toujours perpendiculaire à cette courbe, ont aussi pour arête supérieure, ou pour *faîte*, une courbe égale et parallèle à la première, et contenue dans un plan qui touche la surface, en sorte que si l'on prend celui de la courbe directrice pour plan des xy, les points de la seconde courbe seront tous des maximums par rapport aux autres points de la surface.

Pour en donner un exemple particulier, je supposerai que la courbe directrice soit un cercle d'un rayon égal à celui du cercle générateur; alors l'équation de la surface sera

$$z^2 = (2a - \sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2};$$

faisant, pour abréger, $\sqrt{x^2+y^2} = u$, j'en tirerai

$$z^2 = 2au - u^2, \quad zp = (a-u)\frac{x}{u}, \quad zq = (a-u)\frac{y}{u},$$

et les premières conditions du maximum seront

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{ou} \quad a - u = 0.$$

Le point singulier indiqué à l'origine par les valeurs $x = 0$, $y = 0$, est de ceux où il y a une infinité de plans tangens qui passent tous par une même droite tangente à la surface; mais le facteur $a - u = 0$, qui vérifie à lui seul les deux équations posées d'abord, donnant

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{d'où} \quad z = a,$$

appartient à un cercle parallèle au plan des xy, et contient évidemment les points de la surface les plus élevés par rapport à ce plan.

En passant aux différentielles secondes, on obtient les trois équations

$$p^2 + zr = (a-u)\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du^2}{dx^2},$$
$$pq + zs = (a-u)\frac{d^2u}{dxdy} - \frac{du}{dx}\frac{du}{dy},$$
$$q^2 + zt = (a-u)\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{du^2}{dy^2},$$

qui, dans l'hypothèse de $p = 0$, $q = 0$, $a - u = 0$, vérifient la condition $rt - s^2 = 0$, la même que $FH - G^2 = 0$, dans l'addition au n° 166.

Lorsque le plan tangent et la surface ont une ligne commune, on a nécessairement sur cette ligne $d^2z = d^2z'$, z' désignant l'ordonnée du plan tangent, dans l'équation du quel on doit regarder p et q comme des constantes, et faire seulement varier y avec x, à cause de la dépendance établie entre ces coordonnées par la ligne dont il s'agit. De cette manière, on trouve $d^2z' = qd^2y$; et comme

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 + qd^2y,$$

la condition énoncée ci-dessus donne

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{s^2 - rt}.$$

Or, on a déjà $rt = s^2$, puis $\frac{s}{t} = \frac{x}{y}$, ce qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, et conduit à $ydy + xdx = 0$, équation qui, s'accordant avec $d(a-u) = 0$, fait voir que le plan tangent se confond avec la surface, dans tous les points où $a - u = 0$.

II. Partout ailleurs, la surface que je viens de considérer n'a qu'un seul point de commun avec son plan tangent, comme cela arrive à la sphère dans tous ses points; tandis que sur le cylindre et le cône, au contraire, le contact a lieu dans toute l'étendue d'une droite pour chaque plan tangent. De là naît une division dans les surfaces, en distingant celles qui ne peuvent jamais être touchées que dans un seul point, par un plan, celles qui peuvent l'être toujours suivant une ligne, et celles à qui cela ne peut arriver que dans un nombre déterminé de lignes.

Ces diverses circonstances se lisent dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{s^2 - rt},$$

dont le second membre est toujours imaginaire lorsque $s^2 < rt$, quels que soient x et y; et l'équation de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donne en effet

$$\sqrt{s^2 - rt} = \frac{1}{z}\sqrt{-1 - \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2}},$$

résultat toujours imaginaire.

Au contraire, ce résultat sera toujours réel, si, quels que soient x et y, on a

$$s^2 = rt, \quad \text{ou} \quad s^2 > rt.$$

Enfin, on n'obtiendra qu'un nombre déterminé de lignes, lorsque le signe de $s^2 - rt$ dépendra de certaines relations entre x et y.

La discussion de la nature des surfaces et des lignes qui répondent au cas où $rt=s^2$, mènerait trop loin et serait d'ailleurs superflue, puisque ces surfaces sont caractérisées dans le n° 339, par une propriété qui comprend la précédente.

Quand le plan tangent et la surface ne peuvent coïncider dans une ligne, on peut chercher quelle est celle sur laquelle leur éloignement est un minimum aux environs du contact. Pour cela, il faut rapporter l'équation de la surface à son plan tangent, et poser les conditions qui rendent un minimum la fonction

$$r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}, \quad \text{ou} \quad r+2sm+tm^2,$$

en la différentiant par rapport à m seulement. On trouve alors

$$s+tm=0, \quad \text{d'où} \quad m=-\frac{s}{t}, \quad \text{et} \quad d^2z=\frac{rt-s^2}{t}dx^2.$$

Même numéro, à la fin, ajoutez :

I. On a déjà vu, dans l'addition au n° 327, que l'équation

$$[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0,$$

ne peut être vérifiée que par la sphère; en sorte qu'il n'y a que cette surface dont les deux courbures sont égales et dans le même sens; mais si l'on envisage l'équation ci-dessus comme ne devant avoir lieu que par une relation particulière entre y et x, elle indiquera une ligne sur laquelle les deux courbures de la surface proposée seront égales, et que Monge a nommée *ligne de courbure sphérique.*

En égalant à zéro le coefficient de la première puissance de δ, dans l'équation (7) du n° 321, on aura

$$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0,$$

équation d'une surface sur laquelle les deux rayons de courbure sont égaux, mais placés en sens contraire. On en trouvera l'intégrale au n° 773. Cette équation peut être aussi considérée sur une surface particulière, comme celle d'une ligne jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée.

II. La variation simultanée des deux variables indépendantes, dans l'équation d'une surface, embrasse quatre points (313), qui forment un quadrilatère $MmNn$, *fig.* 70 du Ier vol. Ces quatre points n'étant pas en général dans un même plan, peuvent être groupés trois à trois, de deux FIG. 70 du Ier vol.

manières distinctes, savoir, en menant la diagonale de M à N, ou celle qui va de m à n; les *plans-cordes* qui joignent chaque groupe de points sont, dans le premier cas, MmN et MnN; dans le deuxième, mMn et mNn. L'angle compris entre chacun de ces couples de plans peut être regardé comme dépendant de la courbure des surfaces; c'est pourquoi j'en vais donner la détermination.

Pour simplifier les calculs, je placerai l'origine des coordonnées au point M, et je désignerai d'abord par z', z'', z''', les ordonnées des points m, n et N, comptées à partir du plan mené par le point M, parallèlement au plan BAC des xy. Cela posé, considérant d'abord le plan qui passe par les points M, m, N, j'emploierai les formules qui terminent le n° 274, en supprimant leur dénominateur qui disparaît dans la suite du calcul; et faisant d'abord x', y' et z', nuls, je changerai

$$x'' \text{ en } dx, \quad y'' \text{ en } 0, \quad z'' \text{ en } z',$$
$$x''' \text{ en } dx, \quad y''' \text{ en } dy,$$

ce qui me donnera

$$A = z'dy, \qquad B = (z'''-z')dx, \qquad C = -dydx.$$

Pour le plan qui passe par les points M, n et N, je changerai

$$x'' \text{ en } 0, \quad y'' \text{ en } dy,$$
$$x''' \text{ en } dx, \quad y''' \text{ en } dy,$$

et j'obtiendrai

$$A' = -(z'''-z'')dy, \quad B' = -z''dx, \quad C' = dydx.$$

De ces valeurs, il résulte

$$AB'-A'B = \quad z'''dxdy(z'''-z''-z') = \quad dzdxdy.sdxdy,$$
$$AC'-A'C = -\ dy^2dx(z'''-z''-z') = -dxdy^2.sdxdy,$$
$$BC'-B'C = \quad dx^2dy(z'''-z''-z') = \quad dx^2dy.sdxdy,$$

à cause que

$$z' = pdx + \tfrac{1}{2}rdx^2 + \text{etc.},$$
$$z'' = qdy + \tfrac{1}{2}tdy^2 + \text{etc.},$$
$$z''' = pdx + qdy + \tfrac{1}{2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) + \text{etc. } (313),$$

et en mettant dz pour $pdx+qdy$: alors l'expression de $\sin V$, rapportée dans l'addition au n° 285, donne

$$\frac{s\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{1+p^2+q^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dxdy}\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{1+p^2+q^2},$$

pour la valeur du sinus de l'angle dièdre compris entre les plans MmN

et MnN, et dont l'arête est sur la diagonale MN, sinus qui peut être pris pour son arc, puisque l'angle est infiniment petit.

Je passe à l'angle dièdre ayant pour arête la diagonale mn, et je commence par le plan qui passe par les points m, n et M, pour lesquels il faut changer

$$\begin{array}{lll} x' \text{ en } dx, & y' \text{ en } o, & \\ x'' \text{ en } o, & y'' \text{ en } dy, & \\ x''' \text{ en } o, & y''' \text{ en } o, & z''' \text{ en } o; \end{array}$$

au moyen de quoi je trouve

$$A = z'dy, \qquad B = z''dx, \qquad C = -dxdy.$$

Venant aux points m, n et N, pour lesquels il faut changer

$$\begin{array}{ll} x' \text{ en } dx, & y' \text{ en } o, \\ x'' \text{ en } o, & y'' \text{ en } dy, \\ x''' \text{ en } dx, & y''' \text{ en } dy, \end{array}$$

j'en tire

$$A' = (z''-z''')dy, \quad B' = (z'-z'')dx, \quad C' = dxdy,$$

et j'obtiens ensuite

$$\begin{aligned} AB'-A'B &= dxdy(z'-z'')(z'+z''-z'''), \\ AC'-A'C &= dxdy^2(z'+z''-z'''), \\ BC'-B'C &= dx^2dy(z'+z''-z'''); \end{aligned}$$

mettant pour z', z'', z''', leurs valeurs rapportées précédemment, l'expression de $\sin V$ me donne

$$\frac{z\sqrt{(pdx-qdy)^2+dy^2+dx^2}}{1+p^2+q^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dxdy}\,\frac{\sqrt{(pdx-qdy)^2+dx^2+dy^2}}{1+p^2+q^2},$$

pour l'arc qui mesure l'angle dièdre formé sur la diagonale mn.

Quoique de forme différente en apparence, les deux résultats que je viens d'obtenir ont la même composition. Pour le reconnaître, il suffit de voir que $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ est l'expression de la diagonale MN, et $\sqrt{(pdx-qdy)^2+dx^2+dy^2}$ celle de la diagonale mn.

Ensuite, comme la normale

$$MG = z\sqrt{1+p^2+q^2} = MM'\sqrt{1+p^2+q^2} \ (317),$$

les valeurs des angles dièdres considérés ci-dessus pourront s'écrire ainsi :

$$\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{\overline{MM'}^2}{\overline{MG}^2}.MN, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{\overline{MM'}^2}{\overline{MG}^2}.mn.$$

La valeur de cette différentielle dépendant de celle de $\frac{dy}{dx}$, il y aurait lieu à chercher ses maximums et ses minimums. On pourrait la comparer soit à $\sqrt{dx^2+dy^2}$, soit à $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. En faisant

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=du,\quad dx=du\cos\alpha,\quad dy=du\sin\alpha,$$

il vient

$$\frac{s\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{1+p^2+q^2}=\frac{sdu\sqrt{1+(p\cos\alpha+q\sin\alpha)^2}}{1+p^2+q^2};$$

et si l'on représente cette différentielle par $d\epsilon$, puis qu'on cherche la condition du maximum ou du minimum de $\frac{d\epsilon}{du}$, par rapport à l'angle α, on aura

$$(p\cos\alpha+q\sin\alpha)(-p\sin\alpha+q\cos\alpha)=0,$$

d'où

$$\tang\alpha=-\frac{p}{q},\quad \text{ou}\quad =\frac{q}{p},$$

ce qui indique sur le plan des xy deux directions à angle droit.

Si l'on prenait le plan tangent pour celui des xy, les deux expressions se réduiraient à

$$d\epsilon=\frac{d^2z}{dxdy}\sqrt{dx^2+dy^2},\quad \text{d'où}\quad \frac{d\epsilon}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{d^2z}{dxdy},$$

ce qui donne une signification assez remarquable au coefficient différentiel $\frac{d^2z}{dxdy}$.

N° 333, page 594, à la fin, ajoutez :

Pour indiquer plus clairement l'usage de cette équation, je l'appliquerai à l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Kz=0,$$

qui comprend toutes les surfaces du second ordre (311).

On en déduit d'abord

$$Ax+(Cz+K)p=0,\quad By+(Cz+K)q=0,$$

d'où tirant les valeurs de p et de q, pour les substituer dans l'équation différentielle partielle des surfaces de révolution, on parviendra à un résultat de la forme

$$Mxy+Nxz+Pyz+Qx+Ry+Sz+T=0,$$

qui doit être identiquement nul, ce qui fournira, comme on voit, sept conditions; et pour les remplir, on ne peut disposer que des quatre quantités α, β, a et b, qui indiquent la position de l'axe de rotation. Il restera donc trois conditions entre les coefficiens de l'équation des surfaces proposées.

On trouvera sans peine que

$$M = A - B = 0, \quad Q = bK - A\beta = 0, \quad T = (a\beta - b\alpha)K = 0,$$
$$N = b(C - A) = 0, \quad R = B\alpha - aK = 0,$$
$$P = a(C - B) = 0, \quad S = (a\beta - b\alpha)C = 0.$$

La première, donnant $A = B$, est une condition indispensable; puis en prenant $a = 0$, $b = 0$, on vérifie encore les deux dernières équations de la première colonne, la dernière de la deuxième colonne, et la dernière de toutes. La première et la seconde de la deuxième colonne donnent alors $\alpha = 0$, $\beta = 0$; ainsi l'axe des z est celui de rotation, et la surface a pour équation

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 + 2Kz = 0.$$

On aurait pu opérer immédiatement sur l'équation générale du n° 298, mais je n'ai voulu que donner un exemple succinct; on trouvera plusieurs solutions de ce problème, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.

N° 336, *page* 599, *ligne* 15, *après* géométrique, *ajoutez :*

(365).

La construction de cette courbe est assez remarquable. On voit d'abord, par les équations (2) et (3), que les coordonnées x et y sont celles de la développée de la courbe qui aurait la quantité m pour abscisse et $\varphi(m)$ pour ordonnée; car ces équations rentrent dans celles de même désignation du n° 226, lorsqu'on change dans ces dernières α en x, β en y, x en m, y en $\varphi(m)$. Puis en conservant γ pour le rayon de courbure, on peut alors, en vertu de l'équation (1) du n° 226, substituer γ^2 à $(x-m)^2 + [y-\varphi(m)]^2$ dans l'équation (1) du n° 335, et il vient

$$\gamma^2 + z^2 = a^2, \quad \text{d'où} \quad z^2 = a^2 - \gamma^2.$$

Il suit de là qu'en élevant sur les différens points de la développée

d'une courbe plane, des perpendiculaires à son plan, l'ordonnée z, portée sur ces perpendiculaires, sera le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'autre côté sera le rayon de courbure, et qui aura pour hypoténuse la ligne constante a; mais il faudra prendre la courbe dont l'ordonnée est $\varphi(m)$, de manière que son rayon de courbure ne puisse pas devenir plus grand que a.

N° 339, page 603, ligne 15, après (1) et (2), *ajoutez :*

Cela est aisé à voir, par la génération précédente, et résulte aussi bien simplement de leurs équations; car si l'on suppose la quantité m constante, le système des équations (1) et (2) indiquera une ligne droite sur laquelle les valeurs de p et de q seront constantes et communes par conséquent au plan tangent et à la surface.

On arrive aussi, par cette dernière considération, aux équations des surfaces développables; il suffit de mettre l'équation du plan tangent sous la forme

$$z' = px' + qy' + z - px - qy;$$

on voit alors que pour qu'une surface soit touchée dans toute l'étendue d'une ligne, par son plan tangent, il faut qu'il puisse exister entre x et y une relation qui rende constantes les trois quantités

$$p, \quad q, \quad z - px - qy,$$

coefficiens de l'équation de ce plan, c'est-à-dire qui donne simultanément

$$dp = 0, \quad dq = 0, \quad d(z - px - qy) = 0;$$

sur quoi on doit remarquer que l'une quelconque de ces équations est une conséquence des deux autres, à cause que

$$d(z - px - qy) = -x dp - y dq.$$

Les deux premières conditions établissant que les quantités p et q, variables en même temps, doivent aussi être constantes en même temps, il s'ensuit que l'une dépend entièrement de l'autre, et que par conséquent $p = \pi(q)$: on doit donc, par la même raison, poser

$$z - px - qy = \omega(q), \quad \text{d'où} \quad z - x\pi(q) - yq = \omega(q),$$

à quoi il faut joindre l'équation

$$-x\pi'(q)-y=\omega'(q),$$

venant de $d(z-px-qy)=0$, et l'on aura un système équivalent à celui des équations (1) et (2).

La supposition de $p=\pi(q)$ conduisant à

$$\frac{r}{s}=\pi'(q)=\frac{s}{t},$$

les équations

$$dp=0=rdx+sdy,\quad dq=0=sdx+tdy,$$

s'accordent à donner

$$\frac{dy}{dx}=-\pi'(q),$$

c'est-à-dire constant pour les points communs au plan tangent et à la surface, ce qui ne peut avoir lieu que sur une ligne droite.

N° 340, *à la fin, page* 606.

Il y a dans la question générale de cet article, un cas particulier assez étendu, qui mérite d'être spécialement indiqué; c'est celui où δ est constant. En le représentant alors par a, on a les équations

$$[x-\alpha]^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+[z-\psi(\alpha)]^2=a^2\ldots\ldots\ldots(1),$$
$$x-\alpha+[y-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)+[z-\psi(\alpha)]\psi'(\alpha)=0\ \ldots(2),$$

appartenant à la surface qui enveloppe une suite de sphères du même rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure donnée, c'est-à-dire aux *surfaces annulaires* en général.

Voici comment on peut éliminer les fonctions arbitraires, dans ce cas. La première équation étant différentiée par rapport à x et par rapport à y, en regardant α comme constant, en vertu de la seconde, donne

$$\left.\begin{aligned}x-\alpha\quad &+[z-\psi(\alpha)]p=0,\\ y-\varphi(\alpha)&+[z-\psi(\alpha)]q=0,\end{aligned}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{aligned}\alpha&=x+[z-\psi(\alpha)]p,\\ \varphi(\alpha)&=y+[z-\psi(\alpha)]q,\end{aligned}\right.$$

ce qui conduit par conséquent à

$$y+[z-\psi(\alpha)]q=\varphi\{x+[z-\psi(\alpha)]p\}\ldots\ldots(3);$$

mettant ensuite les valeurs de $x-\alpha$ et de $y-\varphi(\alpha)$ tirées des deux différentielles partielles, dans leur équation primitive, on en déduit

$$z-\psi(\alpha)=\frac{a}{k},$$

en faisant, pour abréger, $1+p^2+q^2=k^2$; et par ce moyen on élimine $z-\psi(\alpha)$ de l'équation (3), qui devient

$$y+\frac{aq}{k}=\varphi\left(x+\frac{ap}{k}\right):$$

on chasse ensuite la fonction φ, en différentiant à l'ordinaire et par un calcul qui n'offre aucune difficulté.

N° 342, page 610, ligne 5 en remontant.

Si l'on différentie par rapport à x et par rapport à y les deux premières de ces équations, et qu'on mette pour $\pi'(a)$ sa valeur tirée de la troisième, on aura

$$0=a+[x+\varphi'(a)]\frac{da}{dx},\quad p=\psi(a)+\psi'(a)[x+\varphi'(a)]\frac{da}{dx},$$
$$1=\quad[x+\varphi'(a)]\frac{da}{dy},\quad q=\quad\psi'(a)[x+\varphi'(a)]\frac{da}{dy};$$

et par les équations de la première colonne, les valeurs de p et de q se réduiront à

$$\left.\begin{array}{l} p=\psi(a)-a\psi'(a),\\ q=\psi'(a),\end{array}\right\}\text{ d'où }\ p=\pi(q),$$

comme dans les n°s 339 et 344. Ce calcul pourrait, à la rigueur, dispenser de la vérification faite dans le n° 342.

Ibid., *à la fin, page* 612.

I. Quand les lignes droites qui forment la surface ne se coupent pas, les points où elles se rapprochent le plus forment une ligne remarquable, sur laquelle la surface se resserre; tel est dans l'hyperboloïde engendré par la révolution d'une hyperbole autour de son second axe (304), le cercle que décrit le sommet de cette courbe. La surface dont il s'agit résulte aussi de la révolution d'une droite autour d'une autre qui n'est pas dans le même plan (*Arithmétique universelle de Newton*, probl. XXXIII), et c'est sur le cercle dont nous venons de parler, que les diverses droites se rapprochent le plus; aussi Monge l'a-t-il nommé *ligne de striction.*

Pour trouver la ligne de striction sur une surface formée de lignes droites, d'une manière quelconque, il faut en considérer deux consécutives; et afin de simplifier la notation, je pose d'abord les équations

$$\left.\begin{array}{ll} y=ax+\alpha, & y'=a'x'+\alpha',\\ z=bx+\beta, & z'=b'x'+\beta',\end{array}\right\}\dots\dots\dots(1).$$

En faisant sur ces équations le calcul indiqué au n° 287, on a, pour déterminer leur plus courte distance, les équations

$$\begin{aligned} x - x' + (y - y')a + (z - z')b &= 0, \\ x - x' + (y - y')a' + (z - z')b' &= 0; \end{aligned}$$

et retranchant la première de la seconde, on obtient

$$(y - y')(a' - a) + (z - z')(b' - b) = 0;$$

mais comme

$$a' = a + \mathrm{d}a, \qquad b' = b + \mathrm{d}b,$$

le système d'équations ci-dessus peut-être remplacé par

$$\left.\begin{aligned} x - x' + (y - y')a + (z - z')b &= 0, \\ (y - y')\mathrm{d}a + (z - z')\mathrm{d}b &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(2).$$

Cela posé, mettant aussi dans les équations (1) les valeurs de a' et de b', ainsi que celles de α' et de β', qui sont $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ et $\beta + \mathrm{d}\beta$, on en tire les valeurs

$$\left.\begin{aligned} y - y' &= a(x - x') - x'\mathrm{d}a - \mathrm{d}\alpha, \\ z - z' &= b(x - x') - x'\mathrm{d}b - \mathrm{d}\beta, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(3),$$

qui changent les équations (2) en

$$\left.\begin{aligned} (x - x')(1 + a^2 + b^2) - (a\mathrm{d}a + b\mathrm{d}b)x' - a\mathrm{d}\alpha - b\mathrm{d}\beta &= 0, \\ (x - x')(a\mathrm{d}a + b\mathrm{d}b) - (\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2)x' - \mathrm{d}a\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}b\mathrm{d}\beta &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(2'),$$

et éliminant $x - x'$ entre ces deux dernières, on arrive à

$$\left.\begin{aligned} &[(1 + a^2 + b^2)(\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2) - (a\mathrm{d}a + b\mathrm{d}b)^2]x' \\ &+ (1 + a^2 + b^2)(\mathrm{d}a\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}b\mathrm{d}\beta) - (a\mathrm{d}\alpha + b\mathrm{d}\beta)(a\mathrm{d}a + b\mathrm{d}b) \end{aligned}\right\} = 0,$$

qui, après des réductions aisées à trouver, prend la forme

$$\left.\begin{aligned} &[\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 + (a\mathrm{d}b - b\mathrm{d}a)^2]x' + \mathrm{d}a\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}b\mathrm{d}\beta \\ &+ (a\mathrm{d}b - b\mathrm{d}a)(a\mathrm{d}\beta - b\mathrm{d}\alpha) \end{aligned}\right\} = 0 \ldots(4),$$

et fait connaître x' en fonction des quantités a, α, b et β. Si l'on remplace les trois dernières par $\varphi(a)$, $\psi(a)$ et $\pi(a)$, qu'elles représentent (n° 341, p. 608), il ne restera plus de différentielles; et en négligeant les quantités infiniment petites, on pourra substituer x à x'; car, ainsi qu'on devait d'ailleurs s'y attendre, on voit, par les équations (2'),

que la différence $x-x'$ est une quantité infiniment petite du premier ordre.

En n'écrivant, pour abréger, que les caractéristiques des fonctions, il viendra l'équation

$$[1+\psi'^2+(a\psi'-\psi)^2]x+\varphi'+\psi'\pi'+(a\psi'-\psi)(a\pi'-\psi\varpi')=0\ldots\ldots.(4'),$$

dont la combinaison avec (1) et (2) du n° 341, p. 608, donnera, par l'élimination de a, les équations de la ligne de striction de la surface proposée.

II. L'expression de la plus courte distance des droites consécutives qu'on a considérées ci-dessus, et qui est évidemment celle de la différentielle de l'arc de la ligne de striction, s'obtient par la formule

$$u=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

En y substituant d'abord les valeurs de $y-y'$ et de $z-z'$, tirées des équations (2), on trouve

$$u=\frac{(x-x')\sqrt{\mathrm{d}a^2+\mathrm{d}b^2+(a\mathrm{d}b-b\mathrm{d}a)^2}}{a\mathrm{d}b-b\mathrm{d}\alpha},$$

et il ne faut plus que chasser $x-x'$, en mettant sa valeur tirée de l'une des équations (2').

III. L'équation (3) du n° 342, qui exprime la condition, que les lignes droites dont la surface est formée, se coupent, revient, dans la notation de l'article I, à

$$\mathrm{d}b\mathrm{d}\alpha-\mathrm{d}a\mathrm{d}\beta=0;$$

et si l'on en tire la valeur de $\mathrm{d}\beta$ pour la substituer dans l'équation (4), le résultat se décompose en deux facteurs, dont l'un,

$$x'+\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}a}=0,$$

rentre dans l'équation

$$(a-a')x'=\alpha'-\alpha,$$

qui donne l'abscisse de l'intersection de deux droites consécutives.

La même substitution étant faite dans la première des équations (2'), conduit à

$$(x-x')(1+a^2+b^2)-(a\mathrm{d}a+b\mathrm{d}b)\left(x'+\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}a}\right)=0,$$

d'où il résulte en effet $x-x'=0$: la ligne de striction se change donc en

arête de rebroussement, quand la surface proposée devient développable.

IV. Il y a encore cette différence entre les surfaces développables et les autres surfaces composées de lignes droites, que sur ces dernières le contact ne s'étend pas sur toute la ligne qui est commune au plan tangent et à la surface; il n'a lieu qu'en un seul point; ailleurs, il y a simplement intersection du plan avec la surface; c'est ce que prouvent les calculs suivans.

Une droite quelconque de cette surface ayant pour équations

$$y = ax + \varphi(a), \quad z = x\psi(a) + \pi(a) \ldots\ldots (1),$$

et devant se trouver dans le plan tangent dont l'équation est

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y'),$$

il en résulte, d'après le n° 276, la condition

$$\psi(a) = p + aq,$$

qui, n'établissant pas une dépendance immédiate entre les coefficiens différentiels p et q, fait qu'ils peuvent varier quoique a reste constant, c'est-à-dire pour les différens points d'une même droite. On le voit encore mieux en cherchant les valeurs de p et de q par la différentiation des équations (1), qui, lorsqu'on fait

$$\frac{da}{dx} = a', \quad \frac{da}{dy} = a'',$$

conduit à

$$\begin{array}{ll} 0 = a + a'[x+\varphi'(a)], & p = \psi(a) + a'[x\psi'(a)+\pi'(a)], \\ 1 = a''[x+\varphi'(a)], & q = a''[x\psi'(a)+\pi'(a)]. \end{array}$$

Par les équations de la première colonne, on a

$$a' = -\frac{a}{x+\varphi'(a)}, \quad a'' = \frac{1}{x+\varphi'(a)},$$

ce qui donne

$$p = \psi(a) - a\frac{x\psi'(a)+\pi'(a)}{x+\varphi'(a)}, \quad q = \frac{x\psi'(a)+\pi'(a)}{x+\varphi'(a)},$$

expressions dont la valeur change avec x, quoique a soit constant, et que par conséquent, le point demeure sur une même ligne droite; ainsi le contact n'a lieu que dans un seul point.

Si l'on multiplie par a la valeur de q, et qu'on l'ajoute à celle de p, on trouve comme ci-dessus

$$p+aq=\psi(a);$$

et, des valeurs de a' et de a'', on tire l'équation

$$aa''+a'=0,$$

qui, conjointement avec la précédente, mène à l'élimination des fonctions arbitraires.

Les deux différentielles de $p+aq=\psi(a)$, étant

$$r+as+a'q=a'\psi'(a),\quad s+at+a''q=a''\psi'(a),$$

donnent

$$a''r-a's+aa''s-aa't=0,\quad \text{ou}\quad r+2as+a^2t=0\ldots\ldots(4),$$

qui, par deux nouvelles différentiations et en posant, comme dans le n° 343,

$$dr=\alpha dx+\beta dy,\quad ds=\beta dx+\gamma dy,\quad dt=\gamma dx+\delta dy,$$

conduisent aux équations

$$\alpha+2a\beta+2a's+a^2\gamma+2aa't=0,\quad \beta+2a\gamma+2a''s+a^2\delta+2aa''t=0;$$

multipliant la dernière par a, et l'ajoutant à la première, il viendra, en vertu de $a'=-aa''$,

$$\alpha+3a\beta+3a^2\gamma+a^3\delta=0\ldots\ldots(5),$$

équation qui, jointe à (4), donnera, par l'élimination de a, l'équation différentielle partielle cherchée. Le même résultat se trouve dans le n° 343, déduit d'un procédé moins direct, mais plus court.

Il faut remarquer que la première des équations (1) donne, dans la supposition de a constant, $dy=adx$, ce qui change les équations (4) et (5) en

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0,\qquad \text{ou}\quad d^2z=0,$$
$$\alpha dx^3+3\beta dx^2dy+3\gamma dxdy^2+\delta dy^3=0,\quad \text{ou}\quad d^3z=0;$$

elles expriment donc la condition que tous les points de la droite génératrice sont dans le plan tangent, ce qui doit être, puisqu'elle est tangente à la surface : ensuite, éliminer $\frac{dy}{dx}$ ou a, c'est passer d'une posi-

tion quelconque de cette génératrice, à l'ensemble de ses positions, et par conséquent à l'équation de la surface.

Observons encore que l'équation (4) n'est autre chose que $dp+adq=o$, différentielle de $p+aq=\psi(a)$, dans l'hypothèse de a constant, et qu'elle a également lieu par rapport aux surfaces développables, mais avec cette différence, que pour celles-ci elle se partage en deux, savoir, $dp=o$, $dq=o$, tandis que pour les autres surfaces, formées de lignes droites, elle établit seulement que le rapport $\frac{dp}{dq}$ ne varie pas.

N° 344, à la fin, page 617, ajoutez :

D'Alembert, dans le tome VIII de ses *Opuscules* (p. 313), a remarqué que si cette surface était un plan, elle rencontrerait celui des xy suivant une droite. L'inverse de cette proposition est vraie, parce que deux tangentes consécutives étant dans le même plan (347), et tous ces plans passant en outre par la même droite, il s'ensuit que deux plans consécutifs ont deux droites communes et n'en font par conséquent qu'un seul. Cette circonstance se reconnaîtra donc par la relation de AT'' et AT''', *fig.* 73 du Ier vol., qui sont les coordonnées du point où la tangente MT vient rencontrer le plan BAC. FIG. 73 du Ier vol.

En faisant $z'=o$ dans les équations des tangentes, on trouve

$$AT''=x'=\frac{xdz-zdx}{dz},\quad AT'''=y'=\frac{ydz-zdy}{dz};$$

et pour que ces coordonnées appartiennent à une ligne droite, il faut qu'elles satisfassent à l'équation

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1,$$

a et b étant des constantes qui déterminent la position de cette droite. Si l'on remplace x' et y' par les expressions ci-dessus, il viendra

$$\frac{1}{a}\frac{xdz-zdx}{dz}+\frac{1}{b}\frac{ydz-zdy}{dz}=1;$$

multipliant le second membre par dz, divisant l'équation par z^2, et passant tous les termes dans un seul membre, on obtiendra l'équation

$$\frac{1}{a}\frac{zdx-xdz}{z^2}+\frac{1}{b}\frac{zdy-ydz}{z^2}+\frac{dz}{z^2}=o,$$

qui revient à

$$\frac{1}{a}\,d\frac{x}{z}+\frac{1}{b}\,d\frac{y}{z}-d\frac{1}{z}=o.$$

Nous observerons que Clairaut et les premiers auteurs qui se sont occupés des courbes à double courbure, en déterminaient les tangentes par deux soutangentes. En prenant, par exemple,

$$PT'' = \frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \qquad QT''' = \frac{z\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},$$

on assignera le point où la tangente MT rencontre sa projection $M'T'$, sur le plan des xy; et la distance de ce point au pied M' de l'ordonnée $M'M$, est exprimée par

$$\frac{z\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}z}.$$

N° 347, *page* 621, *ligne* 3, *après* précédent, *ajoutez:*

Cette équation revient à

$$(x'-x)\mathrm{d}y^2\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+(y'-y)\mathrm{d}z^2\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+(z'-z)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

ce qui est bien symétrique. En rapportant tout à la variable x, considérée comme indépendante, et posant $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, il vient

$$(x'-x)\varphi'^2\mathrm{d}\frac{\psi'}{\varphi'}+(y'-y)\psi'^2\mathrm{d}\frac{1}{\psi'}+(z'-z)\mathrm{d}\varphi'=0,$$

où il ne se trouve plus qu'une seule différentiation indiquée.

N° 350, *page* 625, *ligne* 12, *après* plans, *ajoutez:*

Et cela, parce que GO est dans le premier plan osculateur, et $G'O$ dans le second, et que ces plans sont distincts.

Ibid., *ligne* 15, *ajoutez en note:*

D'Alembert, dans le tome VIII de ses *Opuscules* (p. 310), considère la courbe qui rencontre à angle droit toutes les communes sections des plans osculateurs d'une courbe proposée, c'est-à-dire toutes ses tangentes, et regarde cette dernière comme simplement à *double courbure*, lorsque l'autre est plane. Cette autre forme de même une courbe perpendiculaire à ses tangentes, qui peut être plane ou à double courbure. Dans le premier cas, la courbe proposée est à *triple courbure;* dans le second, à *quadruple courbure*, et ainsi de suite.

Les développées à double courbure d'une courbe plane (349) sont les arêtes de rebroussement de surfaces développables dont les arêtes sont toutes perpendiculaires à une même courbe plane (voy. *fig.* 75 du Ier vol.): ces arêtes de rebroussement sont

FIG. 75 du Ier vol.

donc des courbes de l'espèce que d'Alembert appelait à *double courbure* ; si on leur mène des plans normaux (348), et qu'on forme leurs développées, celles-ci seront a *triple courbure*, et ainsi de suite.

N° 351, page 626, ligne 17.

Les calculs qui suivent prennent une forme plus élégante, en les disposant comme ci-dessous.

Si l'on pose d'abord, pour abréger,

$$dxd^2y - dyd^2x = Z, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y, \quad dyd^2z - dzd^2y = X,$$

en indiquant chacune de ces expressions, par la lettre qui ne s'y trouve point, l'équation du plan osculateur (347) deviendra

$$X(x-x') + Y(y-y') + Z(z-z') = 0;$$

et en la combinant avec $du = 0$, ou

$$(x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz = 0,$$

équation du plan normal (348), on en tirera

$$x - x' = \frac{Ydz - Zdy}{Xdy - Ydx}(z-z'), \qquad y - y' = \frac{Zdx - Xdz}{Xdy - Ydx}(z-z');$$

mettant ces valeurs dans $d^2u = 0$, différentielle de l'équation du plan normal, et qui, lorsqu'on fait, pour abréger,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

devient

$$(x-x')d^2x + (y-y')d^2y + (z-z')d^2z + ds^2 = 0,$$

on obtiendra

$$z - z' = -\frac{(Xdy - Ydx)}{D}ds^2,$$

où

$$D = (Ydz - Zdy)d^2x + (Zdx - Xdz)d^2y + (Xdy - Ydx)d^2z;$$

puis

$$x - x' = -\frac{(Ydz - Zdy)ds^2}{D}, \quad y - y' = -\frac{(Zdx - Xdz)ds^2}{D};$$

et substituant ces valeurs dans

$$u^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

on trouvera

$$u^2 = \frac{[(X\mathrm{d}y - Y\mathrm{d}x)^2 + (Z\mathrm{d}x - X\mathrm{d}z)^2 + (Y\mathrm{d}z - Z\mathrm{d}y)^2]\mathrm{d}s^4}{D^2}.$$

Cela posé, on s'assurera aisément que

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0,$$

et en ajoutant le quarré de cette expression au premier facteur du numérateur de u^2, on aura

$$u^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)\mathrm{d}s^6}{D^2};$$

on verra aussi, en développant la valeur de D, qu'elle se réduit à $X^2 + Y^2 + Z^2$: on obtiendra donc, pour dernier résultat,

$$u^2 = \frac{\mathrm{d}s^6}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

comme sur la page 627.

Les quantités que, pour la symétrie, j'ai désignées par X, Y et Z, étant les A, B et C du texte, on peut aisément faire dans cette notation les calculs des numéros 352 et suivans.

N° 355, à la fin, page 633, ajoutez :

Il est d'abord évident que la différentielle de la première flexion de la courbe, d'après ce qu'on a vu dans les additions au n° 255 et au n° 351, est exprimée par

$$\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}s}{u} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\mathrm{d}s^2},$$

et qu'elle est la même chose que l'angle compris entre deux tangentes consécutives de la courbe proposée.

Rien n'est plus aisé que de la déterminer par cette dernière considération ; car les équations de la tangente (344) étant mises sous la forme

$$x - x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}(z - z'), \quad y - y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(z - z'),$$

pour être comparées aux formules du n° 284, on aura

$$m = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \quad n = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z};$$

puis les valeurs consécutives

$$m' = \frac{dx}{dz} + d\,\frac{dx}{dz}, \quad n' = \frac{dy}{dz} + d\,\frac{dy}{dz},$$

ce qui changera l'expression de sin V en

$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2}}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

c'est-à-dire le même résultat que ci-dessus. On le déduirait aussi de l'angle de deux plans normaux consécutifs (348).

En le substituant dans la formule $d\varepsilon = \frac{ds}{u}$, on aura sur-le-champ l'expression du rayon de courbure absolu.

La seconde flexion, dont je représenterai la différentielle par $d\varepsilon'$, n'est pas plus difficile à obtenir par l'équation du plan osculateur

$$X(x - x') + Y(y - y') + Z(z - z') = 0.$$

Cette équation, comparée aux formules du n° 285, donne

$$A = X, \quad B = Y, \quad C = Z,$$

dont les valeurs consécutives sont

$$A' = X + dX, \quad B' = Y + dY, \quad C' = Z + dZ,$$

et l'expression de sin V, rapportée dans l'addition au n° 285, conduit à

$$d\varepsilon' = \frac{\sqrt{(XdY - YdX)^2 + (ZdX - XdZ)^2 + (YdZ - ZdY)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

résultat composé avec les fonctions X, Y et Z, comme $d\varepsilon$ l'est avec dx, dy, dz, et dont le développement est susceptible de grandes réductions. En effet, si l'on pose

$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = X', \quad d^2zd^3x - d^2xd^3z = Y', \quad d^2xd^3y - d^2yd^3x = Z',$$

on obtient

$$\begin{aligned} XdY - YdX &= dz(X'dx + Y'dy + Z'dz), \\ ZdX - XdZ &= dy(X'dx + Y'dy + Z'dz), \\ YdZ - ZdY &= dx(X'dx + Y'dy + Z'dz), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$d\varepsilon' = \frac{(X'dx + Y'dy + Z'dz)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$$
$$= \frac{[dx(d^2y d^3z - d^2z d^3y) + dy(d^2z d^3x - d^2x d^3z) + dz(d^2x d^3y - d^2y d^3x)]ds}{(dy d^2z - dz d^2y)^2 + (dz d^2x - dx d^2z)^2 + (dx d^2y - dy d^2x)^2},$$

expression que M. Lancret a trouvée par d'autres considérations, et dont le numérateur est précisément la fonction égalée à zéro, pour exprimer la condition que les rayons de courbure absolue se coupent (p. 631 du Ier vol.), ce qui rentre dans les considérations actuelles, où son évanouissement indique la coïncidence de deux plans osculateurs consécutifs. Je ne poursuivrai pas plus loin ces calculs, mon but n'ayant été que de faire remarquer la symétrie des formules.

N° 365, à la fin, page 652, ajoutez :

Lorsqu'on a, comme ci-dessus, l'équation différentielle à trois variables, d'une famille de courbes liées par une propriété commune, on peut, au moyen des formules que j'ai données dans le n° 361 (d'après le Mémoire cité au n° 357), trouver une équation différentielle des surfaces développables dont ces courbes sont l'arête de rebroussement; mais au lieu d'employer ces valeurs telles qu'elles sont présentées à l'endroit cité, et comme l'a fait Monge, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tom. I, p. 210), j'y introduirai la fonction $z - px - qy$, dont on a déjà vu plus haut (addit. au n° 339) quelques propriétés, et que je représenterai par u.

Pour cela, je remonterai aux équations (1), (2) et (3) du n° 361, auxquelles, en séparant les x', y', z' des x, y, z, je donnerai la forme

$$z' = px' + qy' + u \ldots\ldots\ldots\ldots (1'),$$
$$0 = x'dp + y'dq + du \ldots\ldots\ldots\ldots (2'),$$
$$0 = x'd^2p + y'd^2q + d^2u \ldots\ldots\ldots\ldots (3');$$

les deux dernières conduisent à

$$x' = \frac{dq d^2u - du d^2q}{dp d^2q - dq d^2p}, \quad y' = \frac{du d^2p - dp d^2u}{dp d^2q - dq d^2p};$$

et substituant dans (1'), il vient

$$z' = \frac{p(dq d^2u - du d^2q) + q(du d^2p - dp d^2u) + u(dp d^2q - dq d^2p)}{dp d^2q - dq d^2p};$$

joignant à ces expressions les suivantes,

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{dq}{pdq - qdp}, \quad \frac{dy'}{dz'} = -\frac{dp}{pdq - qdp} \ (361),$$

où j'ai accentué les variables x, y et z, pour les distinguer des coordonnées de la surface cherchée, on aura tout ce qu'il faut pour transformer une équation

$$F\left(x', y', z', \frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}\right) = 0,$$

appartenant à une famille de courbes, en une autre qui ne contiendra que les quantités p, q, u, les différentielles dp, dq, du, et les fonctions

$$dpd^2q - dqd^2p = dp^2 d\frac{dq}{dp},$$
$$dqd^2u - dud^2q = dq^2 d\frac{du}{dq},$$
$$dud^2p - dpd^2u = du^2 d\frac{dp}{du}.$$

Elle sera en même temps aux différentielles totales et aux différentielles partielles; et comme on peut la représenter par

$$f\left(p, q, u, \frac{dp}{dq}, \frac{du}{dq}, \frac{1}{dq} d\frac{dp}{dq}, \frac{1}{dq} d\frac{du}{dq}\right) = 0,$$

on voit qu'en y introduisant les relations

$$p = \pi(q), \quad u = \omega(q) \text{ (addit. au n° 339)},$$

particulières aux surfaces développables, on la change en

$$f[q, \pi(q), \omega(q), \pi'(q), \omega'(q), \pi''(q), \omega''(q)] = 0,$$

forme sous laquelle elle établit une dépendance entre les fonctions arbitraires des équations

$$z - x\pi(q) - yq = \omega(q)$$
$$-x\pi'(q) - y = \omega'(q),$$

qui embrassent la totalité des surfaces développables.

En se donnant à volonté la forme de la fonction $\pi(q)$, on aura pour déterminer $\omega(q)$ une équation différentielle à deux variables seulement.

Cette recherche n'ayant encore aucune application utile, je ne m'arrêterai pas à former l'équation correspondante à celle qui termine le n° 365, ce qui d'ailleurs est sans difficulté.

CORRECTIONS ET ADDITIONS

POUR LE SECOND VOLUME.

CHAPITRE PREMIER.

N° 375, page 10, ligne 1re, après les formules, ajoutez l'exemple suivant :

Soit

$$\frac{dx}{(x+a)(x+a')}=\frac{Ndx}{x+a}+\frac{N'dx}{x+a'};$$

on trouve d'abord

$$N+N'=0,\quad Na'+N'a=1,\quad \text{d'où}\quad N=\frac{1}{a'-a},\quad N'=\frac{1}{a-a'},$$

ce que la supposition de $a'=a$ change en

$$N+N'=0,\quad N+N'=\frac{1}{a},\quad N=\frac{1}{0},\quad N'=\frac{1}{0}.$$

Ces équations sont évidemment contradictoires, et les valeurs qu'on en tire sont infinies; mais si l'on intègre d'abord, en supposant les binomes inégaux, on trouvera

$$\frac{1}{a'-a}\left\{\int\frac{dx}{x+a}-\int\frac{dx}{x+a'}\right\}=\frac{1}{a'-a}\{\,l(x+a)-l(x+a')\}+const.,$$

résultat dont la partie variable devient $\frac{0}{0}$ quand $a'=a$; et si l'on en cherche la vraie valeur (145), on obtiendra $-\frac{1}{x+a}$, ce qui est en effet l'intégrale de la fraction $\frac{dx}{(x+a)^2}$, dans laquelle la supposition de $a'=a$ change la proposée: ce passage rentre donc dans la loi générale, comme celui du n° 368.

Même numéro, à la fin, page 11.

Je n'ai point construit ici de formule générale, parce que dans la

question qu'il s'agit de résoudre, les quantités données sont exprimées en nombres, le plus souvent; mais si l'on considère la fraction

$$\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots+T}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\iota)\text{ etc.}},$$

le nombre des facteurs du dénominateur étant n, on trouvera aisément, par ce qui précède, qu'elle équivaut à

$$\begin{aligned}&\frac{A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-2}+C\alpha^{n-3}\ldots+T}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\iota)\text{ etc.}}\,\frac{1}{x-\alpha}\\&+\frac{A\beta^{n-1}+B\beta^{n-2}+C\beta^{n-3}\ldots+T}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\iota)\text{ etc.}}\,\frac{1}{x-\beta}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

Ce résultat, déjà obtenu par Maclaurin (*Traité des Fluxions*, nos 776 et suivans), étant une fonction symétrique des lettres α, β, γ, etc., montre bien que la valeur des fractions partielles ne dépend point de l'ordre dans lequel on les détermine.

N° 377, à la fin, page 13, ajoutez :

On peut chercher en même temps les deux fractions partielles, en posant

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x+\alpha+\beta\sqrt{-1}}+\frac{B}{x+\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{U_1}{Q_1},$$

d'où

$$U_1=\frac{U-[A(x+\alpha-\beta\sqrt{-1})+B(x+\alpha+\beta\sqrt{-1})]Q_1}{(x+\alpha+\beta\sqrt{-1})(x+\alpha-\beta\sqrt{-1})};$$

et faisant successivement

$$x=-\alpha-\beta\sqrt{-1},\quad x=-\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

on trouvera pour A et B les mêmes valeurs que ci-dessus.

N° 378, page 14, ligne 12, après etc., *ajoutez :*

C'est ce dont on se convaincra, en observant que pour obtenir cette seconde suite de fractions partielles, il suffit de changer dans les calculs qui ont servi pour obtenir la première, le signe de $\sqrt{-1}$; les expressions de m, m_1, etc., n, n_1, etc., demeureront les mêmes, à ce signe près.

Ibid., ligne 6 en remontant, après réel, *ajoutez :*

savoir, $2(Xm+Yn)$; on aura donc pour l'intégrale

$$\frac{2(Xm+Yn)}{(1-p)[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}}.$$

Ibid., ligne dernière, après 374, *ajoutez :*

Cette manière d'opérer a, sur celle du numéro suivant, l'avantage de conduire directement à l'intégrale de chaque couple de fractions partielles, et de dispenser de la réduction d'intégrales qui est exposée dans le second alinéa du n° 379, réduction qui fait un double emploi avec celles qu'on trouve plus loin (394) pour les différentielles binomes.

N° 380, à la fin, page 20, ajoutez :

On trouvera, au n° 1118, de plus grands développemens sur ce sujet.

N° 386, page 30, ligne 3.

Les formules qu'on voit au commencement de cette page remplissent bien le but proposé; mais on met plus de symétrie dans les signes, en posant, comme l'a fait Euler,

$$\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=z-x, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{z^2-\alpha}{\beta+2z}.$$

On m'a fait remarquer aussi que la valeur de

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}}=\frac{dx}{z-x},$$

s'obtenait tout de suite en différentiant l'équation qu'on forme en élevant au quarré les deux membres de la première, parce que

$$\beta dx=2zdz-2xdz-2zdx, \quad \text{revient à} \quad \beta dx+2zdx=2(z-x)dz,$$

et qu'on en tire

$$\frac{dx}{z-x}=\frac{2dz}{\beta+2z}, \quad \text{et} \quad \frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{2}{\gamma}\frac{Zdz}{\beta+2z}.$$

En appliquant ces formules à la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, on arriverait tout de suite au dernier résultat du n° 387.

Si, dans la transformation relative à $\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$, on différentie l'équation $a'-x=(x-a)z^2$, on en tirera

$$\frac{dx}{(x-a)z}=-\frac{2dz}{1+z^2}, \quad \text{valeur de} \quad \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}};$$

et l'on aura par conséquent

$$\int\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}=-\frac{2}{\gamma}\int\frac{Zdz}{1+z^2}.$$

N° 389, à la fin, page 33.

L'importance de l'intégration contenue dans ce numéro, me permet d'ajouter ici qu'on y parvient immédiatement en faisant

$$\sqrt{1-x^2}=z-x\sqrt{-1},$$

d'où il suit

$$1=z^2-2zx\sqrt{-1}, \quad 0=2zdz-2xdz\sqrt{-1}-2zdx\sqrt{-1},$$
$$\frac{dx}{z-x\sqrt{-1}}=\frac{dz}{z\sqrt{-1}}, \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{z-x\sqrt{-1}}=\int\frac{dz}{z\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{l}z+const.$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{l}(\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1})+const.$$

N° 394, à la fin, page 38, ajoutez :

L'intégration par parties peut s'étendre aux produits d'un nombre quelconque de facteurs; j'ai rapporté, dans le présent volume, p. 490, la formule qui répond à $\int uvdt$; mais on peut encore généraliser ces expressions, en considérant des fonctions quelconques au lieu de produits. Soit, pour exemple, la différentielle $f(u, v)dv$, u et v étant des fonctions de x; si l'on intègre cette différentielle par rapport à v, en supposant d'abord u constant, que le résultat soit U, et qu'on en prenne la différentielle totale, on aura

$$dU=\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dv}dv=\frac{dU}{du}du+f(u, v)dv;$$

passant ensuite aux intégrales, on formera l'équation

$$U=\int\frac{dU}{du}du+\int f(u, v)dv,$$

dont on tirera

$$\int f(u, v)dv = U - \int \frac{dU}{du}du,$$

formule qui peut être utile dans quelques cas.

N° 428, page 84, ligne 5 en remontant.

Il est bon de remarquer dans cet endroit la première réduction que subit l'exemple proposé, savoir,

$$\int x^m dx(1x)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m dx(1x)^{n-1},$$

parce que le seul changement de l'exposant n en $n-1$, $n-2$, etc., en fait sortir la formule générale rapportée au-dessous, et montre comment elle doit se terminer.

N° 430, page 87, ligne 7 en remontant.

Même observation par rapport à cet exemple, pour lequel on a

$$\int \frac{x^m dx}{(1x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(1x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(1x)^{n-1}},$$

formule qui peut s'obtenir par le renversement de l'expression précédente de $\int x^m dx(1x)^n$, dans laquelle l'intégrale du second membre devient la plus élevée, lorsque l'exposant n est négatif.

N° 440, page 97, ligne 6 en remontant, ajoutez :

On peut, dans toutes ces formules, substituer l'arc binome $nz+m$ à l'arc nz; on aura encore

$$\int dz\cos(nz+m) = \frac{1}{n}\sin(nz+m) + const.,$$

et ainsi du reste.

Page 98, ligne 1re, après fonctions, *mettez un point et ajoutez :*

Nous prendrons pour exemple

$$dz\sin(mz+n)\cos(pz+q),$$

différentielle que l'expression connue

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) + \tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$

change en

$$\tfrac{1}{2}\,dz\{\sin[(m+p)z+n+q]+\sin[(m-p)z+n-q]\},$$

et dont l'intégrale est par conséquent

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+p}\cos[(m+p)z+n+q]+\frac{1}{m-p}\cos[(m-p)z+n-q]\right\}+const.$$

Ce procédé s'appliquerait de même à toute autre fonction de ce genre,

N° 446, page 104, ligne 3, au lieu de sur $\int dz$, *mettez :*

sur $-\frac{\cos z}{\sin z}=-\cot z$ et $\frac{\sin z}{\cos z}=\tan z$, comme on le voit en faisant, dans la formule (3), $n=0$, $m=2$, et dans la formule (4), $m=0$, $n=2$;

N° 447, page 104, ligne dernière, ajoutez :

On ramène à cette formule les différentielles $\int\frac{dz}{\sin z}$ et $\int\frac{dz}{\cos z}$, en observant que

$\sin z=2\sin\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}z$, $\cos z=\sin(\frac{1}{2}\pi-z)=2\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-z)\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-z)$,

et par ce moyen on évite les transformations qui sont faites sur la page 105.

N° 451, à la fin, page 109, ajoutez :

On peut joindre à ces différentielles la suivante,

$$\frac{d\psi}{m^2\cos\psi^2+n^2\sin\psi^2},$$

qu'on rencontre dans les recherches sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques.

Soit $\tan\psi=u$; on aura $\frac{d\psi}{\cos\psi^2}=du$,

$$\int\frac{d\psi}{m^2\cos\psi^2+n^2\sin\psi^2}=\int\frac{du}{m^2+n^2u^2}=\frac{1}{mn}\int\frac{\frac{n}{m}du}{1+\frac{n^2}{m^2}u^2},$$

$$=\frac{1}{mn}\text{ arc }\left(\tan=\frac{nu}{m}\right)+const.$$

On ramène aussi cette différentielle à celle du n° 449, en lui donnant d'abord la forme

$$\frac{d\psi}{(m^2-n^2)\cos\psi^2+n^2},$$

et en observant que $\cos\psi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\psi$; il vient alors

$$\frac{d\psi}{m^2\cos\psi^2 + n^2\sin\psi^2} = \frac{2d\psi}{m^2 + n^2 + (m^2 - n^2)\cos 2\psi},$$

où il n'y a plus qu'à poser $2\psi = z$, $m^2 + n^2 = a$, $m^2 - n^2 = b$.

N° 471, page 136, ligne dernière du texte, ajoutez :

Une intégrale définie peut aussi être rapportée à la valeur moyenne prise entre toutes celles que reçoit la fonction X dans l'intervalle des limites données; car cette valeur moyenne est égale à

$$\frac{Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots + Y'_{n-1}}{n} \text{ (Arithmétique)};$$

et en y mettant pour n sa valeur $\frac{a_n - a}{\alpha} = \frac{b - a}{\alpha}$, on aura

$$\frac{(Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots\ldots + Y'_{n-1})\alpha}{b - a} = \frac{1}{b - a}\int X dx,$$

cette intégrale ayant pour limites $x = a$ et $x = b$.

N° 473, à la fin, page 138, ajoutez en note :

Il est utile de connaître des limites entre lesquelles soit comprise la quantité qu'on cherche, parce qu'on peut juger ainsi du degré d'approximation qu'on a atteint; mais il faut observer que le milieu entre deux expressions dont les erreurs sont de signes contraires, n'approche nécessairement de la vérité qu'autant que la plus forte des deux erreurs est moindre que trois fois la plus faible. Dans tous les autres cas, c'est pour éviter le hasard de tomber sur le plus grand écart, qu'on est fondé à prendre le milieu entre deux valeurs approchées d'une même grandeur.

CHAPITRE II DU SECOND VOLUME.

N° 498, à la fin, page 171, ajoutez :

FIG. 14 du T. II. Il n'est pas difficile de conclure le segment $ACQM$, *fig.* 14 du tom. II, du segment APM, dont l'expression termine la page 170. En effet, APM étant nul lorsque $y = 0$, on doit supprimer la constante; et comme $ACQM = ACQP - APM$, on aura

$$ACQM = 2ax + 2y\sqrt{2ay - y^2} - 3\int dy\sqrt{2ay - y^2};$$

mais en rapportant les arcs et les sinus au rayon a, on a aussi

$$x = \text{arc (sin. ver.} = y) - \sqrt{2ay - y^2};$$

par conséquent

$$ACQM = 2a.\text{arc}(\text{sin. ver.} = y) - 2a\sqrt{2ay - y^2}$$
$$+ 2y\sqrt{2ay - y^2} - 3\int dy\sqrt{2ay - y^2};$$

or, $\frac{1}{2}a.\text{arc}(\text{sin. ver.} = y)$ exprime le secteur formé sur l'arc mq, et est par conséquent égal au segment mnq, puis au triangle formé par le sinus, le cosinus et le rayon; ainsi

$$2a.\text{arc}(\text{sin. ver.} = y) = 4qmn + 2(a-y)\sqrt{2ay - y^2}$$
$$= 4\int dy\sqrt{2ay - y^2} + 2(a-y)\sqrt{2ay - y^2},$$

valeur qui, réduisant celle de $ACQM$ à $\int dy\sqrt{2ay - y^2}$, donne.... $ACQM = qmn$.

N° 500, page 174, ligne 10, ajoutez en note :

Descartes pensait qu'aucune courbe ne pouvait être exactement rectifiable, à cause qu'il n'y avait aucun élément commun entre une ligne droite et une ligne courbe, assertion assez singulière, et bientôt démentie par Van-Heuraet et Neil, qui trouvèrent presqu'en même temps, la rectification de la parabole cubique $ay^2 = x^3$, non pas directement, comme on vient de le voir, mais en la faisant dépendre de la quadrature de la parabole ordinaire, connue depuis Archimède.

Cette réduction, à laquelle ils parvinrent, par des considérations géométriques, où les petits arcs de courbe sont pris pour des lignes droites, résulte bien simplement de la formule $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; car si l'on représente par z la normale à la courbe proposée, l'équation

$$z = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \quad \text{donnant} \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{z\,dx}{y},$$

conduit à

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\frac{z\,dx}{y},$$

par où l'on voit que l'arc d'une courbe quelconque est proportionnel au segment de celle qui aurait pour ordonnée le quotient de la normale divisée par l'ordonnée primitive. (*Voy.* dans l'édition latine de la *Géométrie* d Descartes donnée par Schooten, la préface, et à la fin, la Lettre de Van-Heuraet, datée de 1659; *voy.* aussi *Hugenii Opera varia*, tom. I, pag. 101, et *Wallisii Opera*, tom. I, pag. 551).

N° 512, à la fin, page 184, ajoutez :

Les cycloïdes alongées et accourcies se rectifient par des arcs d'ellipse. Cela se voit en prenant les formules du premier alinéa de la page 498 du premier volume. On en tire

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ds}{a}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{s}{a}}.$$

Pour la cycloïde ordinaire, $b=a$, d'où il résulte

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds\sqrt{2\left(1-\cos\frac{s}{a}\right)}.$$

Cette remarque a été faite par Pascal; mais il n'a pas cependant trouvé la rectification de la cycloïde; c'est Wren qui y est parvenu le premier, et sa découverte a été connue avant celle de Van-Heuraet; mais elle ne comptait pas, contre l'opinion de Descartes, rapportée plus haut, parce que la base de la cycloïde dépend du cercle. (*Voyez* les *Opera varia* de Fermât, pag. 89.)

N° 518, page 189, ligne 5 en remontant, après $x+h$, ajoutez :

Le fréquent usage qu'on fait de la considération du corps........ $M'm'N'n'nMmN$, auquel la dénomination de *prisme* ne convient qu'imparfaitement, semblerait demander qu'on lui assignât un nom particulier, et je proposerais alors celui de *colonne*.

N° 520, à la fin, page 194, ajoutez :

Il y a des cas où un changement d'ordre dans les intégrations conduit à des résultats divers. *Voyez* le troisième volume, page 498.

Lagrange, en s'occupant d'un cas singulier de l'attraction des sphéroïdes elliptiques, a remarqué un paradoxe qui consiste en ce qu'une fonction toujours nulle, acquiert par l'intégration une valeur assignable; et cela arrive par l'introduction d'un diviseur égal au facteur qui anéantirait la formule dans la seconde intégration. (*Voy.* à ce sujet le 15ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 57.)

N° 521, page 195, ligne 12, ajoutez :

Dans le mode d'intégration suivi plus haut, le cône est décomposé en tranches hyperboliques parallèles au plan des xz.

Ibid., *ligne* 15.

Ici, le calcul serait un peu plus simple, si l'on posait $\sqrt{z^2+y^2}=kx$; le cône serait décomposé en tranches circulaires parallèles au plan des yz.

N° 522, page 196, ligne 7, ajoutez :

Quand on traite les courbes par la considération des infiniment pe-

tits, on est tenu, ainsi que cela a été dit n° 257, de justifier de l'ordre des quantités qu'on néglige. Ici, sur chaque trapèze curviligne $PEep$, on néglige un petit triangle qui n'est qu'une partie du rectangle $dxdy$, dy étant la différence des ordonnées PE et pe. Ce produit, intégré par rapport à y, depuis $y=b$ jusqu'à $y=b'$, donne $(b'-b)dx$, ce qui ne forme qu'un infiniment petit du premier ordre et représente le rectangle $MQSN$ de la figure 2, n° 475, page 139.

Ibid., *ligne 7 en remontant, ajoutez :*

Ici, on néglige sur le prisme (ou colonne) ayant pour base $M'm'N'n'$, un corps moindre que le parallélépipède $dxdydz$ (ce dz étant celui de la surface), terme du troisième ordre; tandis que $zdxdy$ n'est que du second. En intégrant le produit $dxdydz$ par rapport à z, depuis $z=c$ jusqu'à $z=c'$, il viendrait $dxdy(c'-c)$ prisme qui répond au rectangle $MQSN$ cité plus haut, et qui surpasse la somme des volumes négligés dans l'évaluation de la tranche dont les deux ordonnées extrêmes sont $z=c$, $z=c'$, et comprise entre deux plans dont l'un passe par ces ordonnées, et l'autre leur est parallèle.

Si l'on intégrait ensuite le produit $dxdy(c'-c)$ dans le sens de l'épaisseur de cette tranche, c'est-à-dire par rapport à x ou à y seulement, on n'arriverait encore qu'à un résultat du premier ordre, qui devrait par conséquent se négliger vis-à-vis des quantités finies.

N° 523, *à la fin, page* 198.

Pour s'assurer, par la considération des infiniment petits, que le quadrilatère $MXZY$, placé sur le plan tangent, est le seul dont il faille tenir compte, il suffit de remarquer qu'il est le seul dont l'expression soit du deuxième ordre; les deux autres quadrilatères et les deux triangles ayant une de leurs dimensions du premier ordre et l'autre du deuxième, sont nécessairement du troisième. Comparant ensuite les triangles YMZ et nMN, le premier formé par des tangentes et le second par des cordes, qui ne diffèrent que dans les quantités du second ordre, on voit, sans calcul, que leurs aires ne peuvent différer que dans le troisième ordre.

Il manque ici un exemple de l'usage de la formule

$$s=\iint dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}:$$

la sphère en fournit un très-simple. Comme on a

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad x+pz=0,\quad y+qz=0$$

il vient

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};$$

on obtient ensuite

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = r\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right);$$

en prenant cette intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\sqrt{r^2-y^2}$, on trouve $\frac{\pi r}{2}$, et l'on a, par la seconde intégration, $\int \frac{\pi r}{2}\,dy = \frac{\pi r y}{2}$. Ceci n'est encore que l'expression de $BDHF$, *fig.* 18 du tom. II; c'est-à-dire le quart de la zone entière, qui est donc égale à $2\pi r y$, résultat qui s'accorde avec les élémens de Géométrie, et qui, étant pris depuis $y=-r$ jusqu'à $y=+r$, donne $4\pi r^2$ pour la sphère entière.

FIG. 18 du T. II.

N° 526, page 203, après la ligne 10.

La figure citée à cet article, ne représente pas le cône dans la situation la plus ordinaire et la plus aisée à concevoir; on trouvera peut-être ce qui suit plus simple.

FIG. 26 Le cercle AM, *fig.* 26, représente la base placée sur un plan horizontal, la hauteur du cône est SS'; ST est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la tangente menée au point M de la base, et par conséquent la hauteur du triangle mSM, qui est l'élément de l'aire demandée. Posant, en conséquence,

$$SS'=a,\quad OS'=b,\quad OM=r,\quad AOM=\varphi,$$

et menant $S'E$ parallèle à MT, on a

$$EO=OS'\cos S'OE=b\cos\varphi,\quad S'T=OM-EO=r-b\cos\varphi,$$
$$ST=\sqrt{\overline{SS'}^2+\overline{S'T}^2} = \sqrt{a^2+(r-b\cos\varphi)^2},$$
$$mSM=\tfrac{1}{2}\overline{Mm}\times\overline{ST}=\tfrac{1}{2}r\,d\varphi\sqrt{a^2+(r-b\cos\varphi)^2}.$$

N° 529, à la fin, page 206, ajoutez:

I. La transformation des variables de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

par les formules de M. Yvory (addit. au n° 507), donne lieu à une application fort simple des précédentes. Quand on fait

$$x = a \sin t \cos u, \quad y = b \sin t \sin u, \quad z = c \cos t,$$

il vient

$$P = a \cos t \cos u, \qquad Q = -a \sin t \sin u,$$
$$P' = b \cos t \sin u, \qquad Q' = b \sin t \cos u,$$
$$PQ' - P'Q = ab \sin t \cos t,$$

et

$$\int\int z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc\int\int \mathrm{d}t\mathrm{d}u \sin t \cos t^2 = abc\int \mathrm{d}u \int -\mathrm{d}(\cos t)\cos t^2$$
$$= -\frac{abc}{3}\int \mathrm{d}u \cos t^3;$$

mais $\cos t^3$ pris entre les limites $t = 0$ et $t = \pi$ donnant -2, on a pour dernier résultat

$$\frac{2abc}{3}\int \mathrm{d}u = \frac{2abc}{3}u = \frac{4\pi abc}{3},$$

lorsqu'on intègre entre les limites $u = 0$ et $u = 2\pi$.

Cette expression du volume d'un ellipsoïde quelconque, devient celle du volume de la sphère, quand $a = b = c$.

II. L'aire de l'ellipsoïde dépend de l'expression

$$\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1 + \frac{c^4x^2}{a^4z^2} + \frac{c^4y^2}{b^4z^2}},$$

que la transformation ci-dessus change en

$$ab\int\int \mathrm{d}t\mathrm{d}u \sin t \cos t\sqrt{1 + \frac{c^2 \sin t^2 \cos u^2}{a^2 \cos t^2} + \frac{c^2 \sin t^2 \sin u^2}{b^2 \cos t^2}}$$
$$= \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}t \sin t\sqrt{a^2b^2 \cos t^2 + b^2c^2 \sin t^2 \cos u^2 + a^2c^2 \sin t^2 \sin u^2}.$$

On ne peut effectuer en termes finis qu'une seule de ces intégrations. Si l'on commence par la variable t, qu'on fasse

$$b^2 \cos u^2 + a^2 \sin u^2 = \alpha^2, \qquad \cos t = s,$$

et qu'on chasse $\sin t^2$, il viendra, pour la première intégration,

$$-\int \mathrm{d}s\sqrt{c^2\alpha^2 + (a^2b^2 - \alpha^2c^2)s^2},$$

qui dépend des logarithmes, parce que a^2b^2 surpasse toujours α^2c^2, quand on a soin de prendre pour c la plus petite des trois quantités a, b, c : cela se voit en cherchant le maximum de la fonction α^2.

La seconde intégration surpassant les forces actuelles de l'Analyse, il est plus commode de commencer par réduire le radical en série; mais afin de ne pas avoir la fonction α au dénominateur, reprenons la formule

$$abffdtdu\sin t\cos t\sqrt{1+\frac{c^2\sin t^2\cos u^2}{a^2\cos t^2}+\frac{c^2\sin t^2\sin u^2}{b^2\cos t^2}};$$

en faisant passer $\cos t$ sous le radical, et mettant pour $\cos t^2$ sa valeur $1-\sin t^2$, nous aurons

$$abffdtdu\sin t\sqrt{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\cos u^2-\frac{c^2}{b^2}\sin u^2\right)\sin t^2};$$

mettant dans la parenthèse $\sin u^2+\cos u^2$, au lieu de 1, nous trouverons

$$abffdtdu\sin t\sqrt{1-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\cos u^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}\sin u^2\right)\sin t^2},$$

expression où le radical prendra la forme

$$\sqrt{1-(A^2\cos u^2+B^2\sin u^2)\sin t^2}=\sqrt{1-\beta^2\sin t^2},$$

si l'on fait

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}=A^2,\quad \frac{b^2-c^2}{b^2}=B^2,\quad \text{et}\quad A^2\cos u^2+B^2\sin u^2=\beta^2.$$

Le reste du calcul n'est pas difficile, et d'ailleurs on peut consulter les *Exercices de Calcul intégral* (tom. I, p. 182); on y trouvera en outre la solution du même problème, en prenant pour élément de l'aire un quadrilatère compris entre les lignes consécutives de plus grande et de moindre courbure. M. Legendre est parvenu de cette manière à ramener aux transcendantes elliptiques la dernière intégrale.

CHAPITRE III DU SECOND VOLUME.

N° 546, à la fin, page 227, ajoutez :

Toute fonction différentielle qui ne satisfera pas à cette condition, ne pourra pas résulter d'une différentiation, et ne sera par conséquent pas une *différentielle exacte*.

J'ai employé quelquefois le mot *complète*, au lieu d'*exacte;* mais ce dernier, qui est le plus en usage, me paraît aussi le plus convenable, parce que *complète* est plutôt opposé à *partielle*, et synonyme de *totale*, et que les *différentielles partielles* doivent être exactes par rapport aux quantités qu'on y a regardées comme variables.

N° 548, page 230, ligne 17, ajoutez en note :

On s'assure aisément qu'aucune de ces équations n'est la conséquence des deux autres, et qu'elles sont toutes nécessaires. En différentiant la première par rapport à z, la seconde par rapport à y, on arrive à

$$\frac{d^2M}{dydz}=\frac{d^2N}{dxdz},\quad \frac{d^2M}{dzdy}=\frac{d^2P}{dxdy},\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2N}{dxdz}=\frac{d^2P}{dxdy},$$

équation qui semble d'abord la différentielle de la troisième, par rapport à x; mais elle est plus générale que celle-ci, car on la déduirait aussi de l'équation

$$\frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy}+\varphi(y, z),$$

dans laquelle $\varphi(y, z)$ désigne une fonction quelconque des variables y et z.

CHAPITRE IV DU SECOND VOLUME.

N° 569, à la fin, page 263, ajoutez :

Il suit de là que si l'on parvenait à découvrir deux facteurs distincts, propres à rendre intégrable l'équation différentielle proposée, on aurait sur-le-champ son intégrale. En effet, l'un de ces facteurs étant pris pour z, l'autre serait $z\varphi(u)$; et en faisant $\frac{z\varphi(u)}{z}=const.$, on aurait... $\varphi(u)=const.$, ce qui revient à $u=c$.

N° 572, à la fin, page 267, ajoutez :

On a remarqué qu'une équation différentielle homogène n'a pas toujours pour intégrale une équation primitive homogène; on a cité en exemple

$$y^2dx+(xy+x^2)dy=0,$$

dont le facteur est $\frac{1}{2xy^2+x^2y}$: voici le calcul.

$$\frac{y^2dx}{2xy^2+x^2y}+\frac{(xy+x^2)dy}{2xy^2+x^2y}=\frac{ydx}{2xy+x^2}+\frac{(y+x)dy}{2y^2+xy}.$$

En intégrant la différentielle par rapport à x, on trouve

$$\int\frac{ydx}{2xy+x^2}=y\int\frac{dx}{(x+y)^2-y^2}=y\int\frac{dz}{z^2-y^2}=\frac{y}{2y}\,\mathrm{l}\left(\frac{z-y}{z+y}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}[\mathrm{l}\,x-\mathrm{l}\,(x+2y)],$$

d'où il suit

$$\frac{1}{2}\,\frac{d[\mathrm{l}\,x-\mathrm{l}\,(x+2y)]}{dy}+\frac{dY}{dy}=\frac{y+x}{2y^2+xy}=\frac{y+x}{y(2y+x)},$$

et en effectuant la différentiation indiquée,

$$-\frac{dy}{x+2y}+dY=\frac{(y+x)dy}{y(2y+x)},\quad dY=\frac{(y+x)dy}{y(x+2y)}+\frac{dy}{x+2y}=\frac{dy}{y}:$$

on a donc

$$Y=ly-lc,\ \text{et}\ \tfrac{1}{2}[lx-l(x+2y)]+ly=lc,\ \text{ou}\ y\sqrt{\frac{x}{x+2y}}=c.$$

N° 582, page 280, ligne 11, après facteurs, *ajoutez :*

En représentant une équation primitive quelconque par $f(x,y,c)=0$, la supposant résolue par rapport à la constante c, et désignant par $\varphi(x,y)$ l'une des expressions de cette constante, on aura

$$f(x,y,c)=[c-\varphi(x,y)]F(x,y,c);$$

et passant aux différentielles,

$$-d\varphi(x,y).F(x,y,c)+[c-\varphi(x,y)]dF(x,y,c)=0;$$

ce résultat sera vérifié par le concours des deux équations

$$c-\varphi(x,y)=0,\quad d\varphi(x,y)=0,$$

c'est-à-dire en mettant les valeurs qu'elles donnent pour y et dy. On voit par cette notation ce que représentent les lettres M et M'.

L'équation $f(x,y,c)=0$, étant résolue par rapport à y, donnera des valeurs de la forme

$$y=f_{,}(x,c),\quad y=f_{,,}(x,c),\quad y=f_{,,,}(x,c),\quad \text{etc.},$$

qui, ayant la propriété de vérifier l'équation

$$[c-\varphi(x,y)]F(x,y,c)=0,$$

identique avec la première, annulleront séparément l'un des facteurs de la forme $c-\varphi(x,y)$; ainsi le concours des équations

$$y=f_{,}(x,c),\quad dy=f_{,}'(x,c)dx$$

vérifiera l'équation $d\varphi(x,y)=0$, qui est identique avec l'un des facteurs

$$\frac{dy}{dx}-p=0,\quad \frac{dy}{dx}-p'=0,\quad \frac{dy}{dx}-p''=0,\quad \text{etc.}$$

A ce qui précède nous ajouterons que les équations primitives où

la constante arbitraire est isolée, ont ce caractère, que leur différentielle immédiate suffit seule pour satisfaire à l'équation différentielle proposée, c'est-à-dire que la substitution de la valeur de dy en x et y, tirée de la différentielle immédiate, suffit, et il ne faut pas y faire concourir celle de y, tirée de la primitive, avec laquelle rentrerait nécessairement la constante c, qui a été éliminée.

Par exemple, si on développe l'équation

$$(y-c)^2 = a^2x^2,$$

qui est, comme on le voit dans la suite de l'article cité, l'intégrale complète de $dy^2 - a^2dx^2 = 0$, on aura

$$y^2 - 2cy + c^2 = a^2x^2, \quad (y-c)dy = a^2xdx, \quad dy = \frac{a^2xdx}{y-c},$$

et la valeur de dy, substituée dans l'équation différentielle proposée, la change en

$$\frac{a^4x^2dx^2}{(y-c)^2} = a^2dx^2,$$

qui ne devient identique qu'après qu'on a mis pour $y-c$ sa valeur, tandis que si l'équation primitive était différentiée sous la forme

$$y - c = \pm ax, \quad \text{d'où} \quad dy = \pm adx,$$

la valeur de dy rendrait identique sur-le-champ l'équation différentielle proposée.

N° 591, page 295, ligne 10, ajoutez en note :

M. Ampère, dans le 17ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 554), conclut de cette remarque, le nombre de constantes arbitraires que doit renfermer l'intégrale complète. Après avoir différentié m fois, en partant des quantités primitives, on aura $m+1$ équations; mais si l'équation différentielle proposée est de l'ordre n, et qu'on la différentie jusqu'à l'ordre m inclusivement, m étant supposé $> n$, on se procurera $m-n+1$ nouvelles équations, auxquelles devraient se réduire, après l'élimination des constantes arbitraires, les $m+1$ différentielles déduites de l'intégrale primitive : il faudra donc, en désignant par r le nombre de ces constantes, que

$$r = m + 1 - (m-n+1) = n.$$

Page 296, *ligne* 12, *après* différentiels, *ajoutez :*

Il faut d'abord observer que les expressions des constantes arbitraires contenant la quantité a, en même temps que les nouvelles constantes données, ces dernières quantités, quoiqu'en nombre $n+1$, ne formeraient encore dans l'intégrale que n groupes, et se comporteraient

par conséquent comme n constantes distinctes. Cela se voit bien par les équations

$$A = \mathrm{f}(a,\ C,\ C_1,\ C_2,\ \text{etc.}),\quad A_1 = \mathrm{f}_1(a,\ C,\ C_1,\ C_2,\ \text{etc.}),$$

qui se présentent pour déterminer les constantes arbitraires, lorsque

$$y = \mathrm{f}(x,\ C,\ C_1,\ C_2,\ \text{etc.}).$$

Quand l'expression de y, qui termine la page 295 du volume cité, s'arrête, on opère immédiatement ce partage, et par suite la réduction des constantes.

L'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$, par exemple, conduit à

$$y = A + A_1\frac{(x-a)}{1} + A_1\frac{(x-a)^2}{1.2} + A_1\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ce qui revient à

$$y = A - A_1 + A_1 e^{x-a} = C + C'e^x,$$

en faisant

$$A - A_1 = C \quad \text{et} \quad A_1 e^{-a} = C'.$$

N° 604, à la fin, page 316, ajoutez :

Le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale primitive d'une équation différentielle quelconque, étant toujours égal à celui qui marque l'ordre de cette équation, cela suffit pour montrer qu'il ne peut y avoir plus de n termes irréductibles dans l'intégrale de l'équation différentielle du premier degré de l'ordre n, et que par conséquent la fonction déterminée par une telle équation ne doit avoir qu'un pareil nombre de valeurs particulières essentiellement distinctes par rapport à l'intégration; cependant, il n'est peut-être pas tout-à-fait inutile de connaître les relations nécessaires qui lieraient entr'elles ces valeurs, si leur nombre surpassait celui qu'on vient d'indiquer.

Le procédé par lequel on a prouvé, à la page 617 du présent volume, que deux valeurs qui satisfont à une équation différentielle du premier degré et du premier ordre ne peuvent être que de simples multiples l'une de l'autre, s'étend sans peine aux ordres supérieurs. Si, par exemple, il existait pour le second ordre trois valeurs y', y'', y''', satisfaisant aux équations

$$d^2y' + Pdy'dx + Qy'dx^2 = 0,$$
$$d^2y'' + Pdy''dx + Qy''dx^2 = 0,$$
$$d^2y''' + Pdy'''dx + Qy'''dx^2 = 0,$$

et qu'on prît dans les deux premières équations les valeurs de Pdx et de Qdx^2, pour les substituer dans la troisième, on obtiendrait

$$d^2y'''(y'dy''-y''dy')+dy'''(y''d^2y'-y'd^2y'')+y'''(dy'd^2y''-dy''d^2y')=0,$$

résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$y'(dy''d^2y'''-dy'''d^2y'')+y''(dy'''d^2y'-dy'd^2y''')+y'''(dy'd^2y''-dy''d^2y')=0,$$

et qui n'est autre chose que celui de l'élimination des constantes a' et a'', entre l'équation primitive

$$y'''+a''y''+a'y'=0,$$

et ses différentielles première et seconde; en sorte que cette équation est l'intégrale complète de la précédente.

Cela posé, il est évident que l'intégrale

$$y=C'y'+C''y''+C'''y'''=(C'-a'C''')y'+(C''-a''C''')y''$$

n'est pas plus générale que

$$y=C'y'+C''y''.$$

N° 606, à la fin, page 319, ajoutez :

Le raisonnement employé par d'Alembert, pour compléter l'intégrale de l'équation proposée, lorsque l'équation en m a des racines égales, est trop ingénieux pour le passer sous silence, et ne doit, ce me semble, présenter aucune difficulté, quand on s'est familiarisé avec la théorie des limites, appliquée aux grandeurs assujéties à la loi de continuité; cependant comme, au premier coup-d'œil, on pourrait croire que quelques-unes des constantes primitives doivent être supposées infinies pour que les nouvelles ne soient pas nulles, on a paru desirer une autre manière d'arriver à ce résultat; et déjà je ferai observer qu'un simple changement de constantes, comme on peut le voir au n° 607, ramenant l'état de la question à déterminer la vraie valeur d'une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, suffit pour lever toute difficulté. On atteint aussi le même but, en renvoyant l'examen des cas particuliers de l'équation, qui n'a pas de terme indépendant de y, à la discussion de l'équation complète qui les comprend tous, ainsi que je l'ai fait voir dans les n°s 612 et 613, et qui donne à celui des racines égales, la forme de $\frac{0}{0}$. On revient de là à l'équation incomplète, en faisant $V=0$.

Mais pour ne rien laisser à desirer sur ce sujet, j'exposerai une manière directe d'obtenir l'intégrale de l'équation

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots\ldots + V y dx^n = 0,$$

lorsque l'équation en m a des racines égales.

On donne d'abord à l'expression de y la forme

$$y = X e^{mx} + C' e^{m'x} + C'' e^{m''x} + \text{etc.},$$

dans laquelle m', m'', etc., désignent des racines inégales, et on remplace par le terme Xe^{mx} celui que fournissent les racines égales. On tire de là

$$\begin{aligned}
dy &= d.Xe^{mx} + (C'e^{m'x}m' + C''e^{m''x}m'' + \text{etc.})dx,\\
d^2y &= d^2.Xe^{mx} + (C'e^{m'x}m'^2 + C''e^{m''x}m''^2 + \text{etc.})dx^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d^ny &= d^n.Xe^{mx} + (C'e^{m'x}m'^n + C''e^{m''x}m''^n + \text{etc.})dx^n;
\end{aligned}$$

or, par le n° 91,

$$\begin{aligned}
d^n.Xe^{mx} = {} & Xe^{mx}m^n dx^n + \frac{n}{1} e^{mx} m^{n-1} dx^{n-1} dX \\
& + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{mx} m^{n-2} dx^{n-2} d^2X \ldots + e^{mx} d^n X,
\end{aligned}$$

formule d'après laquelle on exprimera les différentielles de tous les ordres du terme Xe^{mx}, pour les substituer dans l'équation proposée, et où il suffira d'avoir égard aux termes qu'elles produisent, puisque ceux qui proviennent des racines inégales se détruisent entr'eux. De cette manière on aura

$$\left.\begin{aligned}
& X\{m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U\}\\
&+ \frac{1}{1}\frac{dX}{dx}\{nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} + (n-2)Qm^{n-3} + \text{etc.}\}\\
&+ \frac{1}{1.2}\frac{d^2X}{dx^2}\{n(n-1)m^{n-2} + \text{etc.}\}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Les quantités comprises entre les accolades sont, dans la première ligne, le premier membre de l'équation qui détermine m; dans la seconde ligne, la fonction qui devient égale à zéro quand cette équation a deux racines égales; en troisième ligne, la fonction qui devient égale à zéro quand cette même équation a trois racines égales, et ainsi de suite. Ne supposons d'abord que deux racines égales, la première et la seconde ligne seules s'évanouiront; mais pour faire disparaître le reste de l'équa-

tion précédente, il suffira de poser $\frac{d^2X}{dx^2}=o$, ce qui donnera $X=D+D'x$, et par conséquent

$$y=e^{mx}(D+D'x)+C'e^{m'x}+C''e^{m''x}+\text{etc.},$$

comme dans le n° 606.

Si l'équation qui détermine m a trois racines égales, la troisième ligne se détruira aussi, et on satisfera au reste en posant $\frac{d^3X}{dx^3}=o$, d'où.. $X=D+D'x+D''x^2$, ce qui est le second résultat du numéro cité, et fait voir que les deux méthodes s'accorderont toujours. La dernière est celle que M. Maurice a donnée dans le tome III des *Annales de Mathématiques*, page 46.

N° 615, à la fin, page 339, ajoutez :

Il est à propos de remarquer qu'il suffit d'obtenir l'intégrale primitive de l'équation finale à deux variables, pour arriver à m équations primitives entre toutes les variables; puisque les équations subsidiaires dont on s'est servi pour chasser, comme des inconnues distinctes, $m-1$ variables et leurs coefficiens différentiels, donneront les valeurs de ces variables, au moyen de la variable indépendante, de la variable dépendante conservée, et de ses coefficiens différentiels, qui se déduiront de l'intégrale obtenue et de ses différentielles.

Dans l'exemple du n° 73, on tirera des équations (1) et (2) une valeur de y en t, x et $\frac{dx}{dt}$, et l'on chassera x et $\frac{dx}{dt}$, au moyen de l'intégrale complète de l'équation finale du second ordre en x et t.

On voit par là que le nombre des constantes arbitraires introduites dans les équations primitives qui répondent à un système d'équations différentielles simultanées, est égal à l'exposant de l'ordre de l'équation finale entre deux variables, c'est-à-dire au nombre des équations, multiplié par l'exposant de leur ordre, lorsqu'il est le même pour toutes.

N° 633, page 370, ligne 8 en remontant, ajoutez :

Quand l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe des z, on a $A=1$, $B=o$ (327); et pour déterminer la constante qui est de trop, il vient l'équation $C_2(C_1+1)=o$, à laquelle on satisfait en posant $C_2=o$, ou $C_1+1=o$, ce qui donne deux intégrales distinctes,

$$y^2=C_1x^2,\quad y^2+x^2=C_2,$$

dont la première indique une ligne droite, et la seconde un cercle.

N° 634, à la fin, page 372, ajoutez :

Monge a calculé l'équation différentielle qui résulte de l'élimination des cinq constantes A, B, C, D, E, dans l'équation

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0 \ldots\ldots (A),$$

comprenant toutes les lignes du second degré; et il a trouvé pour résultat l'équation

$$9q^2t - 45qrs + 40r^3 = 0 \ldots\ldots (B),$$

dans laquelle

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{x} = s, \quad \frac{ds}{dx} = t,$$

et qui est par conséquent du cinquième ordre (*Correspondance sur l'École Polytechnique,* tom. II, p. 51).

Cette dernière équation étant vérifiée par toutes celles qui résultent des cas particuliers de la première, peut servir utilement à l'intégration de celles-ci.

Pour en faire une application, Monge forme l'équation différentielle d'un cercle quelconque, en éliminant les constantes a, b et c de l'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2,$$

et cherche ensuite à intégrer le résultat

$$(1+p^2)r = 3pq^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (C).$$

Il le différentie d'abord deux fois, afin de parvenir au cinquième ordre, ce qui lui donne les équations

$$(1+p^2)^2 s = 3q^3(1+5p^2),$$
$$(1+p^2)^3 t = 15pq^4(3+7p^2);$$

et prenant les valeurs de r, s et t, pour les substituer dans (B), cette dernière est satisfaite. L'intégrale de l'équation (C) sera donc un cas particulier de l'équation (A), et s'obtiendra en réduisant à trois les cinq constantes que celle-ci contient.

En la différentiant trois fois, pour en tirer les valeurs des coefficiens différentiels p, q, r, qui entrent dans (C), et posant, pour abréger,

$$Ay + Bx + D = M, \quad By + Cx + E = N,$$

on trouve

$$p = -\frac{N}{M}, \quad q = -\frac{AN^2 - 2BMN + CM^2}{M^3},$$
$$r = -\frac{3(AN^2 - 2BMN + CM^2)(AN - BM)}{M^5},$$

valeurs qui changent (C) en

$$M[AN^2 - 2BMN + CM^2][B(M^2 - N^2) + MN(C - A)] = 0.$$

Cette équation devant se vérifier indépendamment des variables x et y, on ne peut faire $M = 0$, ce qui donnerait $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, et ne laisserait que deux constantes arbitraires au lieu de trois. Par la même raison, il ne faut pas égaler à zéro le second facteur......... $AN^2 - 2BMN + CM^2$; mais le troisième s'évanouissant quand

$$B = 0, \qquad C - A = 0,$$

remplit la condition exigée et change l'équation (A) en

$$A(y^2 + x^2) + 2Dy + 2Ex + 1 = 0,$$

qui est bien celle d'un cercle quelconque.

N° 647, page 391, ligne 11, ajoutez :

La proposition qui vient d'être démontrée, paraît avoir été remarquée d'abord par Trembley. Voy. les *Mémoires de l'Académie de Turin*, tom. V, p. 10, 2[e] pagination.

CHAPITRE VII DU SECOND VOLUME.

N° 686, à la fin, page 464, ajoutez :

Jean Bernoulli, qui s'est occupé aussi du développement successif des courbes, en a conclu que si l'on prend, sur une courbe quelconque, un arc terminé par deux tangentes perpendiculaires, et qu'on en forme les développées successives, mais en sens inverse l'une de l'autre, elles tendront de plus en plus vers la forme cycloïdale, en sorte que cette opération, poussée à l'infini, engendrerait la cycloïde (voy. *Joh. Bernoulli, opera*, tom. IV, p. 98). Euler a donné, dans le tome X des *Novi Comment. Acad. Petrop.*, une démonstration de ce théorème; on en trouve de nouvelles à la fin du second volume des *Exercices de Calcul intégral* et dans le tome IX des *Annales de Mathématiques*.

Au n° 689, page 469, après la ligne 24, ajoutez :

Pour remonter directement de la développée à l'équation de la

développante, il semble d'abord qu'il faudrait intégrer l'équation

$$y + \frac{dy^2 + dx^2}{d^2y} = \varphi\left(x - \frac{dy}{dx}\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right),$$

résultat de la substitution des valeurs de α et de β, dans l'équation de la développée $\beta = \varphi(\alpha)$. Or, si l'on fait $dy = pdx$, qu'on différentie ensuite l'équation

$$y + \frac{dx(1+p^2)}{dp} = \varphi\left[x - \frac{pdx(1+p^2)}{dp}\right],$$

et qu'on n'indique la fonction que par sa caractéristique, on aura

$$pdx + d\frac{(1+p^2)dx}{dp} = \varphi' \times -p\left[pdx + d\frac{(1+p^2)dx}{dp}\right],$$

qui se décompose dans les facteurs

$$pdx + d\frac{(1+p^2)dx}{dp} = 0, \quad 1 + p\varphi' = 0,$$

dont le premier, qui revient à

$$dy + d\frac{(1+p^2)dx}{dp} = 0, \quad \text{donne} \quad y + \frac{(1+p^2)dx}{dp} = C,$$

et ne mène qu'à l'équation primitive des cercles osculateurs. En effet, d'après l'équation dont nous sommes partis, on a simultanément

$$y + \frac{(1+p^2)dx}{dp} = C, \qquad x - \frac{pdx(1+p^2)}{dp} = C',$$

sous la condition $C = \varphi(C')$; et si on élimine $\frac{(1+p^2)dx}{dp}$, des expressions de C et de C', on trouve

$$(y - C)p + x - C' = 0, \quad \text{d'où} \quad (x - C')^2 + (y - C)^2 = C'';$$

ce qui revient à

$$[x - \alpha]^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 = \gamma^2,$$

équation d'un cercle dont le centre est sur la développée, et qui peut passer par deux points quelconques, à cause des arbitraires α et γ.

Le second facteur $1 + p\varphi' = 0$, qui ne conduit qu'à une solution particulière du premier ordre, est précisément celui qui donne l'équation de la développante. On voit d'abord qu'il revient à l'équation (5),

$$dxd\alpha + dyd\beta = 0,$$

du n° 226, lorsqu'on met pour $\varphi'(\alpha)$ sa valeur. Ensuite, si on le combine avec l'intégrale première,

$$(y-C)p+x-C'=0, \quad \text{ou} \quad [y-\varphi(C')]p+x-C'=0,$$

pour en éliminer p, on obtiendra une équation primitive ne contenant qu'une seule constante arbitraire, et qui sera celle de toutes les développantes que fournit la même courbe, à raison des diverses longueurs qu'on peut donner au fil, à l'origine du développement.

On arrive aussi à ce résultat par la combinaison des équations (4) et (6) du n° 226, qui donnent les valeurs de $x-\alpha$ et de $y-\beta$, au moyen des quantités α, β, γ, et de leurs différentielles; car ayant, par une intégration, déduit de

$$d\gamma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}=d\alpha\sqrt{1+\overline{\varphi'(\alpha)}^2},$$

la valeur de γ en α, avec une constante arbitraire, il suffira de la substituer avec celle de β en α, dans celles de $x-\alpha$ et de $y-\beta$, pour pouvoir éliminer α de ces dernières et parvenir à l'équation de la développante cherchée.

Lagrange, à qui l'on doit les recherches précédentes, les a variées de plusieurs manières, pour lesquelles on doit consulter les *Mém. de l'Acad. de Berlin*, année 1779, p. 123.

CHAPITRE IX DU SECOND VOLUME.

N° 713, à la fin, page 504, ajoutez :

Si l'on change le signe de tous les termes de la deuxième équation (A), et qu'on l'écrive comme il suit,

$$\mu\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)+P\frac{d\mu}{dz}-R\frac{d\mu}{dx}=0,$$

il suffira de multiplier respectivement chacune des équations (A) par celle des lettres P, Q, R, qui n'y entre pas, et de faire la somme des produits, ce qui est complètement symétrique ; et cet état de choses se reproduira toujours quand on aura l'attention de mettre successivement chacune des trois différentielles dP, dQ, dR, au premier terme.

L'équation (B) est écrite plus élégamment sous la forme

$$P\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+Q\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)+R\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)=0,$$

parce qu'on y retrouve les équations de condition qui seraient satisfaites si $Pdx + Qdy + Rdz$ était une différentielle exacte.

J'ai suivi dans cet article la marche ordinaire; mais on pourrait lui donner celle du n° 569, en montrant que si l'équation proposée dérive d'une équation primitive $u=c$, elle est nécessairement susceptible de devenir une différentielle exacte, par le moyen d'un facteur convenable. En effet, l'équation différentielle proposée devant alors avoir lieu en même temps que

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

les valeurs de dz, tirées de l'une et de l'autre de ces équations, doivent être identiques, indépendamment des valeurs de dx et dy; on aura donc les équations

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}} = \frac{P}{R}, \quad \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}} = \frac{Q}{R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\frac{du}{dx}}{P} = \frac{\frac{du}{dz}}{R} = \frac{\frac{du}{dy}}{Q} = \mu.$$

Note de la page 537, *ajoutez :*

Le volume de l'Acad. de Berlin, cité dans le texte, n'a paru qu'en 1781.

N° 735, *page* 541, *ligne* 9 *en remontant, après* proposée, *ajoutez :*

Il n'est peut-être pas inutile de montrer plus en détail comment l'intégrale complète et primitive de l'équation différentielle du troisième ordre, obtenue par l'élimination de deux des quatre variables contenues dans les équations (2), conduit aux trois intégrales complètes du système; et je suivrai pour ce calcul la marche générale tracée par M. Pfaff, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* années 1814—1815.

Les équations (2) étant mises sous la forme

$$dx = \alpha du, \quad dy = \beta du, \quad dz = \gamma du,$$

si l'on différentie la première, en prenant du pour constante, on aura

$$d^2x = \frac{d\alpha}{du}du^2 + \frac{d\alpha}{dx}dudx + \frac{d\alpha}{dy}dudy + \frac{d\alpha}{dz}dudz,$$

et mettant pour dx, dy et dz, leurs valeurs tirées des équations précédentes, la résultante sera de la forme

$$d^2x = \alpha' du^2,$$

α' étant une fonction primitive de u, x, y et z. Différentiant cette dernière équation, et éliminant comme ci-dessus, dx, dy et dz, on aura encore

$$d^3x = \alpha'' du^3.$$

Cela fait, il n'y aura plus qu'à éliminer y et z, entre les trois équations

$$dx = \alpha du, \quad d^2x = \alpha' du^2, \quad d^3x = \alpha'' du^3,$$

pour arriver à l'équation du troisième ordre, qui doit donner la relation entre x et u. De plus, comme on aura tiré de ces mêmes équations les valeurs de y et de z, en fonction des quantités u, x, $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, il suffira de remplacer les trois dernières par leurs valeurs, déduites de l'intégrale complète de l'équation du troisième ordre en x et u, pour obtenir les équations primitives qui expriment y et z par la variable indépendante u.

N° 739, à la fin, page 547, ajoutez :

Les équations $dV = 0$, $dU = 0$, ne sont que des combinaisons des équations

$$Pdz - Rdx = 0, \quad Qdz - Rdy = 0 \ldots\ldots (2),$$

multipliées par des facteurs; et il suit de là qu'il existe au moins deux systèmes de facteurs au moyen desquels on peut déduire des équations (2) deux différentielles exactes à trois variables.

En effet, ces équations ayant lieu en même temps que $dU = 0$ et $dV = 0$, ou

$$Adx + Bdy + Cdz = 0, \quad A'dx + B'dy + C'dz = 0,$$

si l'on met dans ces dernières les valeurs de dy et de dx, tirées des premières, elles deviendront

$$\frac{AP}{R} + \frac{BQ}{R} + C = 0, \quad \frac{A'P}{R} + \frac{B'Q}{R} + C' = 0,$$

et seront rendues identiques; on aura donc

$$C = -\frac{AP}{R} - \frac{BQ}{R}, \quad C' = -\frac{A'P}{R} - \frac{B'Q}{R};$$

et par ces valeurs les équations $dU=0$, $dV=0$, prendront la forme

$$\frac{A}{R}(P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x) + \frac{B}{R}(Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y) = 0\,;$$
$$\frac{A'}{R}(P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x) + \frac{B'}{R}(Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y) = 0\,,$$

d'après laquelle on voit que ces équations reviennent aux équations (2) multipliées successivement par les facteurs

$$\frac{A}{R} \text{ et } \frac{B}{R}, \quad \frac{A'}{R} \text{ et } \frac{B'}{R},$$

puis combinées ensuite par addition.

De plus, comme il a été prouvé dans le n° 732, qu'il existait toujours des équations de la forme $a = U$, $b = V$, correspondantes aux équations (2), l'existence des facteurs indiqués ci-dessus est également prouvée.

Il ne serait pas difficile d'étendre ces considérations aux équations analogues pour quatre ou un plus grand nombre de variables.

N° 741, à la fin, page 550, ajoutez :

A l'exemple donné dans cet article, d'après Lagrange, je joindrai l'équation

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = r^2,$$

appartenante à la surface dont toutes les normales sont égales à r (334), et dont l'intégration présente quelques circonstances remarquables. En la différentiant, on en tire

$$z\mathrm{d}z(1 + p^2 + q^2) + z^2p\mathrm{d}p + z^2q\mathrm{d}q = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

d'où

$$A = 0,\ B = 0,\ C = z(1 + p^2 + q^2),\ D = z^2p,\ E = z^2q,$$
$$\left.\begin{array}{l} p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x = 0, \\ p\mathrm{d}z - (q^2 + p^2)\mathrm{d}x = 0, \\ zp\mathrm{d}q + q(1 + p^2 + q^2)\mathrm{d}x = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2).$$

En vertu de la deuxième des équations (2), la dernière devient

$$zp\mathrm{d}q + q\mathrm{d}x + pq\mathrm{d}z = 0, \quad \text{ou} \quad z\mathrm{d}q + q\mathrm{d}z + \mathrm{d}y = 0 \ldots\ldots (3),$$

puisque, par la première des mêmes équations, $q\mathrm{d}x = p\mathrm{d}y$. Revenant ensuite à l'équation (1), qui se divise par z et se réduit à

$$\mathrm{d}z(1 + p^2 + q^2) + zp\mathrm{d}p + zq\mathrm{d}q = 0,$$

pour en retrancher l'équation (3), multipliée par q, on trouvera

$$\mathrm{d}z + p^2\mathrm{d}z + zp\mathrm{d}p - q\mathrm{d}y = 0\,;$$

puis en observant que $dz - qdy = pdx$, on pourra diviser par p, et il viendra

$$zdp + pdz + dx = o \ldots\ldots (4).$$

En intégrant les équations (3) et (4), on trouvera

$$zq + y = b, \quad zp + x = a,$$

dont on tirera

$$q = \frac{b-y}{z}, \quad p = \frac{a-x}{z},$$

valeurs qui changeront l'équation proposée en

$$z^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2,$$

d'où, par le moyen des constantes arbitraires a et b, on passera à l'intégrale générale

$$z^2 + [x-a]^2 + [y - \varphi(a)]^2 = r^2,$$
$$x - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) = o.$$

N° 747, à la fin, page 567, ajoutez :

M. Poisson a inséré dans le *Bulletin des Sciences* (année 1815, p. 183) et dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tom. III, pag. 291) une note ayant pour but de prouver que les intégrales déduites des considérations de cet article, sont au fond les mêmes que celles qu'on trouve par le procédé de Charpit, procédé qui a l'avantage de dispenser de l'équation (5). Les raisonnemens sur lesquels s'appuie M. Poisson étant un peu abstraits, je les particulariserai d'abord sur l'équation

$$z - pq = o.$$

Dans ce cas, les équations auxiliaires étant

$$q - x = a, \quad \frac{z}{q^2} = b, \quad y - \frac{z}{q} = c,$$

on a, pour déterminer q dans sa plus grande généralité, l'équation

$$q - x = \pi\left(\frac{z}{q^2}, \ y - \frac{z}{q}\right),$$

qu'on peut remplacer par le système équivalent

$$q = a + x, \quad a = \pi\left(\frac{z}{(a+x)^2}, \ y - \frac{z}{a+x}\right) \ldots\ldots (\alpha).$$

Cela posé, en mettant la valeur de q dans l'équation proposée $z - pq = o$,

on a les expressions

$$p=\frac{z}{a+x}, \quad q=a+x,$$

qui ont la propriété de rendre possible l'intégration de

$$dz-pdx-qdy=o,$$

qui devient alors

$$dz-\frac{zdx}{a+x}-(a+x)dy=o, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{a+x}-\frac{zdx}{(a+x)^2}-dy=o.$$

En prenant la question dans toute son étendue, on doit considérer ici a comme une fonction variable, et l'on a par conséquent à intégrer une équation différentielle à quatre variables x, y, z et a, ce qu'on peut faire par une méthode analogue à celle du n° 716, en regardant d'abord comme constante la quatrième variable a. On trouvera ainsi

$$\frac{z}{a+x}-y=k,$$

k désignant une arbitraire qui sera fonction de a. Différentiant ce résultat en y faisant tout varier, pour le comparer à la proposée, il restera

$$\frac{d\left(\frac{z}{a+x}-y\right)}{da}da=dk, \quad \text{ou} \quad -\frac{z}{(a+x)^2}=\frac{dk}{da}\ldots\ldots(\beta),$$

qui est, à proprement parler, une équation de condition, puisque le premier membre doit se réduire à une fonction de a seul, ou de k et de a, pour que l'intégration soit possible, comme on le suppose (715), condition que remplirait nécessairement l'expression de a donnée par l'équation (α). En effet, si l'on met dans celle-ci, pour $\frac{z}{a+x}-y$, sa valeur k, elle deviendra

$$a=\pi\left[\frac{z}{(a+x)^2},\ k\right],$$

d'où il faut conclure que

$$-\frac{z}{(a+x)^2}=\Pi(a,\ k)\ldots\ldots\ldots(\alpha'),$$

Π étant nne fonction dépendante de π. Cette valeur changeant l'équation (β) en

$$\Pi(a,\ k)=\frac{dk}{da},$$

remplit la condition exigée pour l'intégrabilité.

Il suit de là que l'équation (β) doit, par rapport à la détermination de a en x, y et z, tenir lieu de l'équation (α); et pour y satisfaire de la manière la plus générale, il faut poser $k = \varphi(a)$; d'où il résultera pour l'intégrale de l'équation différentielle partielle proposée, le système d'équations

$$\frac{z}{a+x} - y = \varphi(a),$$
$$-\frac{z}{(a+x)^2} = \varphi'(a).$$

Il est bien inutile, d'ailleurs, de conserver l'équation $\Pi(a, k) = \frac{dk}{da}$, qui, devenant

$$\Pi[a, \varphi(a)] = \frac{d\varphi(a)}{da},$$

ne fait qu'établir une dépendance entre les fonctions φ et Π, en sorte que l'une devant rester arbitraire, rend l'autre pareillement arbitraire, dans les équations où elle entre seule, ce qui est le cas des intégrales ci-dessus.

En général, si l'on remplace les équations

$$T = a, \quad U = b, \quad V = c, \quad V = \psi(T, U),$$

par les symboles équivalens

$$a = f_1(x, y, z, q), \quad b = f_2(x, y, z, q), \quad c = f_3(x, y, z, q),$$
$$a = \pi(b, c),$$

qu'on tire de la première une valeur de q, pour la substituer dans celles de b et de c, et celles-ci dans la quatrième équation, on aura un système d'équations que je désignerai par

$$q = \psi(x, y, z, a), \quad a = \pi[\psi_1(x, y, z, a), \psi_2(x, y, z, a)] \ldots. (\alpha),$$

et qui déterminera en x, y, z, les fonctions q et a. Cela posé, l'équation proposée donnera aussi en x, y, z et a, une valeur de p, qui, conjointement avec celle de q indiquée ci-dessus, rendra

$$dz - pdx - qdy = 0 \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

susceptible d'intégration, en y regardant a comme constant. Soit

$$F(x, y, z, a) = k$$

cette intégrale ; pour l'étendre au cas où a serait variable, il faudra, d'après le procédé de l'intégration des équations différentielles totales à plus de deux variables, que le premier membre de l'équation

$$\frac{dF(x, y, z, a)}{da} = \frac{dk}{da} \ldots\ldots (\beta),$$

se réduise à une fonction de a et de k seuls, ou à $\Pi(a, k)$; condition qui serait remplie nécessairement par la valeur de a tirée de l'équation (α), puisque cette valeur doit conduire à l'intégrabilité de l'équation (γ); et il ne résulterait de l'équation (β), réduite à la forme

$$\Pi(a, k) = \frac{dk}{da},$$

d'autre détermination que $k = \varphi(a)$, φ désignant une fonction dépendante de Π, et par conséquent arbitraire comme celle-ci, lorsqu'elle se trouverait seule.

Il suit évidemment de là que l'équation (β), lorsqu'on y fait $k = \varphi(a)$, peut tenir lieu de l'équation (α), et que par conséquent le système des équations

$$F(x, y, z, a) = \varphi(a),$$
$$\frac{dF(x, y, z, a)}{da} = \varphi'(a),$$

donne l'intégrale de l'équation proposée aussi généralement qu'il est possible.

N° 748, à la fin, page 572, ajoutez :

M. Pfaff, en prenant une autre voie pour intégrer les équations différentielles partielles du premier ordre, a évité la difficulté indiquée dans cet article. (Voy. l'addition au n° 811.)

N° 769, page 616, ligne 9, après proposée, *ajoutez :*

ou bien, on posera les deux premières équations de la page, et on déterminera les quantités m, n, K, L, par la comparaison de l'équation résultante de l'élimination de z' avec la proposée.

N° 772, à la fin, page 623, ajoutez :

La dépendance qui lie les fonctions v et z a conduit Monge à considérer comme réciproques deux surfaces qui ont pour coordonnées, l'une x, y, z, l'autre p, q, v. En effet, les équations

$$v = px + qy - z, \quad dv = xdp + ydq,$$
$$z = px + qy - v, \quad dz = pdx + qdy,$$

étant telles que si l'on change z, x et y en v, p et q et réciproquement, dans la seconde ligne, on obtiendra la première, il s'ensuit qu'à chaque point de la surface qui a pour coordonnées x, y, z, répond, sur la surface ayant pour coordonnées p, q, v, un point duquel on revient au premier, comme on a passé de celui-ci à l'autre. (*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, année 1808, p. 230.)

La même relation a lieu dans les courbes, au moyen des équations

$$v = px - y, \quad dv = xdp,$$
$$y = px - v, \quad dy = pdx,$$

dans lesquelles $p = \frac{dy}{dx}$.

N° 773, page 624, ligne 3 en remontant, après la citation (587), *ajoutez :*

On en tire $\frac{dp}{dq} = a$, d'où

$$(1 + q^2)a^2 - 2pqa + 1 + p^2 = 0;$$

et prenant les deux valeurs de a pour les quantités qui doivent entrer sous les fonctions arbitraires, on aura les expressions

$$a = \frac{pq + \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2}, \quad b = \frac{pq - \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2},$$

annoncées, mais non rapportées sur la page 625, ligne 7.

Page 625, ligne dernière.

Ici il faut observer que les deux valeurs de dp sont regardées comme égales, en vertu d'une détermination convenable des quantités a et b, savoir, celle que fournit l'équation

$$aq + \alpha = bq - \beta,$$

de laquelle il résulte, en regardant q comme constant,

$$\left(q + \frac{d\alpha}{da}\right) da = \left(q - \frac{d\beta}{db}\right) db.$$

Page 626, ligne 8 en remontant, après $-\beta$, *ajoutez :*

et que dans l'expression de x on doit changer $\varphi(a)$ et $\psi(b)$ en $\varphi'(a)$ et $\psi'(b)$, comme on l'a fait pour arriver à celle de v.

N° 792, à la fin, page 667, ajoutez :

M. Ampère, dans le 17° cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 551), a fait sur ce sujet des remarques dont voici l'extrait. Pour être assez étendue, l'intégrale d'une équation différentielle doit contenir un nombre d'arbitraires tel, qu'après un nombre quelconque n de différentiations, et l'élimination de toutes les arbitraires introduites jusqu'à la dernière différentiation, le nombre des équations restantes soit le même que celui qu'on obtiendrait en partant de l'équation différentielle proposée et s'élevant jusqu'à l'ordre n. On a vu déjà dans l'addition au n° 591, comment ce principe s'applique aux équations différentielles ordinaires; je vais montrer ce qu'il donne pour les équations différentielles partielles à trois variables. En partant de l'intégrale primitive pour s'élever à l'ordre n, le nombre des équations, y compris cette intégrale, est $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$; et si l'équation différentielle proposée est de l'ordre m, m étant $<n$, en la différentiant jusqu'à l'ordre n, on aura en tout $\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}$ équations; ainsi

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}=m(n+1)-\frac{m(m-1)}{2},$$

marquera le nombre d'arbitraires que doivent contenir l'intégrale et ses n différentielles. Ce nombre croissant avec n, fait voir que de simples constantes ne sauraient compléter les intégrales des équations différentielles partielles.

Soit, par exemple,

$$px+qy=z, \quad \text{d'où} \quad z=ax+by;$$

a et b étant des constantes arbitraires. En passant au second ordre, l'intégrale donne

$$r=0, \quad s=0, \quad t=0,$$

et l'équation différentielle,

$$xr+ys=0, \quad xs+yt=0,$$

équations plus générales que les trois précédentes.

Mais si l'on part de l'intégrale générale $z=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, on aura

$$r = \frac{y^2}{x^3}\psi'', \quad s = -\frac{y}{x^2}\psi'', \quad t = \frac{1}{x}\psi'',$$

équations qui se réduisent à deux quand on élimine la fonction arbitraire ψ''.

Si l'on représente par h le nombre des fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale, quand on sera parvenu à l'ordre n, il s'en trouvera $(n+1)h$ dans les $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ équations obtenues, dont on ne tirera par conséquent une résultante délivrée de ces fonctions, que si

$$(n+1)h = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} - 1.$$

On ne peut prendre $h = n$, dès que $n > 1$; car $n = 2$ conduit, dans cette hypothèse, à 6 d'un côté, et à 5 de l'autre.

M. Ampère examine ensuite comment les fonctions soumises à des signes d'intégration indéfinie ou définie, se prêtent à la loi qu'il a établie.

N° 811, à la fin, page 697, ajoutez :

Dans le Mémoire cité à la page 702 du présent volume, M. Pfaff s'est proposé de ramener à l'intégration des équations du genre de celles qu'on vient de traiter, l'intégration des équations différentielles partielles, et voici de quelle manière.

En commençant d'abord par celles qui ne contiennent que trois variables, il considère l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

après qu'on y a substitué, au lieu de q, sa valeur en p, x, y et z, tirée de l'équation donnée, comme étant entre quatre variables x, y, z et p, et comme il parvient alors à en obtenir l'intégrale par deux équations primitives seulement, l'élimination de p entre ces dernières le conduit à l'intégrale de la proposée.

Ce n'est encore là qu'une autre manière de traiter le problème résolu d'après Lagrange, dans le n° 740; mais lorsqu'il s'agit des équations à quatre variables, pour lesquelles la méthode proposée par Charpit paraît en défaut (748), si l'on considère

$$dz = ndu + pdx + qdy,$$

après l'élimination de q, comme une équation différentielle entre les

six variables u, x, y, z, n et p, et qu'on en obtienne l'intégrale par trois équations primitives entre ces variables, l'élimination des coefficiens différentiels n et p donnera l'intégrale de la proposée. C'est ce que fait M. Pfaff, qui a reconnu que l'intégrale d'une équation différentielle contenant $2n$ ou $2n-1$ variables peut toujours être représentée par n équations. Les calculs sur lesquels reposent ce théorème et ses applications, étant trop compliqués pour trouver place ici, nous renvoyons le lecteur au Mémoire de M. Pfaff, dont la méthode, s'étendant à tous les cas que peuvent présenter les équations différentielles partielles du premier ordre, nous paraît remplir une lacune dans la Science. Nous ferons seulement observer, d'après l'auteur lui-même, qu'il a suivi des indications données par Monge, qui regardait l'intégration des équations différentielles dites *absurdes*, comme la clef de celle des équations différentielles partielles; mais ce que M. Pfaff ignore sans doute, c'est que son théorème fondamental avait été présenté à l'Institut, en 1814, par M. Binet aîné, qui l'énonçait ainsi : « Une équation linéaire (c'est-à-dire » où les différentielles ne passent pas le premier degré) aux différences » ordinaires, qui ne satisfait à aucune des conditions d'intégrabilité, et qui » renferme un nombre n de variables, peut toujours être satisfaite si n » est paire, par un nombre $\frac{n}{2}$ d'équations intégrales renfermant une » fonction de $\frac{n}{2}-1$ quantités, et si n est impaire, par un nombre » $\frac{n+1}{2}$ d'équations intégrales renfermant une fonction de $\frac{n+1}{2}-1$ » quantités. » Chargés, M. Poisson et moi, de l'examen de ce Mémoire, nous n'en fîmes pas le rapport, parce que l'auteur le retira pour le perfectionner.

N° 816, page 709, ligne 1, après ci-dessus, *ajoutez :*

c'est-à-dire $U=\varphi(a)$, $\frac{dU}{da}=\varphi'(a)$.

N° 820, à la fin, page 715, ajoutez :

La détermination de la surface qui a dans chacun de ses points une infinité de lignes de courbure (addit. au n° 327) est un problème du genre des précédens, puisque cette surface doit satisfaire en même temps aux deux équations différentielles partielles

$$(1+q^2)s-pqt=0, \qquad (1+p^2)s-pqr=0,$$

qui, revenant à

$$\frac{s}{p} = \frac{qt}{1+q^2}, \quad \frac{s}{q} = \frac{pr}{1+p^2},$$

ou à

$$\frac{\frac{dp}{dy}}{p} = \frac{q\frac{dq}{dy}}{1+q^2}, \quad \frac{\frac{dq}{dx}}{q} = \frac{p\frac{dp}{dx}}{1+p^2},$$

ont pour intégrales

$$p^2X = 1+q^2, \quad q^2Y = 1+p^2,$$

en représentant par X et par Y des fonctions arbitraires, l'une de x, et l'autre de y. On tire de là

$$p = \sqrt{\frac{Y+1}{XY-1}}, \quad q = \sqrt{\frac{X+1}{XY-1}};$$

et la condition

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dX}{dx}\frac{1}{(X+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dY}{dy}\frac{1}{(Y+1)^{\frac{3}{2}}},$$

ne peut être remplie, à moins que les deux membres ne se réduisent à une même constante. En la désignant par $2A$, on formera les deux équations

$$\frac{dX}{2(X+1)^{\frac{3}{2}}} = A dx, \quad \frac{dY}{2(Y+1)^{\frac{3}{2}}} = A dy,$$

dont les intégrales

$$-\frac{1}{\sqrt{X+1}} = Ax+B, \quad -\frac{1}{\sqrt{Y+1}} = Ay+C,$$

donnent

$$X = \frac{1-(Ax+B)^2}{(Ax+B)^2}, \quad Y = \frac{1-(Ay+C)^2}{(Ay+C)^2},$$

valeurs dont la substitution dans celles de p et de q, conduit, par le moyen de $dz = pdx + qdy$, à

$$Adz = \frac{-(Ax+B)Adx - (Ay+C)Ady}{\sqrt{1-(Ax+B)^2-(Ay+C)^2}}.$$

En intégrant cette dernière, on parvient enfin à

$$Az + D = \sqrt{1-(Ax+B)^2-(Ay+C)^2},$$

qui revient à

$$1 = (Ax+B)^2 + (Ay+C)^2 + (Az+D)^2;$$

il n'y a donc que la sphère qui satisfasse à-la-fois aux deux équations proposées.

N° 821, à la fin, page 716, ajoutez :

Voici deux questions fort simples, qui pourront jeter quelque jour sur cet article et sur le précédent, en le rattachant au n° 822. Soit proposé de déterminer les courbes, où la somme des soutangentes, dans le sens des x et dans celui des y, est constante.

Les formules rapportées dans l'addition au n° 344, donnent l'équation

$$\frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{z\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=a, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\frac{a\mathrm{d}z}{z},$$

et par conséquent

$$x+y=a\,\mathrm{l}\,z-a\,\mathrm{l}\,C, \quad z=Ce^{\frac{x+y}{a}}.$$

Toutes les courbes demandées peuvent donc se grouper de manière à former des surfaces courbes comprises dans l'équation ci-dessus. Ces surfaces participent à deux lois de génération, qu'on trouvera par la considération des équations différentielles partielles

$$p=\frac{z}{a}, \quad p=q, \quad \text{données par} \quad \mathrm{d}z=\frac{z\mathrm{d}x}{a}+\frac{z\mathrm{d}y}{a}.$$

L'intégrale de la première est

$$z=e^{\frac{x}{a}}\varphi(y), \quad \text{d'où} \quad p=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\varphi(y), \quad q=e^{\frac{x}{a}}\varphi'(y);$$

et pour satisfaire à la seconde, il faut que

$$\frac{1}{a}\varphi(y)=\varphi'(y), \quad \text{ou bien} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\varphi(y)}=\frac{\mathrm{d}y}{a} \quad \text{et} \quad \varphi(y)=Ce^{\frac{y}{a}},$$

ce qui ramène au résultat précédent.

Supposons à présent que dans les courbes cherchées, la somme des soutangentes considérées ci-dessus, soit égale au produit des coordonnées x et y, divisé par une ligne constante a; l'équation différentielle à intégrer sera alors

$$\frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{z\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{xy}{a}, \quad \text{ou} \quad \frac{a(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)}{xy}=\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

équation qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, et qui, trai-

tée par le procédé du n° 809, conduit à

$$a(x+y) = \varphi(z), \qquad \frac{xy}{z} = \varphi'(z).$$

Ainsi, voilà deux propriétés du même genre en apparence, qui établissent cependant une grande différence entre les familles de courbes auxquelles elles appartiennent, puisque les unes peuvent se grouper en surfaces courbes déterminées, et les autres ne le peuvent pas.

L'équation

$$dz = \frac{az}{xy}(dx + dy),$$

donnant

$$p = \frac{az}{xy} \quad \text{et} \quad p = q,$$

exprime deux lois de génération qui ne sauraient s'accorder; car la première conduit à

$$z = x^{\frac{a}{y}}\varphi(y), \quad p = \frac{a}{y}x^{\frac{a}{y}-1}\varphi(y) = \frac{a}{xy}x^{\frac{a}{y}}\varphi(y),$$

$$q = -\frac{ax^{\frac{a}{y}}\mathrm{l}x}{y^2}\varphi(y) + x^{\frac{a}{y}}\varphi'(y);$$

et pour remplir la condition $p = q$, il faudrait que

$$\frac{a}{xy}\varphi(y) = -\frac{a\mathrm{l}x}{y^2}\varphi(y) + \varphi'(y), \quad \text{ou} \quad \frac{a}{xy} + \frac{a\mathrm{l}x}{y^2} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)},$$

ce qui est impossible lorsqu'on regarde y comme indépendant de x.

N° 822, page 717, après la ligne 11, ajoutez :

Les courbes $NN_1N_2\ldots$ sont les développées à double courbure de la courbe $E'F$, (349).

Ibid., *à la fin, page 719, ajoutez :*

On peut joindre aux questions résolues dans cet article, celles de la détermination des courbes dans l'espace, par l'équation de la ligne suivant laquelle les surfaces formées de leurs tangentes rencontrent un des plans coordonnés, celui des xy, par exemple.

Les coordonnées du point où ce plan est rencontré par une tangente quelconque, étant

$$\frac{z\,dx}{dz} - x, \qquad \frac{z\,dy}{dz} - y \quad \text{(addit. au n° 344)},$$

la forme générale de l'équation proposée sera

$$f\left(\frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}-x,\ \frac{z\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-y\right)=0.$$

Prenons pour exemple particulier

$$\left(\frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}-x\right)^2+\left(\frac{z\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-y\right)^2=a^2,$$

ou

$$(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2+(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2=a^2\mathrm{d}z^2,$$

et faisons

$$x=tz,\qquad y=uz;$$

nous obtiendrons

$$z^4(\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2)=a^2\mathrm{d}z^2,$$

qui revient à

$$\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}s^2,$$

lorsque, pour abréger, on pose

$$-\frac{a\mathrm{d}z}{z^2}=\mathrm{d}s,\quad \text{d'où}\quad s=\frac{a}{z}.$$

L'équation finale que nous venons d'obtenir est comprise dans..... $\mathrm{d}z^2=m^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$, intégrée au n° 812, et en faisant les changemens convenables, on aura, pour le cas qui nous occupe,

$$1=\left(\frac{t-b}{s}\right)^2+\left(\frac{u-\psi(b)}{s}\right)^2,$$
$$0=t-b+[u-\psi(b)]\psi'(b),$$
$$0=-1-\psi'(b)^2+[u-\psi(b)]\psi''(b).$$

CHAPITRE X DU SECOND VOLUME.

N° 828, page 726, ligne 9, après la fonction y, *ajoutez :*

relatifs à x.

N° 834, page 736, après la ligne 4, ajoutez :

Pour mettre une analogie plus exacte entre les formules du n° 835, et leurs correspondantes dans les n°s 838 et 848, il faudrait écrire ω à la place de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, et entendre par celui-ci la variation totale de y.

N° 838, page 744, au lieu de la première ligne, écrivez :

$$\omega=\mathrm{d}y-p\mathrm{d}x,\quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}y-p\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2(\mathrm{d}y-p\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x^2},\quad \text{etc.},$$

en observant que $\mathrm{d}y$ est ici ce que représente ω dans le n° 835.

N° 861, à la fin, page 780.

Cette restriction a été levée par M. Poisson (*Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique*, année 1816, p. 82), en changeant les variables x, y, en d'autres, avant de prendre la variation. Soient u et v les nouvelles variables; on aura

$$\frac{dz}{du}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}=p\frac{dx}{du}+p_{,}\frac{dy}{du},$$
$$\frac{dz}{dv}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dv}=p\frac{dx}{dv}+p_{,}\frac{dy}{dv},$$

ce qui donnera

$$p=\frac{\frac{dz}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}},\quad p_{,}=\frac{\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}-\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}.$$

Prenant alors la variation de ces deux valeurs, en regardant comme des fonctions de u et de v les variations de x, y et z, on pourra changer les expressions

$$\delta\frac{dz}{du},\quad \delta\frac{dy}{dv},\quad \text{etc., en}\quad \frac{d\delta z}{du},\quad \frac{d\delta y}{dv},\quad \text{etc.}$$

Au moyen de cette remarque et en faisant, pour abréger,

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}=Z,\quad \frac{dz}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dy}{du}=X,\quad \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}-\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}=Y,$$

il viendra

$$\delta p=\frac{Z\delta X-X\delta Z}{Z^2},\quad \delta p_{,}=\frac{Z\delta Y-Y\delta Z}{Z^2},$$

où

$$\delta Z=\frac{dy}{dv}\frac{d\delta x}{du}+\frac{dx}{du}\frac{d\delta y}{dv}-\frac{dy}{du}\frac{d\delta x}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{d\delta y}{du},$$
$$\delta X=\frac{dy}{dv}\frac{d\delta z}{du}+\frac{dz}{du}\frac{d\delta y}{dv}-\frac{dy}{du}\frac{d\delta z}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{d\delta y}{du},$$
$$\delta Y=\frac{dx}{du}\frac{d\delta z}{dv}+\frac{dz}{dv}\frac{d\delta x}{du}-\frac{dx}{dv}\frac{d\delta z}{du}-\frac{dz}{du}\frac{d\delta x}{dv}.$$

Pour revenir ensuite, de la manière la plus simple, aux variables primitives, M. Poisson pose $u=x$, $v=y$, ce qui mène à

$$\frac{dx}{du}=1,\quad \frac{dx}{dv}=0,\quad \frac{dy}{du}=0,\quad \frac{dy}{dv}=1,\quad \frac{dz}{du}=p,\quad \frac{dz}{dv}=p_{,},$$

puis à

$$\delta p = \frac{d\delta z}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx} - p_{,}\frac{d\delta y}{dx},$$
$$\delta p_{,} = \frac{d\delta z}{dy} - p\frac{d\delta x}{dy} - p_{,}\frac{d\delta y}{dy}.$$

Ce n'est d'ailleurs que pour abréger le calcul, que M. Poisson a formé l'hypothèse ci-dessus; car il observe qu'on parviendrait au même résultat en laissant indéterminée la relation des variables x et y avec u et v, si l'on mettait dans δp et $\delta p_{,}$, les valeurs

$$\frac{d\delta z}{du} = \frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{du}, \qquad \frac{d\delta z}{dv} = \frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dv},$$
$$\frac{d\delta y}{du} = \frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\delta y}{dy}\frac{dy}{du}, \qquad \frac{d\delta y}{dv} = \frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{d\delta y}{dy}\frac{dy}{dv},$$
$$\frac{d\delta x}{du} = \frac{d\delta x}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{du}, \qquad \frac{d\delta x}{dv} = \frac{d\delta x}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dv},$$

par lesquelles ces variations, considérées d'abord comme des fonctions de x et de y, sont rapportées aux nouvelles variables u et v.

Pour passer aux variations des coefficiens différentiels du second ordre, M. Poisson cherche d'abord les valeurs de

$$\delta p - q\delta x - q_{,}\delta y, \qquad \delta p_{,} - q_{,}\delta x - q_{,,}\delta y,$$

qui prennent une forme remarquable. En effet, on a, par ce qui précède,

$$\delta p - q\delta x - q_{,}\delta y = \frac{d\delta z}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx} - p_{,}\frac{d\delta y}{dx} - q\delta x - q_{,}\delta y;$$

et comme

$$p\frac{d\delta x}{dx} + q\delta x = p\frac{d\delta x}{dx} + \frac{dp}{dx}\delta x = \frac{d(p\delta x)}{dx},$$
$$p_{,}\frac{d\delta y}{dx} + q_{,}\delta y = p_{,}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dp_{,}}{dx}\delta y = \frac{d(p_{,}\delta y)}{dx},$$

il vient

$$\delta p - q\delta x - q_{,}\delta y = \frac{d(\delta z - p\delta x - p_{,}\delta y)}{dx}:$$

on trouvera, d'une manière semblable, que

$$\delta p_{,} - q_{,}\delta x - q_{,,}\delta y = \frac{d(\delta z - p\delta x - p_{,}\delta y)}{dy}.$$

Maintenant, si l'on met ces équations sous la forme

$$\delta\frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx^2}\delta x - \frac{d^2z}{dxdy}\delta y = \frac{d\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x - \frac{dz}{dy}\delta y\right)}{dx} \ldots\ldots (a),$$

$$\delta\frac{dz}{dy} - \frac{d^2z}{dxdy}\delta x - \frac{d^2z}{dy^2}\delta y = \frac{d\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x - \frac{dz}{dy}\delta y\right)}{dy} \ldots\ldots (b),$$

et que, dans la première, on remplace z par $\frac{dz}{dy}$, on aura

$$\delta\frac{d^2z}{dxdy} - \frac{d^3z}{dx^2dy}\delta x - \frac{d^3z}{dxdy^2}\delta y = \frac{d\left(\delta\frac{dz}{dy} - \frac{d^2z}{dxdy}\delta x - \frac{d^2z}{dy^2}\delta y\right)}{dx},$$

ce qui revient à

$$\delta q_{,} - r_{,}\delta x - r_{,,}\delta y = \frac{d(\delta p_{,} - q_{,}\delta x - q_{,,}\delta y)}{dx},$$

qui, en vertu de l'équation (b), devient

$$\delta q_{,} - r_{,}\delta x - r_{,,}\delta y = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - p_{,}\delta y)}{dxdy},$$

et fera connaître $\delta q_{,}$.

La difficulté qui termine l'article cité, n'a plus lieu ici, parce qu'on tire le même résultat de l'équation (b), en y changeant z en $\frac{dz}{dx}$, ce qui donne

$$\delta q_{,} - r_{,}\delta x - r_{,,}\delta y = \frac{d(\delta p - q\delta x - q_{,}\delta y)}{dy},$$

d'où, par l'équation (a), on retombe sur ce qui vient d'être obtenu.

On formera de même les variations des autres coefficiens différentiels du second ordre et des ordres supérieurs. La loi est comprise dans la formule

$$\delta\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) - \frac{d^{m+1+n}z}{dx^{m+1}dy^n}\delta x - \frac{d^{m+n+1}z}{dx^m dy^{n+1}}\delta y = \frac{d^{m+n}(\delta z - p\delta x - p_{,}\delta y)}{dx^m dy^n};$$

en sorte que si l'on pose

$$\delta z - p\delta x - p_{,}\delta y = \omega,$$

on aura

$$\delta z = p\delta x + p_{,}\delta y + \omega,$$
$$\delta p = q\delta x + q_{,}\delta y + \frac{d\omega}{dx}, \quad \delta p_{,} = q_{,}\delta x + q_{,,}\delta y + \frac{d\omega}{dy},$$

etc.

La substitution de ces valeurs, dans l'expression générale

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z + \frac{dV}{dp}\delta p + \frac{dV}{dp_{,}}\delta p_{,} + \text{etc.},$$

donnera

$$\begin{aligned}\delta V = &\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p + \frac{dV}{dp}q + \frac{dV}{dp_{,}}q_{,} + \text{etc.}\right)\delta x \\ &+ \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}p_{,} + \frac{dV}{dp}q_{,} + \frac{dV}{dp_{,}}q_{,,} + \text{etc.}\right)\delta y \\ &+ \frac{dV}{dz}\omega + \frac{dV}{dp}\frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dp_{,}}\frac{d\omega}{dy} \qquad + \text{etc.},\end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned}\delta V = \frac{d(V)}{dx}\delta x + \frac{d(V)}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\omega + \frac{dV}{dp}\frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dp_{,}}\frac{d\omega}{dy} \\ \ldots\ldots + \frac{dV}{dz_{(m,n)}}\frac{d^{m+n}\omega}{dx^m dy^n} + \text{etc.},\end{aligned}$$

en représentant par $\frac{d(V)}{dx}$, $\frac{d(V)}{dy}$, les coefficiens différentiels de V, pris en faisant varier tout ce qui dépend des quantités x et y, implicitement comme explicitement, et posant $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} = z_{(m,n)}$. M. Poisson représente par $\delta\omega$, ce que je désigne ici par ω, pour conserver l'analogie avec les formules de l'ancien texte; et d'ailleurs cette quantité ω n'étant pas une différentielle exacte, suivant la caractéristique δ, semble n'en pas devoir porter le signe.

N° 862, page 780, ligne 6 en remontant, à ce qui suit cette ligne substituez :

Quand on change les variables x et y en u et v, le produit $dxdy$ doit changer, et la formule du n° 529, donnant

$$dxdy = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dudv,$$

conduit à

$$\delta(dxdy) = \left(\frac{dy}{dv}\frac{d\delta x}{du} + \frac{dx}{du}\frac{d\delta y}{dv} - \frac{dy}{du}\frac{d\delta x}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{d\delta y}{du}\right)dudv,$$

en regardant du et dv comme constantes par rapport à la caractéristique δ. Quand on fait ensuite $u = x$, $v = y$, on réduit la valeur ci-dessus à

$$\delta(dxdy) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}\right)dxdy,$$

la même qu'on obtiendrait sans cette supposition, si l'on mettait, au

lieu de

$$\frac{d\delta x}{du},\quad \frac{d\delta x}{dv},\quad \frac{d\delta y}{du},\quad \frac{d\delta y}{dv},$$

leurs expressions rapportées dans l'addition au numéro précédent; car il résulterait de cette substitution,

$$\delta(dxdy) = \left(\frac{dydx}{dvdu} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}\right)dudv,$$

et l'on a déjà vu que

$$\left(\frac{dy}{dv}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv}\right)dudv = dxdy.$$

Il faut encore remarquer que

$$\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}\right)dxdy = dy\delta dx + dx\delta dy,$$

comme on l'a trouvé dans l'ancien texte, en différentiant, par rapport à la caractéristique δ, le produit $dxdy$.

Avec cette valeur et celle de δV, indiquée dans l'addition au numéro précédent, on trouve ensuite

$$\begin{aligned}\delta\iint V dxdy &= \iint \delta V dxdy + \iint V\delta(dxdy)\\ &= \iint\left\{\frac{d(V)}{dx}\delta x + \frac{d(V)}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\omega + \frac{dV}{dp}\frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dp,}\frac{d\omega}{dy} + \text{etc.}\right.\\ &\quad\left. + V\frac{d\delta x}{dx} + V\frac{d\delta y}{dy}\right\}dxdy\end{aligned};$$

mais il est visible que

$$\int\left(\frac{d(V)}{dx}\delta x + V\frac{d\delta x}{dx}\right)dx = V\delta x,\quad \int\left(\frac{d(V)}{dy}\delta y + V\frac{d\delta y}{dy}\right)dy = V\delta y;$$

on a donc enfin

$$\begin{aligned}\delta\iint V dxdy &= \int V\delta x dy + \int V\delta y dx\\ &\quad + \iint dxdy\left\{\frac{dV}{dz}\omega + \frac{dV}{dp}\frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{dp,}\frac{d\omega}{dy} + \text{etc.}\right\},\end{aligned}$$

formule dont la seconde ligne est le développement de

$$\iint dxdy\left\{\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y\right\},$$

rapporté sur la page 782 du second volume, et se traitera de même. Ceci correspond bien d'ailleurs avec la formule du n° 848, trouvée par Euler pour l'intégrale simple $\int V dx$.

CORRECTIONS ET ADDITIONS

POUR LE TROISIÈME VOLUME.

CHAPITRE PREMIER.

N° 887, à la fin, page 10, ajoutez en note :

I. La formule principale de cet article peut être appliquée utilement à la théorie des nombres; et M. Laplace, dans un petit Mémoire imprimé à la suite d'une édition de l'*Algèbre* de Bossut (celle de 1776), en a tiré des démonstrations fort simples de quelques théorèmes sur les nombres premiers, parmi lesquelles se trouve celle du théorème de Wilson, énoncé à la fin du *Complément* de mes *Élémens d'Algèbre;* voici comment on y parvient.

On fait d'abord $u=x^m-1$, $n=m$, $h=1$, dans l'expression générale de $\Delta^n u$ (883), et, en observant que

$$\Delta^m(x^m-1)=\Delta^m.x^m=1.2.3....m,$$

on a l'équation

$$[(x+m)^m-1]-\frac{m}{1}[(x+m-1)^m-1]+\frac{m(m-1)}{1.2}[(x+m-2)^m-1]$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}[(x+m-3)^m-1]+\text{etc.}=1.2.3....m,$$

qui devient

$$p^{p-1}-\frac{p-1}{1}[(p-1)^{p-1}-1]+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}[(p-2)^{p-1}-1]$$
$$-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}[(p-3)^{p-1}-1]+\text{etc.}=1.2.3...(p-1)+1,$$

en faisant $x=1$, $m=p-1$, et en ajoutant l'unité à chaque membre. Cela posé, lorsque p désigne un nombre premier, tout le premier membre est divisible par p, parce que le théorème de Fermat, démontré dans le *Complément des Élémens d'Algèbre*, et par lequel le nombre $a^{p-1}-1$ est divisible par p lorsque a ne l'est pas, fait voir que les nombres

$$(p-1)^{p-1}-1,\qquad (p-2)^{p-1}-1,\qquad (p-3)^{p-1}-1,\qquad \text{etc.},$$

sont tous divisibles par p; le second membre de l'équation sera donc aussi divisible par p : c'est là le théorème de Wilson.

II. Celui de Fermat peut aussi se démontrer par les calculs suivans.

$$a^{p-1}=\frac{a^p}{a}=\frac{1}{a}\{(a-1)+1\}^p$$
$$=\frac{1}{a}\Big\{(a-1)^p+\frac{p}{1}(a-1)^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}(a-1)^{p-2}....$$
$$.......+\frac{p(p-1)(p-2)......2}{1.2.3....(p-1)}(a-1)+1\Big\},$$

développement dans lequel les numérateurs des coefficiens des puissances

$$(a-1)^{p-1}, \quad (a-1)^{p-2}, \ldots\ldots (a-1),$$

ont tous un facteur commun p, puisque les dénominateurs ne sont pas divisibles par ce nombre, qu'on suppose être premier. On peut donc donner à ce résultat la forme

$$a^{p-1} = \frac{1}{a}\left\{(a-1)^p + Ep(a-1) + 1\right\},$$

dans laquelle E désigne un nombre entier.

On conclut de là que

$$a^{p-1} - 1 = \frac{1}{a}\left\{(a-1)^p + Ep(a-1) + 1\right\} - 1$$

$$= \frac{1}{n}\left\{(a-1)^p + Ep(a-1) + 1 - a\right\} = \frac{a-1}{a}\left\{(a-1)^{p-1} + Ep - 1\right\};$$

mais a étant supposé d'abord $< p$, si $a^{p-1} - 1$ est divisible par ce nombre, il faudra que $(a-1)^{p-1} + Ep - 1$ le soit aussi, et réciproquement; d'où il suit que $(a-1)^{p-1} - 1$ doit être divisible par p ou nul.

Or, en allant de proche en proche, on trouve que si

$$a = 2, \quad (a-1)^{p-1} - 1 = 1^{p-1} - 1 = 0,$$

et que par conséquent $2^{p-1} - 1$ est divisible par p; puis faisant $a = 3$, il vient

$$3^{p-1} - 1 = \tfrac{2}{3}\left\{2^{p-1} - 1 + Ep\right\};$$

$3^{p-1} - 1$ est donc encore divisible par p, et ainsi de suite, tant que $a < p$.

Lorsque $a > p$, on pose $a = np + q$, d'où

$$a^{p-1} - 1 = (np+q)^{p-1} - 1 = -1 + (q+np)^{p-1}$$

$$= -1 + q^{p-1} + \frac{p-1}{1} q^{p-2}np + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} q^{p-3}n^2p^2 + \text{etc.},$$

résultat dont tous les termes, à partir du troisième, ont p pour facteur, et les deux premiers, formant l'expression $q^{p-1} - 1$, donnent un nombre divisible par p, puisque $q < p$; donc $(np+q)^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Enfin, quand a est divisible par p, comme alors a^{p-1} l'est pareillement, si l'on désigne ce quotient par E', il vient

$$\frac{a^{p-1}-1}{p} = \frac{a^{p-1}}{p} - \frac{1}{p} = E' - \frac{1}{p},$$

équation qui montre pourquoi le théorème n'a plus lieu.

III. Si a est un facteur de $p-1$, il existe un nombre x, tel que $x^{\frac{p-1}{a}} - 1$ n'est pas divisible par p, x étant $< \frac{p-1}{a}$; car si cette valeur et toutes celles qui la précèdent, rendaient $x^{\frac{p-1}{a}} - 1$ divisible par p, toutes les expressions

$$\left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{p-1}{a}}-1,\ \left(\frac{p-1}{a}-1\right)^{\frac{p-1}{a}}-1,\ \left(\frac{p-1}{a}-2\right)^{\frac{p-1}{a}}-1,\ \text{etc.}$$

seraient divisibles par p, et par conséquent aussi la fonction

$$\left[\left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{p-1}{a}}-1\right]-\frac{\frac{p-1}{a}}{1}\left[\left(\frac{p-1}{a}-1\right)^{\frac{p-1}{a}}-1\right]+\frac{\left(\frac{p-1}{a}\right)\left(\frac{p-1}{a}-1\right)}{1.2}\left[\left(\frac{p-1}{a}-2\right)^{\frac{p-1}{a}}-1\right]-\text{etc.}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{p-1}{a}}-\frac{\frac{p-1}{a}}{1}\left(\frac{p-1}{a}-1\right)^{\frac{p-1}{a}}+\frac{\left(\frac{p-1}{a}\right)\left(\frac{p-1}{a}-1\right)}{1.2}\left(\frac{p-1}{a}-2\right)^{\frac{p-1}{a}}-\text{etc.}\\ -1\qquad+\frac{\frac{p-1}{a}}{1}\qquad-\frac{\left(\frac{p-1}{a}\right)\left(\frac{p-1}{a}-1\right)}{1.2}\qquad+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

or, si l'on fait $h=1$, $m=\frac{p-1}{a}$, dans l'expression de $\Delta^m.x^m$, qui termine le n° 887, on verra que la première ligne du développement ci-dessus, revenant à......... $1.2.3......\frac{p-1}{a}$, n'est pas divisible par p, puisque $\frac{p-1}{a}<p$; quant à la seconde ligne, ce n'est autre chose que $-(1-1)^{\frac{p-1}{a}}=0$.

C'est ainsi que M. Laplace, dans une note qu'il a bien voulu me communiquer, démontrait le théorème précédent, sur lequel s'appuie la résolution des équations à deux termes, découverte par M. Gauss.

N° 893, page 16, après la dernière ligne.

M. J. Binet m'a fait observer qu'on pouvait arriver tout de suite à ce résultat, en partant de l'équation

$$\Delta^2 \sin x = -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+h),$$

démontrée dans le numéro précédent; car si on l'écrit ainsi :

$$\Delta^2 \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\{\Delta\sin x+\sin x\},$$

et qu'on prenne la différence de l'ordre $n-2$ dans les deux membres, il viendra

$$\Delta^n \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\{\Delta^{n-1}\sin x+\Delta^{n-2}\sin x\}.$$

CHAPITRE II DU TROISIÈME VOLUME.

N° 962, à la fin, page 96, ajoutez en note :

La considération des sommes successives a été employée par M. Budan, pour donner à un polynome

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}.......+px^3+qx^2+rx+s,$$

la forme

$$(x-1)^n + A(x-1)^{n-1} + B(x-1)^{n-2} \ldots\ldots + R(x-1) + S,$$

(*Nouvelle Méthode pour résoudre les Équations numériques*, p. 13), ce qui s'opère sans difficulté en posant $x = y + 1$, et ordonnant le résultat suivant les puissances de y; mais pour plus de symétrie, je mettrai un coefficient au premier terme du polynome. En l'écrivant ainsi,

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots\ldots + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t,$$

la substitution de $y + 1$, au lieu de x, donne pour résultat, en commençant par les termes sans y, et prenant ceux-ci dans l'ordre inverse de ceux du polynome en x,

$$\begin{aligned} &t + s + r + q + p \ldots\ldots + a \\ &+ \left(s + 2r + 3q + 4p \ldots\ldots + \frac{n}{1} a\right) y \\ &+ \quad \left(r + 3q + 6p \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a\right) y^2 \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

La première ligne est la somme des coefficiens du polynome; le coefficient de y, dans la seconde, se compose des termes de la première, à partir de s comme le développement $\Delta^{-2}u$ rapporté ci-dessus se forme avec les u, à partir de u_{-2}; le coefficient de y^2 se compose à partir de r, comme $\Delta^{-3}u$, se formerait à partir de u_{-3}, et ainsi de suite.

Si l'on prend les coefficiens du polynome en x dans leur ordre primitif, le coefficient de y est alors la somme des sommes, ou la *somme seconde* des termes de la première ligne, jusqu'à s inclusivement; le coefficient de y^2 la *somme troisième*, jusqu'à r inclusivement, et ainsi des autres.

En considérant les sommes successives de la série

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{etc.},$$

on trouvera le tableau

Sommes 1res.	Sommes 2es.	Sommes 3es.
a	a	a
$a + b$	$2a + b$	$3a + b$
$a + b + c$	$3a + 2b + c$	$6a + 3b + c$
$a + b + c + d$	$4a + 3b + 2c + d$	$10a + 6b + 3c + d$
etc.	etc.	etc.

d'après lequel on voit que si m désigne le nombre des termes de la série, la somme deuxième sera

$$\frac{ma}{1} + \frac{(m-1)}{1} b + \frac{(m-2)}{1} c \ldots\ldots + t,$$

la somme troisième

$$\frac{m(m+1)}{1.2} a + \frac{m(m-1)}{1.2} b + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} c \ldots\ldots + t,$$

et ainsi de suite. Mais si le nombre de termes de la suite diminue d'une unité à mesure que le rang de la somme augmente, en sorte qu'il passe de $n + 1$ à n, à $n - 1$, etc., dans ce cas on fera $m = n$ pour obtenir la somme seconde

et leurs analogues, par rapport aux différentielles, ne sont que des cas particuliers de cette autre :

$$F(u+v) = Fu + Fv,$$

dans laquelle F désigne une fonction telle, qu'appliquée à la somme de deux quantités, elle donne pour résultat la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités; mais elle peut être d'ailleurs quelconque. C'est là ce que M. Servois nomme une *fonction distributive* (*).

Si l'on y fait $u = r + s$, comme

$$F(r+s) = Fr + Fs,$$

il en résultera

$$F(r+s+v) = Fr + Fs + Fv,$$

et ainsi de suite.

De plus, si F_1 désigne la caractéristique d'une autre fonction distributive, on aura évidemment

$$F_1F(u+v) = F_1(Fu+Fv) = F_1Fu + F_1Fv.$$

Si l'on prenait, au lieu de F_1, la caractéristique F, on simplifierait le symbole FFu, comme les différentielles, en écrivant F^2u, F^2 désignant alors un second degré de fonction, ou une fonction du second ordre, par rapport à la fonction F; et puisqu'alors

$$F^2(u+v) = F^2u + F^2v,$$

on voit que les différens ordres d'une fonction distributive sont aussi des fonctions distributives.

Par analogie avec les équations

$$\Delta\Sigma u = \Delta\Delta^{-1}u = u, \qquad \Delta^n\Sigma^n u = \Delta^n\Delta^{-n}u = u,$$

M. Servois indique les fonctions inverses par des exposans négatifs, ainsi qu'il suit,

$$FF^{-1}u = u, \quad F^nF^{-n}u = u;$$

en sorte que F^{-1} et F^{-n} sont des caractéristiques inverses de F et de F^n.

III. Les équations

$$d\Delta u = \Delta du, \quad d\Sigma u = \Sigma du,$$

(*) Pour abréger, j'ai supprimé, comme M. Servois, les parenthèses dans les fonctions de monomes; ainsi Fu est la même chose que F(u), F_1Fu la même chose que $F_1[F(u)]$.

peuvent également être généralisées dans la suivante,

$$\mathrm{F}fu = f\mathrm{F}u,$$

où les caractéristiques F et f ne sont assujéties qu'à la seule condition de donner le même résultat, dans quelqu'ordre qu'on les applique à la quantité u; et M. Servois nomme *fonctions commutatives* celles qui jouissent de cette propriété.

Toutes les combinaisons qu'on peut faire des fonctions qui sont commutatives deux à deux, donnent aussi des fonctions commutatives. Ainsi les équations

$$\varphi\psi u = \psi\varphi u, \quad \varphi\varpi u = \varpi\varphi u, \quad \varpi\psi u = \psi\varpi u,$$

emportent

$$\varphi\psi\varpi u = \varphi\varpi\psi u = \varpi\varphi\psi u,$$
$$\psi\varphi\varpi u = \psi\varpi\varphi u = \varpi\psi\varphi u;$$

car on peut d'abord permuter entr'elles les deux caractéristiques contiguës ψ et ϖ dans le terme $\varphi\psi\varpi u$, ce qui donnera $\varphi\varpi\psi u$; et posant ensuite $\psi u = t$, permuter dans $\varphi\varpi t$ les caractéristiques φ et ϖ, d'où il résultera $\varpi\varphi t = \varpi\varphi\psi u$, et la caractéristique ϖ aura passé par toutes les places de l'expression.

Les fonctions commutatives entr'elles le sont aussi avec leurs inverses, et celles-ci le sont également entr'elles, c'est-à-dire que, de

$$\mathrm{F}fu = f\mathrm{F}u, \quad \text{il suit} \quad \mathrm{F}f^{-1}u = f^{-1}\mathrm{F}u, \quad \text{et} \quad \mathrm{F}^{-1}f^{-1}u = f^{-1}\mathrm{F}^{-1}u.$$

En effet, d'après l'article II, on a

$$\mathrm{F}ff^{-1}u = \mathrm{F}u, \quad ff^{-1}\mathrm{F}u = \mathrm{F}u, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}ff^{-1}u = ff^{-1}\mathrm{F}u;$$

mais si l'on échange entr'elles les caractéristiques F et f, dans le premier membre de la dernière équation, elle devient

$$f\mathrm{F}f^{-1}u = ff^{-1}\mathrm{F}u, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}f^{-1}u = f^{-1}\mathrm{F}u,$$

en supprimant la caractéristique f placée à la tête de chaque membre; et comme rien n'empêche qu'on n'écrive f au lieu de F, et réciproquement, on aura aussi

$$f\mathrm{F}^{-1}u = \mathrm{F}^{-1}fu.$$

Enfin, puisque $u = \mathrm{F}\mathrm{F}^{-1}u$, on a l'équation $f^{-1}u = f^{-1}\mathrm{F}\mathrm{F}^{-1}u$, dans le second membre de laquelle on peut, d'après ce qui précède, échanger entr'elles les caractéristiques f^{-1} et F, et il viendra

$$f^{-1}u = \mathrm{F}f^{-1}\mathrm{F}^{-1}u, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}^{-1}f^{-1}u = f^{-1}\mathrm{F}^{-1}u,$$

en prenant la fonction F^{-1} de chaque membre.

IV. Considérons maintenant deux fonctions F et F_1, définies par les équations

$$Fu = \varphi u + \psi u + \varpi u, \quad F_1 u = \varphi_1 u + \psi_1 u + \varpi_1 u,$$

dans lesquelles les caractéristiques φ, ψ, ϖ, φ_1, ψ_1, ϖ_1, désignent des fonctions quelconques; si l'on veut prendre la fonction F_1 de la fonction Fu, on posera d'abord $Fu = u_1$, et on aura

$$F_1 u_1 = \varphi_1 u_1 + \psi_1 u_1 + \varpi_1 u_1,$$

ce qui revient à

$$F_1 Fu = \left.\begin{array}{l} \varphi_1(\varphi u + \psi u + \varpi u) \\ + \psi_1(\varphi u + \psi u + \varpi u) \\ + \varpi_1(\varphi u + \psi u + \varpi u) \end{array}\right\}.$$

Si les fonctions φ_1, ψ_1, ϖ_1, sont distributives, on pourra séparer les termes renfermés dans les parenthèses, et il viendra l'équation

$$F_1 Fu = \left.\begin{array}{l} \varphi_1\varphi u + \varphi_1\psi u + \varphi_1\varpi u \\ + \psi_1\varphi u + \psi_1\psi u + \psi_1\varpi u \\ + \varpi_1\varphi u + \varpi_1\psi u + \varpi_1\varpi u \end{array}\right\},$$

dont le second membre, quand on en a ôté la lettre u, n'est autre chose que

$$(\varphi_1 + \psi_1 + \varpi_1)(\varphi + \psi + \varpi):$$

en faisant la même opération sur Fu et $F_1 u$, on pourra donc écrire

$$Fu = (\varphi + \psi + \varpi)u, \quad F_1 u = (\varphi_1 + \psi_1 + \varpi_1)u,$$
$$F_1 Fu = (\varphi_1 + \psi_1 + \varpi_1)(\varphi + \psi + \varpi)u,$$

puis

$$F_2 F_1 Fu = (\varphi_2 + \psi_2 + \varpi_2)(\varphi_1 + \psi_1 + \varpi_1)(\varphi + \psi + \varpi)u,$$

en observant de placer dans le même ordre les indices dans les deux membres.

On ne serait pas assujéti à cette condition, si les fonctions φ, ψ, ..., φ_1, etc., étaient commutatives deux à deux, puisqu'alors $\varphi_1\varphi u = \varphi\varphi_1 u$, et ainsi des autres. De plus, comme on pourrait ranger dans tel ordre qu'on voudrait les indices du premier membre, il s'ensuit que les fonctions F, F_1, F_2, seraient commutatives entr'elles.

Dans ce cas, si les caractéristiques du premier membre étaient les

mêmes, les lettres φ, ψ, ϖ et F, ne portant plus d'indices, on aurait

$$\mathrm{F}^2u = (\varphi + \psi + \varpi)^2u, \quad \mathrm{F}^3u = (\varphi + \psi + \varpi)^3u, \quad \text{etc.},$$

et en général

$$\mathrm{F}^nu = (\varphi + \psi + \varpi + \omega + \ldots .)^nu,$$

en quelque nombre que fussent les fonctions φ, ψ, ϖ, etc.

V. La caractéristique Δ indiquant une fonction distributive (II) et en même temps commutative avec les facteurs constans ; puisque.... $\Delta.au = a\Delta u$, si l'on représente, avec Arbogast, par Eu, l'état varié désigné ordinairement par u_1, il suit de la théorie exposée dans les articles précédens, que

$$\mathrm{E}u = u + \Delta u = (1 + \Delta)u \quad \text{donne} \quad \mathrm{E}^nu = (1 + \Delta)^nu,$$

où il faut observer que 1, multiplicateur de u, tient la place d'une caractéristique de fonction commutative avec celle que marque la caractéristique Δ, puisque $1.\Delta u = \Delta.1u$.

Par les mêmes raisons,

$$\Delta u = \mathrm{E}u - u = (\mathrm{E} - 1)u, \quad \text{conduit à} \quad \Delta^nu = (\mathrm{E} - 1)^nu.$$

Les différentielles étant aussi des fonctions distributives et commutatives entr'elles et avec les facteurs constans, on doit, en écrivant, comme le fait M. Servois, du au lieu de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, et faisant $h = 1$, passer de

$$\Delta u = (e^d - 1)u \quad \text{à} \quad \Delta^nu = (e^d - 1)^nu ;$$

de

$$\mathrm{d}u = (\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \text{etc.})\,u = [(\mathrm{E} - 1) - \tfrac{1}{2}(\mathrm{E} - 1)^2 + \text{etc.}]u$$

à

$$\mathrm{d}^nu = (\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \text{etc.})^n\,u = [(\mathrm{E} - 1) - \tfrac{1}{2}(\mathrm{E} - 1)^2 + \text{etc.}]^nu,$$

ou bien à

$$\mathrm{d}^nu = [\mathrm{l}\,(1 + \Delta)]^nu = (\mathrm{l}\,\mathrm{E})^nu.$$

N'ayant voulu que donner une légère idée de la théorie proposée par M. Servois, je m'arrêterai ici, et je renverrai à son Mémoire (p. 117), pour les applications qu'il fait de ses principes aux différences ou aux différentielles, soit totales ou partielles, aux états variés, aux intégrales, etc., toutes fonctions qui sont distributives et commutatives, soit entr'elles, soit

avec les facteurs constans, ainsi que beaucoup d'autres fonctions où celles-ci ne monteraient qu'au premier degré et seraient multipliées par des coefficiens constans, comme, par exemple,

$$au + bEu + cE^2u + \ldots, \quad adu + bd^2u + cd^3u + \ldots;$$

L'auteur, ne voulant rien emprunter des théories antérieures à la sienne, a établi, *à priori*, les développemens

$$Fx = Fp + \frac{x-p}{\alpha}\Delta Fp + \frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{1.2\alpha^2}\Delta^2 Fp + \frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 Fp + \text{etc. (p. 105)},$$

$$Fx = Fp + \frac{x-p}{\alpha}dFp + \frac{(x-p)^2}{1.2\alpha^2}d^2Fp + \frac{(x-p)^3}{1.2.3\alpha^3}d^3Fp + \text{etc. (p. 110)},$$

qui ne sont que la formule du n° 882 et le théorème de Taylor, et qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la manière dont ils sont ordonnés, le premier l'étant suivant les factorielles, et le second suivant les puissances; il donne le détail du calcul, dans une note à la page 156. C'est de ce théorème dont il part pour construire un grand nombre de formules propres à développer les fonctions, qui font, ainsi que je l'ai dit (p. 628), une partie considérable de son travail.

Il s'était proposé, en même temps, de dégager les principes du Calcul différentiel, de la notion de l'infini; c'est de la comparaison même des deux développemens de Fx, rapportés ci-dessus, qu'il tire la définition de la différentielle, en posant

$$\Delta z - \tfrac{1}{2}\Delta^2 z + \tfrac{1}{3}\Delta^3 z - \text{etc.} = dz \text{ (p. 108)},$$

d'où il déduit ensuite les différentielles des ordres supérieurs, et les règles pour différentier les fonctions.

Mais quelqu'ingénieuse que soit cette manière d'amener le Calcul différentiel, comme elle est uniquement fondée sur une forme de calcul, ainsi que les théories de MM. Gruson et Kramp (83), et de Lagrange même, elle ne semble pas présenter des principes assez spéciaux pour être généralement adoptés. Il est évident que si l'on ne voulait envisager le Calcul différentiel que sous un point de vue purement analytique, on en pourrait former autant de définitions, qu'on imaginerait de procédés pour parvenir aux expressions qui le constituent; mais ses appli-

cations à la Géométrie et à la Mécanique, sur lesquelles se fonde presque toute son importance, exigeant toujours des considérations qui tiennent toutes plus ou moins de celle des limites, demanderaient qu'on ajoutât de nouveaux principes à ceux qui auraient été posés d'abord. Il semble donc plus court de commencer par les principes mêmes qui conviennent à tous les cas, parce qu'ils sont réellement tirés de la nature du sujet, c'est-à-dire de la formation des grandeurs assujéties à la loi de continuité dont les limites sont l'expression (page XXIV et suiv. de la Préface du premier volume).

N° 977, à la fin, page 116, ajoutez :

M. Brinkley, dans le volume des *Transactions philosophiques* de l'année 1807, 1ère part., est parvenu à une expression du terme général de $\Sigma^n u$, et M. John W. Herschel, dans le même recueil (année 1816, 1ère part.), a donné les formules pour développer l'équation

$$f(1+\Delta)u_x = f\{e^{\Delta x D}\}u_x,$$

où Du représente $\frac{du}{dx}$.

N° 1006, à la fin, page 151, ajoutez :

Ce résultat, obtenu d'après Euler (*Institut. Calc. differential.*, pars II, n° 153), vient bien à l'appui des remarques insérées dans les n°s 898 et 928; puisqu'il a été prouvé au n° 974, que les nombres de Bernoulli, considérés dans le développement de Σu, doivent être nuls pour les indices pairs, tandis qu'ici on leur trouve des valeurs assignables.

FIN DES CORRECTIONS ET ADDITIONS.

TABLE DES MATIÈRES.

OBSERVATION. Les chiffres indiquent les numéros et non les pages ; quand un numéro est suivi de la lettre *a*, il faut le chercher dans les *Corrections et Additions* placées à la fin du IIIe volume.

On n'a rappelé dans cette Table que les noms des Auteurs cités dans le texte ; c'est dans les Tables particulières à chaque volume, qu'on trouvera l'indication détaillée de ce qui a été écrit sur la Science.

A

B

C

E

F

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

Y

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



ADDITION au n° 1248, page 562.

Depuis l'impression de cet article, M. Poisson a eu la complaisance de me communiquer l'intégrale très élégante et très simple qu'il a obtenne pour l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

qni se rapporte au mouvement des fluides considérés avec les trois dimensions, et qui comprend l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

indiquée dans les n°s 1246 et 1248. Voici cette intégrale :

$$\varphi = \iint T_1 t\, du dv \sin u + \frac{d\iint T_2 t\, du dv \sin u}{dt},$$

T_1 et T_2 étant des fonctions arbitraires des trois quantités

$$x + at\cos u, \quad y + at\sin u \sin v, \quad z + at\sin u\cos v.$$

Les intégrations indiquées doivent s'effectuer depuis $u = 0$, jusqu'à $u = \pi$, et depuis $v = 0$, jusqu'à $v = 2\pi$.

Ce résnltat, remarquable par sa forme, peut se vérifier en convertissant les fonctions arbitraires en séries ascendantes, suivant les puissances de t, au moyen de la formule du n° 38, par la supposition de

$$h = at\cos u, \quad k = at\sin u\sin v, \quad l = at\sin u\cos v.$$

Les intégrations s'effectnent alors, et l'on s'assure ensnite que la série résultante, analogue à celle dn n° 780, satisfait à l'équation proposée.

Les fonctions arbitraires se déterminent sans peine, d'après les valeurs de φ et de $\frac{d\varphi}{dt}$, correspondantes à $t = 0$, parce que, cette supposition réduisant les fonctions T_1 et T_2 à ne contenir que les seules variables x, y et z, il vient

$$\varphi = 4\pi F(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 4\pi f(x, y, z),$$

où les fonctions F et f sont arbitraires.

Les calculs sur lesqnels est fondé ce qui précède, seront développés par l'Auteur, dans un Mémoire *sur l'intégration de plusieurs équations différentielles partielles*, qui fera partie de ceux de l'Académie des Sciences, pour 1818.

ERRATA.

Page 20, ligne 13, $\frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin'(x+h)+\sin x}\right]$, *lisez* $\frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x}\right]^2$

37, 10, *au dénominateur*, $a_1 - a$, *lisez* $a - a_2$

39, 14, *au dénominateur*, $(x'-1)^2$, *lisez* $(x-1)^2$

43, 4, *au numérateur*, $(n-1)r$, *lisez* $(n-1)m$.

ibid., 6, Δ e, *lisez* Δ se

57, 15, $[x-(m-1)]h$, *lisez* $[x-(m-1)h]$

ibid., 16, $[x-(m-2)]h$, *lisez* $[x-(m-2)h]$

58, 3 *en remontant*, $\Delta u - \Delta u_{-1}$, *lisez* $'\Delta u - '\Delta u_{-1}$

84, 3, 4, 5 et 6 *en remontant*, $+\frac{1}{2}$, *lisez* $-\frac{1}{2}$

94, 14, Δxy, *lisez* $x\Delta y$

123, 4, $2^4\left[\frac{11}{2}\right]$, *lisez* $2^4\left[\frac{11}{2}\right]^4$

147, 14, + etc., *lisez* — etc.

154, 3, caractérisque, *lisez* caractéristique

163, 16, (1002), *lisez* (1000)

170, 13, $SX_{1,\infty}$, *lisez* SX_1^{∞}

181, 4 *en remontant, les lettres* M_3 *et* M_4 *manquent dans la figure* 2, *mais il n'en résultera aucun embarras, si l'on se rappelle qu'elles désignent des points consécutifs à* M_2.

184, 11, C, *lisez* C_1

190, 4 *en remontant, au dernier terme*, $[m-n-p-r+\overset{\mu}{\mu}]$, *lisez*...
$[m-n-p-q-r+\overset{\mu}{\mu}]$

192, 3, $[m+\overset{\mu}{\mu}-]$, *lisez* $[m+\overset{\mu}{\mu}]-$

193, 4 *en remontant*, $+Mm$, + etc., *lisez* $+Mm$ + etc.

211, 17, X, *lisez* X_x

ibid., 2 *en remontant*, 1042, *lisez* 1041

213, 2, *en remontant*, 1041, *lisez* 1042

234, 17, $Fu\beta$, *lisez* Fu^{β}

238, *à côté du n° 1062, mettez l'addition marginale :* Des équations simultanées du premier degré.

242, *à côté du n° 1065, mettez l'addition marginale :* Des facteurs qui rendent intégrables les équations aux différences.

255, 11, $P''M''$ *manque sur la figure, parce que le point* M'' *n'a pu y trouver place ; mais il est aisé de voir que c'est l'ordonnée qui suit* $P'M'$.

ibid., 22, m'' *manque par la même raison que ci-dessus.*

269, 14, etc., *lisez* + etc.

287, 2, *mettez à la parenthèse du* 2e *membre l'exposant* u.

300, 25, série, *lisez* table à double entrée

318, 6, *au dénominateur*, x, *lisez* Δx

330, 10, $\Delta^3 y_{x-4}$, *lisez* $\Delta^3 y_{x-3}$

342, 24, $+\frac{1}{2}$, *lisez* $+\frac{1}{t^2}$

350, 5, *au second terme*, $u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)$, *lisez* $u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^2$

351, 17, $nl(1+dy)^n$, *lisez* $nl(1+dy)$

354, 14, $y_x y'_x y''_x$, *lisez* $y_x y'_x y''_x$ etc.

356, 2, *au second membre, même correction.*

364, 7, *mettez* + *avant* M'_1.

Page 370, ligne 6 *en remontant, au dénominateur*, a_x, *lisez* u^n
378, 6, *divisez le premier membre par* dx.
381, 16, *au dénominateur*, acf, *lisez* $acfh$
392, 3 *en remontant*, s, *lisez* s'
419, 4 *en remontant*, $\sin 5m$, *lisez* $\sin 5m\pi$
433, 9, $\varphi(n-p-2)$, *lisez* $\varphi(n-p-2, p)$
458, 1, $(\sin 2\varphi^2)$, *lisez* $(\sin 2\varphi)^2$
462, 16, *à la fin, ôtez la virgule.*
474, 14, *au commencement, mettez* 1°
479, 1 *en remontant*, $\frac{n}{2^{n-1}}$, *lisez* $\frac{n}{2^{n-1}}$,
482, 2, *en remontant*, $\frac{1}{n}\Gamma\left(\,_n\right)$, *lisez* $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$
484, 2 *en remontant*, e^{-tn}, *lisez* e^{-t^n}
490, 21, $e^{-q}x^{px-1}$, *lisez* $e^{-qx}x^{p-1}$
494, 4 *en remontant*, zd, *lisez* zdz
506, 2, *au dénominateur*, $(1+\beta)^{p+q+}$, *lisez* $(1+\beta)^{p+q+2}$
510, 1 *en remontant*, $\frac{dy}{dx}=0$, *lisez* $\frac{dy}{dx'}=0$
519, 17, $\frac{e}{x}$, *lisez* $\frac{e^x}{x}$
533, 5, *de la note, au dénominateur*, $c+ex^n$, *lisez* $a+bx^n$
535, 14, e^{biqx}, *lisez* e^{bt^qx}
536, 1, *même correction.*
560, 8 et 9, $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ *est facteur de tout le second membre.*
607, 15, $(\cos\pi)^{\frac{2}{3}}$, *lisez* $(\cos\pi)^{\frac{2}{3}}$
ibid., 16, + etc., *lisez* + etc.]
608, 23, $x+2.2\pi$, *lisez* $x+2.2\pi, \ldots$
617, 23, $\frac{dX'}{X}$, *lisez* $\frac{dX'}{X'}$
624, 6 *en remontant*, $\left(\frac{z}{u}\right)^{n-p}$, *lisez* $\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}$
626, 5 *en remontant*, $\frac{dX}{du^n}$, *lisez* $\frac{d^nX}{du^n}$
633, 18-19, *effacez ces mots :* le radical,
ibid., 22, *à la fin, ajoutez :* Le calcul serait plus simple en résolvant l'équation par rapport à x. Développant alors le radical suivant les puissances ascendantes de y, on trouverait aisement les séries régulières

$$x = \pm\sqrt{2a}\left\{y^{\frac{1}{2}} \pm \frac{y}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.1}{1.2}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a} \pm \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{y^2}{a^{\frac{3}{2}}} - \text{etc.}\right\}.$$

656, 7 *en remontant, multipliez le* 2e *membre par* dx^2.
642, 5, autre spirale, *lisez* autre branche
ibid., 8, les deux courbes, *lisez* la courbe
ibid., 10, *après* polaires, *ajoutez :* voyez dans mon *Traité élémentaire de Trigonométrie*, etc., la note sur le changement de signe de la sécante.
648, 11, $\frac{B}{C'}$, *lisez* $\frac{B'}{C'}$

Page 652, ligne 14, *après cette ligne, ajoutez :* D'après ce qui a été démontré dans le n° 301, l'équation (e) a nécessairement ses trois racines réelles; elle est par conséquent susceptible de l'application de la règle de Descartes, et l'on peut reconnaître tout de suite si elle a 3 racines positives, ou 1 ou 2 ou 3 racines négatives. Dans le premier cas, la surface proposée a 6 sommets, dans le second 4, dans le troisième 2, ce qui caractérise cette surface; enfin, dans le quatrième cas, tous les sommets étant imaginaires, l'équation proposée ne répond à aucune surface.

660, 4 *en remontant*, sin V, *lisez* sin V'

661, 22, *même correction.*

662, 13, *après* angle droit, *ajoutez :* l'une de ces directions est parallèle à la commune section du plan tangent avec celui des xy, et l'autre étant perpendiculaire à la première, coïncide avec la ligne de plus grande pente (319).

672, 17, $G'O$, *lisez* $G'O'$

685, 27, *Géométrie* d, *lisez* *Géométrie* de

698, 9, $\frac{dr}{x}$, *lisez* $\frac{dr}{dx}$

716, 9, *en remontant*, 828, *lisez* 827

727, 28, *à la fin*, F, *lisez* F*

Supplément à l'ERRATA du premier Volume.

Page xxvj, ligne 24, *après Géométrie*, *ajoutez* à la fin du second livre

xxxiij, 33, (T. II, pag. 72), *lisez* (T. I, pag. 50)

lj, 2e colonne, ligne 6, XIII, *lisez* VIII

112, 4, *après descendante*, *ajoutez :* c'est-à-dire où les exposans vont en décroissant

122, 7 *en remontant*, *à la fin*, *au lieu du point mettez une virgule.*

ibid., 6 *en remontant*, Cependant, *lisez* cependant

137, 14, *à la fin*, *ajoutez :* les deux Fagnano ont trouvé des expressions de ce genre, qui sont aussi très-remarquables, entr'autres $\pi^2 = l(+1).l(-1)$. (*Histoire des Mathématiques*, par Montucla, T. III, p. 285).

239, 7 *en remontant*, *Discours préliminaire*, *lisez* *Préface*, pag. xv.

242, *dernière de la Note*, *ajoutez :* Voyez le *Nouveau Bulletin des Sciences*, par la Société Philomatique, T. I, pag 275.

275, 16, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, *lisez* $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A$

315, 5, s'en servirent, *lisez* se servirent des combinaisons

ibid., 9, *d'Algèbre*, *lisez* *d'Arithmétique universelle*

ibid., 18, *Discours preliminaire*, *lisez* *Preface*, pag. xxviij et suiv.

368, 10, dénominateur, *lisez* numérateur

380, 12, et d'autres, *lisez* et à d'autres

382, *dernière*, *ajoutez en note :* Les considérations géométriques indiquées dans le n° 475, (T. II, pag. 139), prouvent aussi que la somme des produits $U'_0 \frac{b}{n}$, $U'_1 \frac{b}{n}$, etc., exprimant celle des rectangles inscrits ou circonscrits à la courbe dont U_0 désigne l'aire, peut approcher de cette dernière quantité, aussi près qu'on voudra.

419, 18, $By^{\beta} + Cy^{\gamma}$, *lisez* $Bx^{\beta} + Cx^{\gamma}$

488, 6 *en remontant*, *après* infiniment petit, *ajoutez :* du second ordre

502, *entre la 5e et la 6e ligne*, *en remontant*, *ajoutez :*

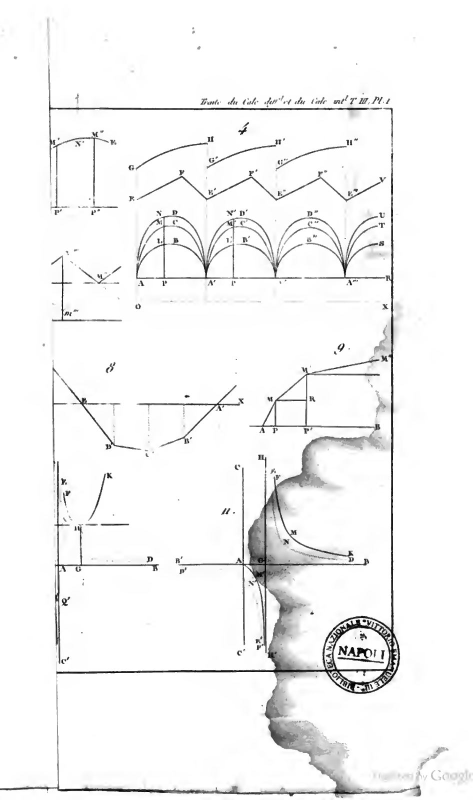
$-x, -y, +z$, dans l'angle $ADbc$

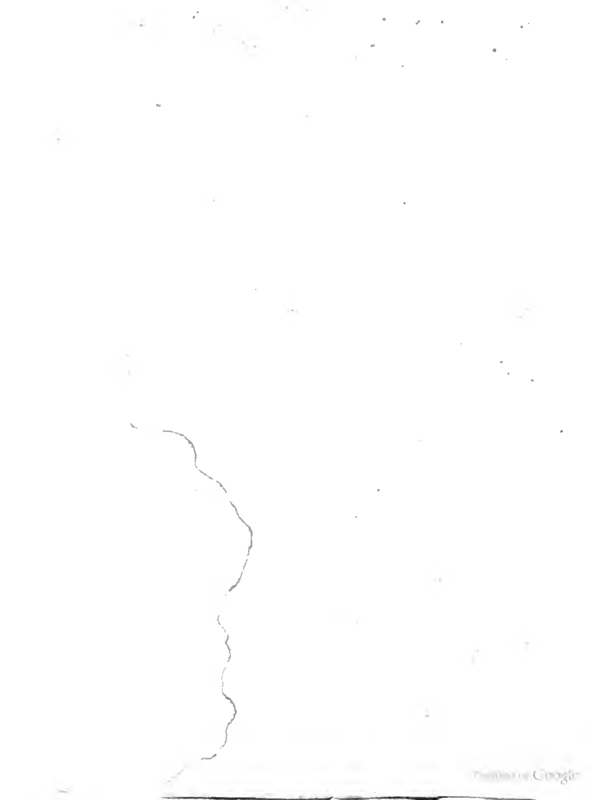
Page 551, ligne 8, *à la fin*, *ajoutez* : Il faut remarquer que toutes ces sections sont des ellipses semblables, puisque leurs axes sont proportionnels.
553, 18, *après* celui des *u*, *ajoutez* : Il faut remarquer que toutes les sections sont des hyperboles semblables, ayant pour asymptotes des droites parallèles entre elles, ainsi qu'au plan des xy, et se coupant dans l'axe des t.
565 *dernière*, *ajoutez* : c'est là l'équation différentielle de la projection, sur le plan des xz, de la section faite par le plan donné.
576, 4, *sous le* 2e *radical*, f, *lisez* f^2
581, 10, équations, *lisez* équations (2)
598, 18, *après* cette courbe, *ajoutez* considérée comme un polygone
645, 1, *à la fin*, h, *lisez* k
649, 31, plan primitif où elle était tracée, *lisez* plan où elle était primitivement tracée
650, 24, *à la fin*, *ajoutez* : les intersections de ces plans, lignes qui sont à la fois les arêtes de la surface développable, et les tangentes de la courbe, sont ce que M. Dupin, nomme *tangentes conjuguées*; elles jouissent de propriétés remarquables. Voyez ses *Développemens de Géométrie, etc.*, pag. 41 et suiv.

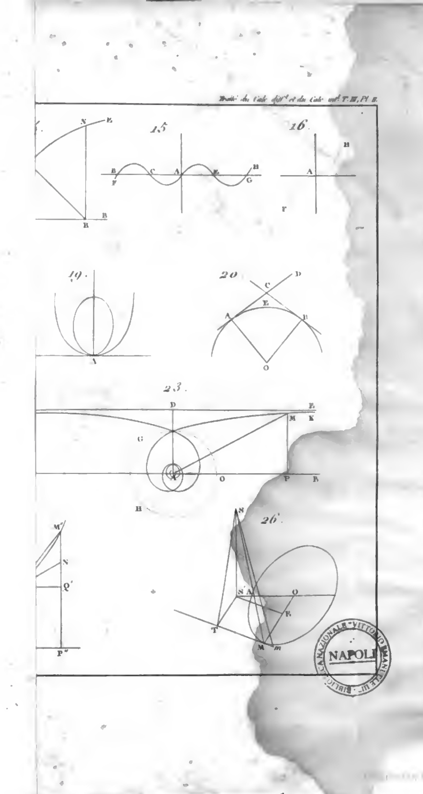
Supplément à l'ERRATA du second Volume.

Page 57, ligne 16, troisième, *lisez* quatrième
152, *dernière*, *ajoutez* : les formules ci-dessus sont l'expression algébrique de la proposition XI du *Traité de la quadrature des courbes*, par Newton, (*Newtoni opuscula*, T. I, pag. 240).
502, 4, *leminiscate*, *lisez lemniscate*
546, 15, *effacez* $= 0$
636, 10, *mettez en tête de la ligne* : 2°
ibid. 5 *en remontant*, dans le même sens, *lisez* de signes contraires

De l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs, n° 12.


4
8
9
11
NAPOLI
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III





15.
16.
19.
20.
23.
26.

